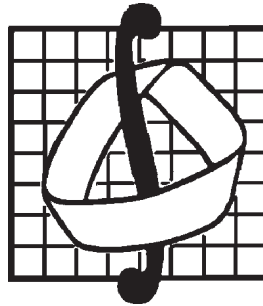


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

В.В. Александров, С.С. Лемак, Н.А. Парусников

Лекции по механике управляемых систем

Допущено Учебно-методическим советом по математике и механике УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «010701 Фундаментальная математика и механика»

Оглавление

Предисловие	5
Часть I Первый семестр. Линейный анализ и синтез управляемых систем	6
Лекция 1. Основные понятия механики управляемых систем. Физическая и математическая модели системы. Программное управление и управление при помощи обратной связи	6
Лекция 2. Основные понятия: устойчивость, управляемость, наблюдаемость	10
Лекция 3. Понятия управляемости и наблюдаемости. Критерии управляемости и наблюдаемости	14
1. Понятие управляемости и критерий управляемости	14
2. Понятие наблюдаемости и критерий наблюдаемости	16
Лекция 4. Контравариантные и ковариантные координаты, алгоритмы управления с заданными свойствами переходных процессов	19
Лекция 5. Асимптотические алгоритмы оценивания. Управление по оценке	23
1. Асимптотически устойчивый алгоритм оценивания	23
2. Стабилизация вполне управляемой и вполне наблюдаемой стационарной линейной системы	25
Лекция 6. Структура стационарных динамических систем с позиций управляемости	27
1. Декомпозиция линейных стационарных систем с точки зрения управляемости	27
Лекция 7. Структура стационарных динамических систем с позиций наблюдаемости и стабилизируемости	34
1. Декомпозиция линейных стационарных систем с точки зрения наблюдаемости	34
2. Стабилизируемость линейных стационарных систем	36
Лекция 8. Характеристики многомерных случайных векторов. Свойства многомерного нормального распределения	38
1. Характеристики многомерных случайных векторов	38
2. Основные законы распределения	40
Лекция 9. Случайные процессы и их характеристики	43
1. Анализ случайных процессов	44
2. Процессы с ортогональными приращениями. Белый шум	45
Лекция 10. Стохастические модели линейных динамических систем	48
1. Дискретный случай	48
2. Непрерывный случай	48
3. Дискретизация непрерывных случайных процессов	50
Лекция 11. Алгоритмизация задачи оценивания	53
1. Решение переопределенных систем линейных алгебраических уравнений	53
2. Критерий максимального правдоподобия	54
3. Задача сглаживания экспериментальных данных методом наименьших квадратов при помощи кубических сплайнов	55
Лекция 12. Критерий ортогональности и критерий условного среднего	57
Лекция 13. Дискретный фильтр Калмана	60
1. Алгоритмы дискретного фильтра Калмана	60
2. Некоторые свойства дискретного фильтра Калмана	61
3. Реализация дискретного фильтра Калмана методом квадратного корня.	62
Лекция 14. Непрерывный фильтр Калмана	64
1. Представление уравнения Риккати в виде линейных уравнений большей размерности	65
2. Устойчивость фильтра Калмана	66
Лекция 15. Применение теории наблюдаемости и оценивания в инерциальной навигации	68
1. Приборы. Метод инерциальной навигации	68
2. Упрощенный вариант инерциальной навигационной системы	71
Лекция 16. Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов с некоторыми приложениями к задачам оценивания	76

Часть II Второй семестр. Управление нелинейными возмущаемыми системами	82
Лекция 17. Стратегии многоуровневого управления движением	82
1. Линейная комбинация программного и дополнительного управления при помощи об- ратной связи	82
2. Оптимизация программного движения. Принцип максимума Понтрягина	84
3. Два уровня управления для сингулярно возмущенных систем	85
Лекция 18. Двухуровневое управление планированием летательного аппарата	87
1. Нормализация и обезразмеривание уравнений движения ТЛА	89
2. Анализ присоединенной системы и синтез алгоритма управления рулем высоты	89
3. Редукция к вырожденной (упрощенной) системе с помощью теоремы Тихонова	90
4. Построение управления для вырожденной системы.	91
Лекция 19. Классическая вариация и необходимое условие слабого локального ми- нимума	92
1. Формула приращения функционала для задачи с фиксированным временем и свобод- ным правым концом траектории	92
2. Необходимое условие слабого локального минимума	93
Лекция 20. Лагранжева форма необходимых условий оптимальности	96
1. Задача Больца в вариационном исчислении	96
2. О связи вариационных принципов механики с принципом максимума	97
3. Лагранжева форма условий оптимальности	97
Лекция 21. Оптимальная стабилизация при неограниченных ресурсах	100
1. Управление линейной системой с квадратичным функционалом качества на конечном интервале времени	100
2. Стационарные системы при бесконечном времени управления	101
Лекция 22. Квадратичная стабилизация и линейные матричные неравенства	103
Лекция 23. Стабилизация линейной системы при наличии возмущений	107
1. Робастная квадратичная стабилизация линейной системы	107
2. Стабилизация при наличии аддитивных возмущений	108
3. Стабилизация линейной стохастической системы	110
4. Совместная задача оценивания и управления стохастической системой	111
Лекция 24. Игольчатая вариация и необходимое условие сильного локального мини- мума	113
1. Доказательство принципа максимума Понтрягина	113
2. Задача быстрогодействия	116
Лекция 25. Достаточные условия оптимальности управляемой системы	118
1. Достаточность принципа максимума для линейных систем	118
2. Метод динамического программирования Беллмана как достаточное условие опти- мальности	120
3. Связь метода динамического программирования с принципом максимума	123
Лекция 26. Особые оптимальные управления	124
1. Вариация Келли и необходимые условия оптимальности второго порядка	124
2. Скобки Пуассона	125
3. Структура оптимального управления	126
Лекция 27. Задача Годдарда	128
Лекция 28. Численные методы решения экстремальных задач	132
1. Методы решения двухточечной краевой задачи ПМП	132
Лекция 29. Задача Булгакова о накоплении возмущений и максиминное тестирова- ние качества стабилизации	137
1. Задача Булгакова о накоплении возмущений	137
2. Максиминное тестирование качества стабилизации	139

Дополнения к лекциям	142
Дополнение к лекциям 5–7. Декомпозиция алгоритмов управления и оценивания по компонентам соответственно вектора управления и вектора наблюдения	142
Дополнение к лекции 13. Субоптимальное сглаживание	146
Дополнение 1 к лекции 14. Меры оцениваемости	149
Дополнение к лекциям 13–14. Оценивание вектора состояния как решение задачи коррекции	152
Дополнение 1 к лекции 25. Регулярный синтез по Болтянскому	154
Дополнение 2 к лекции 25. О достаточности принципа максимума в общем случае	157
Дополнение 1 к лекции 29. О смешанных стратегиях реализации динамической игры . . .	158
Дополнение 2 к лекции 29. Максиминное тестирование качества стабилизации управляемой системы	161
Примерный список вопросов по курсу «Механика управляемых систем»	164
Основная литература	165
Дополнительная литература	165

Предисловие

Пятидесятые и шестидесятые годы прошлого века — время получения в механике управляемых систем основополагающих теоретических результатов, связанных с именами Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана (методы оптимального управления), А.Н. Тихонова (асимптотические методы), Р. Калмана (теория управляемости и наблюдаемости).

К 1967 году профессор Московского университета Я.Н. Ройтенберг создает и начинает читать на Отделении механики механико-математического факультета МГУ обязательный годовой курс «Механика управляемых систем». В 1987 году этот курс был дополнен проведением семинаров (один раз в две недели) и, наконец, в 2011 году при увеличении срока обучения на механико-математическом факультете до шести лет Ученый Совет факультета ввел еженедельное сопровождение курса практическими занятиями. Лекторами в эти годы, кроме Я.Н. Ройтенберга, были В.В.Александров, Н.А. Парусников и С.С. Лемак. За прошедшее время было опубликовано пять учебных пособий:

- а) «Нелинейные колебания и автоматическое регулирование». Я.Н. Ройтенберг (1967г.)
- б) «Автоматическое управление». Я.Н. Ройтенберг (1971, 1974, 1992гг. — на русском языке; 1974г. — на французском языке; 1978г. на польском языке).
- в) «Введение в динамику управляемых систем». В.В. Александров, С.И. Злочевский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников (1993г. — на русском языке, 2010г. — на английском языке).
- г) «Оптимальное управление движением». В.В. Александров, В.Г. Болтянский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников, В.М. Тихомиров (2005г. — на русском языке).
- д) «Лекции по механике управляемых систем». В.В. Александров, С.С. Лемак, Н.А. Парусников (2012г. — на русском языке).

В настоящее время выходит в свет второе издание пособия «Лекции по механике управляемых систем».

К сожалению, вместить в 29 лекций, составляющих годовой курс, весь теоретический материал не представляется возможным. Поэтому авторы данного учебного пособия вынуждены были давать на лекциях только самые необходимые теоретические методы анализа и синтеза управляемых динамических систем (УДС), оставляя объяснения процессов их реализации для конструирования конкретных алгоритмов навигации и управления на практические занятия по курсу. Знакомство с конкретными УДС происходит при проведении занятий по специальному практикуму. Следует отметить, что многие важные разделы, например, такие, как управление распределенными системами или управляемые биомеханические системы, не рассматриваются в этом курсе.

Дополнение к лекциям 5–7 подготовлено совместно с В.М. Морозовым. Дополнение 2 к лекции 14 подготовлено совместно с Н.Б. Вавиловой. Дополнение 2 к лекции 29 подготовлено К.В. Тихоновой.

Авторы выражают благодарность доценту О.Ю. Черкасову и студентам механико-математического факультета МГУ Е.В. Позднеевой и А.Д. Прохоровой за помощь в подготовке рукописи лекций.

Часть I

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Лекция 1

Основные понятия механики управляемых систем. Физическая и математическая модели системы. Программное управление и управление при помощи обратной связи

В предлагаемом курсе излагается математическая теория управления, ограниченная системами некоторого класса, который будет определён ниже.

Современная математическая теория управления — это огромная область знаний, с одной стороны опирающаяся на ряд математических дисциплин, таких, например, как линейная алгебра, теория дифференциальных уравнений, теория случайных процессов, функциональный анализ и т.д.; с другой стороны имеющая свой собственный математический язык, свою собственную систему взглядов, понятий, теорем и т.п. Число прикладных задач, решаемых с помощью этой теории, необъятно.

Такие задачи относятся к различным сферам человеческой деятельности: авиационная и космическая техника, биология, медицина, экономика. По-видимому, теория управления — одна из самых динамичных, бурно развивающихся областей человеческого знания.

История развития теории управления увлекательна, поучительна и требует изложения в виде специальных курсов. Здесь она будет затронута более чем кратко при изложении конкретных разделов.

Выделим из огромного моря проблем, связанных с управлением, некоторый класс, который является предметом изучения в курсе «Механика управляемых систем» и будет здесь описан.

Первично для нас понятие управляемой динамической системы. Будем различать физическую модель такой системы и математическую. Физическая модель включает в себя пять элементов:

1. Управляемый объект.
Примеры таких объектов: самолет, биосреда, человеческий организм, экономическая система.
2. Цель управления.
Примеры таких целей: приведение самолета к заданному аэродрому; защита биосреды от вредных воздействий человеческой деятельности; излечение человека от какой-то болезни и т.д.
3. Измерительные устройства.
Прежде чем управлять, надо знать состояние объекта.
Примеры измерительных устройств: датчики, позволяющие определить текущие координаты самолета; измерители, определяющие состояние среды, в частности, степень загрязненности вредными примесями; сенсоры состояния человеческого организма и т.д.
4. Управляющие (исполнительные) устройства.
Примеры: рули крена, курса, тангажа на самолете; препараты, очищающие среду; лекарства.
5. Вычислитель.
Этот элемент управляемой динамической системы занимает особое положение. В нем собирается вся информация об объекте, о работе измерительных и исполнительных устройств, реализуются алгоритмы, доставляющие выходную информацию, и алгоритмы, формирующие законы управления.

Вычислитель — это устройство, с которым в наибольшей степени связана работа прикладного математика.

Блок-схема физической модели управляемой динамической системы имеет вид (рис.1.1).

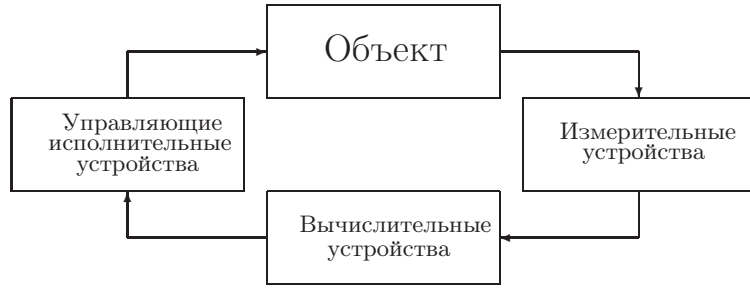


Рис. 1.1. Блок-схема управляемой системы

Хотя физическая модель управляемой системы и дает базовое представление о предмете нашего изучения, она недостаточно конструктивна из-за её неконкретности. Конструктивность вносит математическая модель управляемой системы.

Приведем в качестве примера одну из содержательных математических моделей, отражающую достаточно широкий класс прикладных задач управления движением: космический корабль должен прилуниться в заданном районе Луны. Траектория его полета состоит из нескольких участков: участок разгона и торможения, когда работают двигатели корабля, участок, когда корабль движется по баллистической траектории, участки, на которых эта траектория корректируется при помощи специальных устройств.

Траектория полета рассчитывается заранее исходя из необходимости попасть в цель и, по возможности, максимально сэкономить горючее. Организуется управление кораблем так, чтобы в идеальном случае без учета возмущений он двигался по вычисленной траектории. Такое движение будем называть программным, соответствующее управление — программным управлением.

Но из-за всякого рода возмущений и погрешностей в работе двигателя реальная траектория будет отличаться от программной. Имея в своем распоряжении измерительные устройства, определяющие местоположение корабля, и специальные корректирующие двигатели, можно организовать дополнительное управление как функцию рассогласования реального движения корабля с программным. Такое управление мы будем называть управлением с обратной связью.

Математическая модель, описывающая задачу управления подобного типа, такова: пусть управляемая динамическая система описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{y}(t) = f(y, w, t) + q(t),$$

где y — вектор состояния системы, w — управление, подлежащее выбору, q — возмущения, в том числе элемент незнания точной модели динамической системы. Для простоты здесь оно предполагается аддитивным, что не слишком ограничивает общность постановки задачи, поскольку во многих случаях аддитивности удастся добиться за счет линеаризации.

Функция f предполагается дифференцируемой по своим аргументам, управление $w(t)$ — кусочно-непрерывной функцией времени (или даже кусочно-гладкой). Значения функции $w(t)$ выбираются из некоторого ограниченного множества $\mathcal{U}$, отражающего ограниченность ресурсов управления.

Программное управление, обозначаемое далее через w^{π} , выбирается из внутренней области множества $\mathcal{U}$ в пространстве управлений ($w^{\pi} \in \text{int } \mathcal{U}$) и минимизирует некоторый функционал, отражающий ряд целей: минимизацию энергии, точность, заданность значений y в конечный момент времени, нежелательность, чтобы вектор $y(t)$ в процессе движения выходил за рамки некоторой трубки и т.д. Здесь математически этот функционал пока не описывается. Тот факт, что управление w^{π} должно выбираться из внутренней области множества $\mathcal{U}$ в пространстве управлений, отражает необходимость сохранения части резервов для организации управления с обратной связью. Функция w^{π} удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}^{\pi} = f(y^{\pi}, w^{\pi}, t),$$

где y^{π} — программное (желаемое) состояние динамической системы.

Введем вектор отклонений от желаемого движения $x(t) = y(t) - y^{\pi}(t)$. Пусть в нашем распоряжении имеются измерители, доставляющие информацию Z^{π} о текущем состоянии $y(t)$ системы:

$$Z^{\pi} = \Theta(y, t) + r(t),$$

где $r(t)$ — погрешность информации, вызванная неидеальностью работы измерителя, $\Theta(y, t)$ — известная вектор-функция. Отметим, что на практике размерность вектора Z^n заметно меньше, чем размерность вектора y .

Приведенные выше соотношения отражают переход от физического (электромеханического) описания системы (в основе которого лежит теоретическая механика, электромеханика, физиология и т.д.) к информационной модели. Этот переход является чрезвычайно важной составляющей в механике управляемых систем.

Поскольку $y^n(t)$ известная функция, можно сформировать величину:

$$z = Z^n - \Theta(y^n, t) = \Theta(y) - \Theta(y^n) + r(t) = \Theta(y^n + x) - \Theta(y^n) + r(t).$$

Предполагается, что x достаточно малая величина и допустима линеаризация — разложение функции $\Theta(y)$ в ряд Тейлора в окрестности программного движения y^n , т.е. допустимо представление:

$$\Theta(y^n + x) = \Theta(y^n) + Hx, \quad \text{где} \quad H = \left. \frac{\partial \Theta(y)}{\partial y} \right|_{y=y^n},$$

тогда

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t) \quad (1.1)$$

Введем величину $u = w - w^n$ — резерв, позволяющий формировать управление с обратной связью. Что такое «управление с обратной связью» с формальной точки зрения — будет ясно из дальнейшего.

Введем управление, которому подчиняется поведение вектора x . Для этого из уравнения

$$\dot{y}(t) = f(y^n + x, w^n + u) + q(t)$$

вычтем уравнение

$$\dot{y}^n = f(y^n, w^n).$$

Предполагается, что допустима линеаризация:

$$f(y^n + x, w^n + u) = f(y^n, w^n) + A(t)x + B(t)u + q(t),$$

где

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(y, w)}{\partial y} \right|_{\substack{y=y^n \\ w=w^n}}, \quad B(t) = \left. \frac{\partial f(y, w)}{\partial w} \right|_{\substack{y=y^n \\ w=w^n}}.$$

Таким образом

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + q(t). \quad (1.2)$$

Задача теперь сводится к следующей: отклонение текущего вектора состояния от программного (вектор x), подчиняется только что выведенному линейному уравнению. Текущую информацию, линейно зависящую от вектора x , доставляет вектор z . Требуется за счет введения управления $u = L[z]$ выбором оператора L либо минимизировать в том или ином смысле величину x , либо добиться того, чтобы отклонения x асимптотически стремились к нулю. В последнем случае можно говорить о стабилизации программного движения $y^n(t)$. Как было сказано выше, управление w формируется как комбинация программного w^n и дополнительного $u(z, t)$ управлений:

$$w = w^n + u(z, t). \quad (1.3)$$

Дополнительное управление u еще называют позиционным, поскольку оно представляет собой «управление с обратной связью», а задачу выбора L — задачей синтеза позиционного управления.

Чаще всего эту задачу решают в виде двух последовательных процедур.

Первая — построение оценки $\tilde{x} = L_1[z]$, где оператор L_1 выбирается из условия минимизации величины $\Delta x = x - \tilde{x}$.

Вторая — построение управления $u = L_2[\tilde{x}]$.

Решению указанной задачи будет посвящена половина нашего курса, соответствующая первому семестру.

Предварительно заметим, что выбор операторов L_1, L_2 определяется гипотезами о математических моделях, которыми описывается поведение возмущений $q(t)$ и $r(t)$. Чаще всего они полагаются случайными.

Блок-схема алгоритма решения задач управления приводится на рис 1.2.

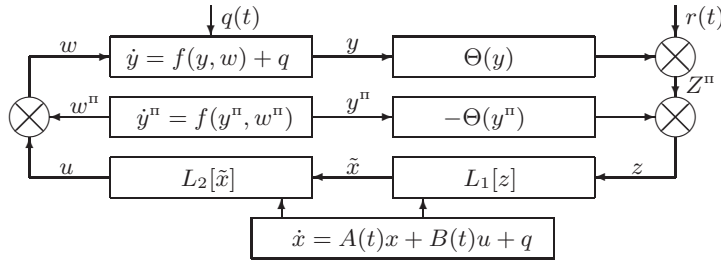


Рис. 1.2.

С прикладной точки зрения очень важно отметить, что между физической и математической моделями нет полного соответствия. Именно управления, которые формируют поведение управляемого объекта, составляют только часть управлений, формирующих поведение управляемой динамической системы. И дело здесь вот в чем: исполнительные и измерительные устройства сами могут описываться дифференциальными уравнениями, а переменные, входящие в эти уравнения, должны быть включены в состав вектора состояния y управляемой системы.

Например, исполнительные и измерительные устройства, как правило, включают в свой состав усилители сигнала. Подходящая математическая модель усилителя такова: пусть $s(t)$ — вход усилителя, $v(t)$ — его выход. Имеет место соотношение:

$$T\dot{v} + v = ks,$$

где T — постоянная времени усилителя, k — коэффициент усиления, а величина v должна быть включена в состав вектора состояния управляемой системы.

Кроме того, возмущения $q(t)$, $r(t)$, включающие в себя и инструментальные погрешности всех входящих в систему устройств, также могут описываться дифференциальными уравнениями.

Для примера опишем простейшую модель измерителя. Пусть l — измеряемая величина, l' — результат измерения. При этом

$$l' = l + \varkappa l + \varepsilon^0 + \varepsilon^s.$$

Здесь $\varkappa$ — погрешность масштаба (или мультипликативная погрешность), ε^0 — дрейф (смещение) нуля — аддитивная погрешность, ε^s — случайная высокочастотная погрешность. Часто величины $\varkappa$ и ε^0 считают постоянными, и тогда их можно описать уравнениями:

$$\dot{\varkappa} = 0, \quad \dot{\varepsilon}^0 = 0.$$

Величины $\varkappa$ и ε^0 включаются в состав вектора состояния управляемой системы. В результате этого он оказывается достаточно высокой размерности.

Заметим, что поставленная задача линейного синтеза позиционного управления не является единственно возможной. Рассмотрим еще одну задачу формирования управления w , получившую название задачи слежения.

Предположим, что имеется нестационарное желаемое движение $y^n(t)$, $t \in [t_0, \infty)$. Соответствующее основное управляющее воздействие u^n не существует или не известно, зато известно, что

$$y^n = y^*(t) + \Delta y(t),$$

где $y^n(t)$ — реализуемое стационарное движение и u^n — соответствующее управление. Тогда, воспользовавшись (1.2), (1.1) и (1.3), где $x = y - y^n$, получим следующую задачу: требуется найти такое дополнительное управляющее воздействие u , чтобы текущее отклонение отслеживало со временем разность $\Delta y(t)$:

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Delta y(t). \quad (1.4)$$

Задача линейного синтеза (1.2), (1.1), (1.3), (1.4) называется задачей слежения, а управляемая динамическая система, реализующая решение этой задачи, получила название следящей системы. Следует отметить, что данные постановки задач синтеза управляемой динамической системы, являясь простейшими, в то же время позволяют наиболее быстро войти в круг проблем механики управляемых систем. Оправданием такой методики изложения является тот факт, что линейная стратегия управления (1.3) соответствует известному в теоретической механике представлению движения, как суммы двух движений — переносного и относительного.

Лекция 2

Основные понятия: устойчивость, управляемость, наблюдаемость

При выборе исполнительных и измерительных устройств из некоторого доступного набора, а также при формировании законов управления следует руководствоваться рядом условий и требований, некоторые из которых обязательны. Первое из таких условий — при $q = 0, r = 0$, естественно потребовать, чтобы вектор x по норме $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$ был, начиная с какого-то момента времени, достаточно малой величиной. Формализация этого требования связана с понятием устойчивости, которое мы далее и сформулируем в достаточно общем виде.

Рассмотрим векторное уравнение $\dot{y} = f(y, t)$, $y \in R^n$. Пусть уравнение таково, что при $y(t_0) = y^*$ существует решение $y^*(t)$ при $t \in [t_0, \infty]$. Рассмотрим какое-то другое решение $y(t)$ с начальным условием $y(t_0)$ и образуем разность $x(t) = y(t) - y^*(t)$. Имеем:

$$\dot{x} = \varphi(x, t), \quad (2.1)$$

где $\varphi(x, t) = f(y^* + x, t) - f(y^*, t)$. Функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет очевидному условию $\varphi(0, t) \equiv 0$, т.е. $x = 0$ является тривиальным решением уравнения (2.1).

Определение 1. Тривиальное решение $x = 0$ устойчиво по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(x(t_0), t_0, \varepsilon)$, что при $\|x(t_0)\| < \delta$ величина $x(t)$ удовлетворяет условию $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

Определение 2. Невозмущенное решение $y^*(t)$ устойчиво по Ляпунову, если тривиальное решение $x(t) = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Определение 3. Решение $y^*(t)$ называется неустойчивым по Ляпунову, если не выполняются требования определения 1.

Определение 4. Решение $y^*(t)$ асимптотически устойчиво, если оно устойчиво по Ляпунову и $\|x(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $x(t_0) \in S$, где S — замкнутая выпуклая окрестность точки $x = 0$.

Определение 5. Решение $y^*(t)$ экспоненциально устойчиво, если $\|x(t)\| \leq M e^{-\alpha(t-t_0)}$, где $M > 0$, $\alpha > 0$ — некие константы.

Устойчивость по первому приближению

Рассмотрим стационарный случай. Пусть $y^* = \text{const}$ и функция f не зависит явно от времени, тогда

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad (2.2)$$

где $\varphi(0) = 0$. Разложим функцию $\varphi(x)$ в степенной ряд по x в окрестности тривиального решения и ограничимся первым (линейным) слагаемым. Будем иметь вместо (2.2) уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.3)$$

где $A = \left. \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \text{const}$.

Характеристическое уравнение системы (2.3) имеет вид:

$$\det(\lambda E - A) = 0.$$

Пусть $\text{Re } \lambda_j < 0 \forall j$, где λ_j — корни характеристического уравнения. Очевидно, что в этом случае решение уравнения (2.3) асимптотически устойчиво. Если хотя бы для одного из корней λ_j выполнено $\text{Re } \lambda_j > 0$, имеет место неустойчивость.

Теорема 1 (Об устойчивости по первому приближению. А.М. Ляпунов, 1899). Если все корни характеристического уравнения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение уравнения (2.2), а также невозмущенное решение y^* асимптотически устойчиво. Если действительная часть хотя бы одного из корней положительна, то тривиальное решение уравнения (2.2), а также решение $y^*(t)$ неустойчиво. Если корни характеристического уравнения не удовлетворяют ни одному из указанных двух условий, имеет место пограничный случай, требующий дополнительных исследований.

Здесь теорема об устойчивости по первому приближению приводится без доказательства.

Пример пограничного случая. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + x^3 = 0$. Характеристическое уравнение по первому приближению имеет нулевой корень кратности два, и решение первого приближения таково: $x(t) = C_1 + C_2 t$, т.е. неустойчиво. Решение же исходного уравнения устойчиво (не асимптотически), поскольку фазовые кривые имеют вид $\frac{x^4}{4} + \frac{\dot{x}^2}{2} = c > 0$.

Критерий Гурвица

При анализе устойчивости возникает задача определения корней характеристического уравнения матрицы A . Непосредственное вычисление корней при больших n весьма трудоемкая процедура. Кроме того, в практических задачах полезно установить зависимость корней от параметров системы. Здесь на помощь приходит критерий Гурвица. Для характеристического уравнения общего вида

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

составляется определитель Гурвица (не нарушая общности, для простоты записи ограничимся случаем $n = 4$):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Способ составления определителя очевиден. Считаем, что $a_0 > 0$. Образует угловые миноры:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 - \text{сам определитель}.$$

Критерий Гурвица. для того, чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры были положительны: $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 > 0$; $\Delta_3 > 0$; $\Delta_4 > 0$.

Следствие. Для того, чтобы все корни имели отрицательные действительные части, необходимо, чтобы все коэффициенты a_i были положительными.

При $n = 2$ условие положительности коэффициентов ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$) оказывается необходимым и достаточным для асимптотической устойчивости.

При выполнении условия Гурвица анализ динамики не заканчивается. Например, требуется, чтобы затухание переходных процессов в системе $\dot{x} = Ax$ происходило достаточно быстро, т.е. требуется, чтобы модули действительных частей корней характеристического уравнения были достаточно велики. Для выяснения условий, при которых это происходит, вводится понятие **запаса устойчивости (или степени устойчивости)**.

В уравнении $\dot{x} = Ax$ введем замену переменных: положим $y = xe^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$ — некоторое заданное число. Получим $\dot{y} = (A + \alpha E)y$. Характеристическое уравнение будет иметь вид $|\lambda E - (A + \alpha E)| = 0$. Если для этого уравнения выполняются условия Гурвица, то говорят, что уравнение $\dot{x} = Ax$ имеет запас устойчивости α . Это означает, что затухание переходных процессов в исходном уравнении относительно x происходит не медленнее, чем $e^{-\alpha t}$.

Таким образом, для определения условий, при которых система имеет запас устойчивости α , необходимо в исходном характеристическом уравнении величину λ заменить на величину $\lambda = \mu - \alpha$. Выполнение условий Гурвица для полинома относительно μ обеспечивает в системе запас устойчивости α .

В качестве примера, иллюстрирующего конструктивность понятия «запас устойчивости», рассмотрим задачу стабилизации летательного аппарата (самолета, крылатой ракеты) относительно программной траектории при условии, что информация о текущем боковом отклонении аппарата известна (она доставляется навигационной системой). Пусть $\varkappa$ — известная величина бокового отклонения. В первом приближении уравнение, определяющее поведение величины $\varkappa$, имеет вид:

$$\dot{\varkappa} + R\dot{\varkappa} = \delta + q. \quad (2.4)$$

Здесь δ — управление, подлежащее выбору; q — внешнее возмущение (ветер); R — постоянный параметр, зависящий от аэродинамики аппарата.

Обычно управление δ определяется соотношением

$$\delta = -k_0 \varkappa - k_1 \int_0^t \varkappa(\tau) d\tau.$$

Здесь k_0, k_1 — коэффициенты обратной связи. Добавление интеграла в закон обратной связи позволяет избежать установившегося остаточного отклонения при $q = \text{const} \neq 0$.

Вывод уравнения, а также более подробная мотивировка управляющего сигнала здесь не приводятся. Дифференцируя (2.4) (при постоянном q), получаем

$$\ddot{\varkappa} + R\dot{\varkappa} + k_0\varkappa + k_1\dot{\varkappa} = 0.$$

При сохранении запаса устойчивости $\alpha = \frac{R}{3}$ потребуем, чтобы корни характеристического уравнения были следующими:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{3}, \quad \lambda_{2,3} = -\frac{R}{3} \pm j\omega.$$

Характеристическое уравнение в этом случае примет вид

$$\lambda^3 + R\lambda^2 + \left(\frac{R^2}{3} + \omega^2\right)\lambda + \frac{R}{3}\left(\frac{R^2}{3^2} + \omega^2\right) = 0.$$

Отсюда $k_0 = \frac{R^2}{3} + \omega^2$, $k_1 = \frac{R}{3}\left(\frac{R^2}{3^2} + \omega^2\right)$. Исключая ω^2 , получим

$$k_1 = \frac{R}{3}k_0 - \frac{2R^3}{27}.$$

При этом $k_0 \geq \frac{R^2}{3}$.

При практическом построении алгоритма управления учитывается ряд дополнительных обстоятельств, которые здесь не рассматриваются.

Наблюдаемость и управляемость. Предварительные замечания

Будем считать, что программное движение $y^n(t)$ и соответствующее этому движению управление w^n заданы. Вопрос об определении этих величин будет рассмотрен во второй части нашего курса, а сейчас мы сосредоточим свое внимание на решении задачи управления относительно программного движения при помощи обратных связей. Считая, что приведенная выше линеаризация допустима (а это верно в подавляющем большинстве случаев), мы приходим к следующей задаче. Пусть вектор $x = y(t) - y^n(t)$ определяет рассогласование истинного движения с программным, а его поведение подчиняется уравнению:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + q(t), \quad (2.5)$$

где A и B известные матрицы, вообще говоря, зависящие от времени, величина u — управление, подлежащее выбору, а q — немоделируемое возмущение, т.е. возмущение, не имеющее адекватных математических моделей, описываемых с помощью дополнительных переменных, включенных в вектор состояния управляемого объекта.

Исходной информацией для формирования управления служит величина

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t),$$

где H — известная матрица, r — немоделируемое возмущение (немоделируемая инструментальная погрешность измерителей).

Задача состоит в определении алгоритма $u = L[z]$, где оператор L предполагается линейным.

Систему (2.5) будем называть **стабилизируемой**, если существует такой оператор $L[z]$ ($L[0] = 0$), что при $u = L[z]$ и равных нулю q и r тривиальное (нулевое) решение уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)L[H(t)x(t)] \quad (2.6)$$

асимптотически устойчиво.

Как уже говорилось, одна из интерпретаций задачи стабилизации состоит в декомпозиции на две подзадачи. Первая из них — построение при помощи измерения z оценки $\tilde{x}(t) = L_1[z]$, вторая — построение управления $u(t) = L_2[\tilde{x}]$, зависящего от оценки.

Возможность решения каждой из этих подзадач тесно связана с двумя характеристиками внутренних свойств системы — управляемостью и наблюдаемостью. К изучению результатов, связанных с указанными характеристиками, мы сейчас и приступаем. Заметим только, что соответствующая теория оказывается шире, чем просто ответ на вопрос о стабилизируемости.

Особое внимание будет уделено частному стационарному случаю (A , B и H — константы), для которого получены наиболее глубокие и конструктивные результаты.

Прежде чем излагать теорию, опирающуюся на понятия управляемости и наблюдаемости, рассмотрим два примера, поясняющих суть обсуждаемых далее вопросов.

Пример 2.1. Рассмотрим систему с управлением u

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_2 x_2(t) + u(t).\end{aligned}$$

Пусть величины x_1 и x_2 доступны измерению. Тогда управление u можно организовать в виде линейной обратной связи $u(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$. Характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + c_1 + c_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 + c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1 = 0.$$

Пусть целью управления является построение системы с заданным переходным процессом, что эквивалентно заданию характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Эта цель достигается при c_1 и c_2 , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= -a - \lambda_1 - \lambda_2, \\ \lambda_2 c_1 + \lambda_1 c_2 &= b - \lambda_1 \lambda_2.\end{aligned}$$

Решение однозначно при $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если $a > 0$, $b > 0$, то система асимптотически устойчива и, значит, стабилизируема.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ сделаем замену переменных $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$. Имеем

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= \lambda_0 y_1(t) + u(t), \\ \dot{y}_2(t) &= \lambda_0 y_2(t).\end{aligned}$$

Из полученного результата следует, что в рассматриваемом случае можно управлять переходным процессом только частично.

Заметим, что при $\lambda_0 < 0$ система стабилизируема.

Пример 2.2. Рассматривается система с измерением z

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \lambda_1 x_1(t), \quad z(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \lambda_2 x_2(t).\end{aligned}$$

Имеем $z(t) = x_{10}e^{\lambda_1 t} + x_{20}e^{\lambda_2 t}$, где $x_{10} = x_1(0)$, $x_{20} = x_2(0)$. Измерение z дает возможность при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ однозначно определить вектор $x(t)$. Для этого достаточно использовать измерения в два момента времени, например, при $t = 0$ и $t = 1$. Но если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, определяется только комбинация $x_1(t) + x_2(t)$.

Лекция 3

Понятия управляемости и наблюдаемости. Критерии управляемости и наблюдаемости

1. Понятие управляемости и критерий управляемости

Итак, рассматривается система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (3.1)$$

где A и B известные матричные функции времени, u — управление, подлежащее выбору. Как правило, $\dim u < \dim x$.

Определение 6. Система (3.1) называется *вполне управляемой* в момент времени t_0 , если существуют такое $t > t_0$ и ограниченное управление $u(\tau)$, где $t_0 \leq \tau \leq t$, которые переводят систему из состояния $x(t_0) = \xi$ в любое наперед заданное состояние $x(t) = \zeta$.

Напомним, что решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (3.2)$$

где $\Phi(t, t_0)$ — известная переходная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E. \quad (3.3)$$

Введем вектор $\eta = \zeta - \Phi(t, t_0)\xi$, тогда перевод системы из состояния ξ в состояние ζ эквивалентен существованию конечного управления $u(\tau)$, удовлетворяющего соотношению:

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \eta.$$

Отсюда следует эквивалентное определение управляемости: *система (3.1) вполне управляема в момент t_0 , если существуют такой момент t и конечное управление $u(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, которое переводит систему из нулевого состояния $x(t_0) = 0$ в любое наперед заданное состояние $x(t) = \eta$.*

В определении присутствует слово «вполне». Оно введено для того, чтобы отличить качество системы от организации системы, т.е. того, что в систему введено управление, и система управляема.

При общении специалистов такие тонкости не учитываются и слово «вполне» опускается, что никогда не приводит к недоразумению.

Поскольку свойство управляемости целиком определяется свойством пары (A, B) , то вместо того, чтобы сказать, что система (3.1) вполне управляема, говорят, что управляема пара (A, B) .

Критерий управляемости в общем случае

Введем матрицу:

$$\mathcal{W}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)B^\top(\tau)\Phi^\top(t, \tau)d\tau,$$

которую будем называть *грамианом управляемости*. Очевидно, $\mathcal{W}(t, t_0)$ — симметрическая матрица, которая задает неотрицательно определенную квадратичную форму $\lambda^T \mathcal{W} \lambda \geq 0$ для $\forall \lambda$.

Теорема 2 (Р. Калман, 1962). *Для управляемости пары (A, B) в момент t_0 необходимо и достаточно, чтобы нашелся момент $t > t_0$ такой, что $\det \mathcal{W}(t, t_0) \neq 0$, т.е. $\mathcal{W}(t, t_0) > 0$.*

Доказательство.

Достаточность. Пусть $\det \mathcal{W}(t, t_0) \neq 0$. Сформируем управление

$$u(\tau) = B^\top(\tau)\Phi^\top(t, \tau)\mathcal{W}^{-1}(t, t_0)\eta.$$

Подставляя в формулу (3.2) можно убедиться, что это управление переводит систему из нулевого состояния $x(t_0) = 0$ в состояние $x(t) = \eta$.

Необходимость. Пусть система управляема, но $\det \mathcal{W}(t, t_0) = 0$. Тогда найдется такой вектор $\eta \neq 0$, что $\eta^\top \mathcal{W} \eta = 0$. Раскрывая последнее равенство, получим

$$\int_{t_0}^t \eta^\top \Phi(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) \Phi^\top(t, \tau) \eta d\tau = 0,$$

или $\eta^\top \Phi(t, \tau) B(\tau) \equiv 0$ при любом $\tau \in [t_0, t]$.

С другой стороны, в силу управляемости существует управление u , переводящее систему из нулевого состояния в состояние η в момент времени t . Но тогда

$$\eta^\top \eta = \eta^\top \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = 0,$$

что противоречит первоначальному условию $\eta \neq 0$. Теорема доказана. Замети, что теорема 2 допускает эквивалентную формулировку:

Теорема 3. Для управляемости пары (A, B) в момент t_0 необходимо и достаточно, чтобы нашлся момент t такой, для которого уравнение относительно η

$$\eta^\top \Phi(t, \tau) B(\tau) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

имело бы при всех τ единственное тривиальное решение.

Рассмотрим теперь стационарный случай, когда матрицы A и B не зависят от времени. Напомним, что в этом случае переходная матрица $\Phi(t, t_0)$ может быть записана в виде разложения

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = E + A(t-t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots$$

Перейдем к доказательству теоремы 3. Уравнение

$$\eta^\top \Phi(t, \tau) B = 0$$

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \eta^\top \left[E + A(t-\tau) + A^2 \frac{(t-\tau)^2}{2} + \dots + A^{n-1} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} + \right. \\ \left. + A^n \frac{(t-\tau)^n}{n!} + \dots \right] B = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу того, что функции $1, (t-\tau), (t-\tau)^2, \dots$ линейно независимы, уравнение (3.4) эквивалентно следующей бесконечной системе уравнений:

$$\begin{aligned} \eta^\top B &= 0, \\ \eta^\top AB &= 0, \\ \eta^\top A^2 B &= 0, \\ &\dots \\ \eta^\top A^{n-1} B &= 0, \\ \eta^\top A^n B &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Напомним хорошо известную теорему Гамильтона-Кэли, согласно которой матрица A удовлетворяет своему собственному характеристическому уравнению. Пусть характеристическое уравнение матрицы A таково:

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Тогда

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n E = 0,$$

т.е. матрица A^n является линейной комбинацией младших степеней матрицы A . Но легко видеть, что матрицы A^{n+1}, A^{n+2} и т.д. также являются линейными комбинациями тех же степеней матрицы A .

Отсюда следует, что бесконечная система алгебраических уравнений (3.5) равносильна конечной системе уравнений:

$$\begin{aligned}\eta^\top B &= 0, \\ \eta^\top AB &= 0, \\ \eta^\top A^2 B &= 0, \\ &\dots \\ \eta^\top A^{n-1} B &= 0.\end{aligned}$$

Для того, чтобы эта система имела единственное тривиальное решение относительно составляющих вектора η , необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся размерности вектора η , т.е. n .

Таким образом, доказана теорема:

Теорема 4. *Для того, чтобы стационарная пара (A, B) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } W = n$, где*

$$W = (B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B).$$

Матрица W называется матрицей управляемости.

2. Понятие наблюдаемости и критерий наблюдаемости

Рассматривается система

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ z(\tau) &= H(\tau)x(\tau), \quad \tau \in [t_0, t].\end{aligned}\tag{3.6}$$

Определение 7. Система (3.6) называется вполне наблюдаемой в момент t , если существует момент t_0 такой, что можно определить состояние системы $x(t)$ из наблюдений выходной функции $z(\tau)$ на отрезке $t_0 \leq \tau \leq t$ ($t_0 < t$).

Поскольку управление u в (3.6) — известная функция, возможность определения $x(t)$ при помощи $z(\tau)$ та же, что и для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t), \\ z(\tau) &= H(\tau)x(\tau), \quad \tau \in [t_0, t].\end{aligned}\tag{3.7}$$

Размерность вектора z как правило меньше размерности x , и знание z в некоторый фиксированный момент τ не дает достаточной информации для восстановления вектора состояния $x(\tau)$. Поэтому для решения задачи определения $x(t)$ требуется учитывать имеющуюся в нашем распоряжении информацию о векторе $z(\tau)$ на всем интервале $t_0 \leq \tau \leq t$.

Замечание 1. По поводу слова «вполне» в определении наблюдаемости можно сказать то же, что говорилось по поводу определения управляемости. Далее это слово мы будем опускать. Поскольку наблюдаемость есть внутреннее свойство системы (3.7), полностью определяемой матрицами A и H , то далее будем также говорить о наблюдаемости пары (A, H) .

Сформулируем критерий наблюдаемости. Образует симметрическую матрицу

$$\mathcal{N}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t) H^\top(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau.$$

Здесь $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица системы. Матрицу $\mathcal{N}(t, t_0)$ будем называть **грамианом наблюдаемости**.

Теорема 5 (Р. Калман, 1962). *Для наблюдаемости пары (A, H) в момент времени t необходимо и достаточно, чтобы нашелся момент $t_0 < t$ такой, что $\det \mathcal{N}(t, t_0) \neq 0$, т.е. $\mathcal{N}(t, t_0) > 0$.*

Доказательство. Выведем критерий наблюдаемости в общем (нестационарном) случае $A \neq \text{const}$, $H \neq \text{const}$. Доказательство теоремы можно провести аналогично доказательству теоремы 2 (смотрите предыдущий параграф). Но здесь мы пойдем по другому пути, используя возможность продемонстрировать метод наименьших квадратов, к которому мы будем обращаться в последующих лекциях.

Рассмотрим уравнения (3.7). Зафиксируем некоторый момент t_0 как начальный. Для определения $x(t)$ имеем уравнение

$$z(\tau) = H(\tau)\Phi(\tau, t)x(t), \quad (3.8)$$

которое должно удовлетворяться для всякого τ из интервала $[t_0, t]$.

Достаточность. Попробуем построить конкретный алгоритм определения $x(t)$ из уравнения на интервале $[t_0, t]$. Выберем в качестве пробной некоторую величину $x(t)$. Для произвольного момента $\tau \in [t_0, t]$ это пробное $x(t)$ не обязательно удовлетворяет уравнению (3.8), тогда имеется рассогласование (невязка)

$$\Delta z(\tau) = z(\tau) - H(\tau)\Phi(\tau, t)x(t).$$

Естественно потребовать, чтобы пробное решение $x(t)$ минимизировало в некотором смысле совокупность всех невязок на интервале $[t_0, t]$. Мерой невязки может служить следующий функционал

$$J[x] = \int_{t_0}^t \|\Delta z(\tau)\|^2 d\tau = \int_{t_0}^t \Delta z^\top(\tau) \Delta z(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Так как ограничения на x отсутствуют, и функционал (3.9) является квадратичным, то оптимальное решение $x(t)$ выбирается из условия

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

которое приводит при $\det \mathcal{N} \neq 0$ к решению

$$x(t) = \mathcal{N}^{-1}(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t) H^\top(\tau) z(\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Полученное нами решение является точным. Это следует из прямой подстановки выражения (3.8) в выражение (3.11). Отсюда также следует, что наш функционал на решении (3.11) обращается в ноль:

$$J = 0.$$

Необходимость. Предположим, что система наблюдаема, т.е. существует единственное решение уравнения (3.8)

$$z(\tau) = H(\tau)\Phi(\tau, t)x(t), \quad \tau \in [t_0, t].$$

Пусть матрица $\mathcal{N}(t, t_0)$ не является положительно определенной, т.е. для некоторого $x = x(t)$

$$x^\top \mathcal{N}(t, t_0) x = 0, \quad (3.12)$$

и этому x отвечает свое измерение $z(\tau)$ в соответствии с соотношением (3.8). Из (3.12) следует

$$x^\top \left[\int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t) H^\top(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right] x = \int_{t_0}^t z^\top(\tau) z(\tau) d\tau = 0,$$

или $z(\tau) \equiv 0$ для всех $\tau \in [t_0, t]$. Следовательно, для рассматриваемой системы существует решение $x(t)$, которое невозможно отличить от нулевого, что противоречит условию о наблюдаемости.

Замечание 2. Вместо уравнения (3.8), определяющего $x(t)$, можно рассматривать уравнение для определения $x(t_0) = x_0$

$$z(\tau) = H(\tau)\Phi(\tau, t_0)x(t_0), \quad t_0 \leq \tau \leq t.$$

Эквивалентный грамиан наблюдаемости выглядит так

$$\mathcal{N}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t_0) H^\top(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau. \quad (3.13)$$

Рассмотрим теперь стационарный случай $A = \text{const}$, $B = \text{const}$. Критерий наблюдаемости для стационарной системы формулируется следующим образом.

Теорема 6. Для наблюдаемости стационарной пары (A, H) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\text{rank } N = n, \quad N = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицу N назовем **матрицей наблюдаемости**.

Последний критерий поясним рассуждениями, которые, по-существу, представляют вариант его вывода.

Аналитическая функция $z(t)$ однозначно определяется значениями этой функции и всех ее производных в некоторый момент t . В силу уравнения (3.7) получим в этот момент

$$z(t) = Hx(t), \quad \dot{z}(t) = HAx(t), \dots, z^{(n-1)}(t) = HA^{n-1}x(t). \quad (3.14)$$

Но все последующие производные z в силу теоремы Гамильтона - Кэли являются линейными комбинациями величины z и ее первых $n-1$ производных, и поэтому не несут в себе новой информации о векторе x . Таким образом, возможность определения вектора x по измерениям $z(\tau), \tau \in [t_0, \infty)$ эквивалентна возможностям, содержащимся в системе (3.14).

Но для того, чтобы система (3.14) имела однозначное решение $x(t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } N = n$.

Приведем некоторые полезные на практике факты, связанные с понятием управляемости и наблюдаемости. В уравнениях (3.6) перейдем к новой переменной

$$\xi = Cx,$$

где C — постоянная квадратная невырожденная матрица. Уравнения относительно ξ имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= CAC^{-1}\xi + CBu, \\ z &= HC^{-1}\xi. \end{aligned}$$

Обозначим

$$A_c = CAC^{-1}, \quad B_c = CB, \quad H_c = HC^{-1}.$$

Имеет место следующее свойство: из управляемости пары (A, B) и наблюдаемости пары (A, H) следует управляемость пары (A_c, B_c) и наблюдаемость пары (A_c, H_c) , и наоборот, то есть свойства управляемости и наблюдаемости инвариантны к невырожденному преобразованию вектора состояния. Доказательство здесь не приводится.

Сформулируем еще одну методически важную теорему о сопряженности задач управления и наблюдения.

Рассмотрим две линейные динамические системы, сопряженные друг другу.

Система I:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ z &= Hx. \end{aligned}$$

Система II:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -A^\top \xi + H^\top v, \\ \varsigma &= B^\top \xi. \end{aligned}$$

Теорема 7 (О сопряженности понятий управляемости и наблюдаемости). *Система II вполне управляема, если и только если вполне наблюдаема система I. Система II вполне наблюдаема, если и только если вполне управляема система I.*

Справедливость утверждения следует из сравнения соответствующих грамианов управляемости и наблюдаемости.

Но понятие сопряженности существенно шире, чем содержание только что сформулированной теоремы. А именно, все результаты, связанные с одной из характеристик, переносятся сопряженным образом на другую характеристику. Последующее изложение подтверждает сказанное.

Лекция 4

Контравариантные и ковариантные координаты, алгоритмы управления с заданными свойствами переходных процессов

Обсудим теперь две задачи.

Первая из них — пусть стационарная система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ z &= Hx,\end{aligned}$$

вполне управляема, т.е. вполне управляема пара (A, B) . Как строить алгоритм управления (или более узко — алгоритм стабилизации)? Один из таких алгоритмов, равно пригодный как для нестационарных, так и для стационарных систем, был рассмотрен при доказательстве теоремы 2 предыдущей лекции. Будет показано, что по крайней мере в стационарном случае более приемлем алгоритм в виде линейной обратной связи.

Вторая задача — построение алгоритмов, доставляющих оценку вектора состояния, если пара (A, H) вполне наблюдаема. Один из таких алгоритмов был рассмотрен при доказательстве теоремы 3. Но более удобным и выгодным со многих точек зрения оказывается динамический алгоритм оценивания. Он находит в настоящее время самое широкое применение в разнообразных конкретных системах управления.

Одно из эффективных средств решения поставленной задачи — выбор подходящего вектора состояния (вектора фазовых координат), связанного с первоначальным вектором невырожденным линейным преобразованием, т.е. выбор подходящего базиса, в котором решение задачи было бы очевидным.

Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — инвариантные обозначения векторов, не привязанные к какому-либо базису.

Как известно, задаваясь базисом $\{\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n\}$ в пространстве состояния, произвольный вектор $\bar{x}$ можно определить двояким образом: во-первых, представить его в форме разложения по базисным векторам

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^n x_j^+ \bar{e}^j, \quad (4.1)$$

и, во-вторых, задать n скалярных произведений

$$x_j^- = (\bar{x}, \bar{e}^j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Величины x_j^+ называются контравариантными координатами, величины x_j^- — ковариантными координатами. Соответственно, вводятся два вектора-столбца

$$x^+ = (x_1^+ \dots x_n^+)^T, \quad x^- = (x_1^- \dots x_n^-)^T. \quad (4.3)$$

Если базис ортонормированный, то $x^+ = x^-$. Столбец x в уравнении (4.2) интерпретируется как столбец, составленный из координат вектора x в ортонормированном базисе $\{\bar{e}^j\}$, при этом сами векторы $\bar{e}^j$ представляются в этом базисе как единичные столбцы $e^j = (0 \dots 1 \dots 0)^T$.

Введем новый базис $\{\bar{g}^1, \dots, \bar{g}^n\}$ и будем использовать представление векторов $\bar{g}^j$ в виде столбцов g^j , составленных из координат векторов $\bar{g}^j$ в базисе $\{\bar{e}^j\}$. Столбцы g^j образуют матрицу G

$$G = (g^1 \dots g^n). \quad (4.4)$$

Обозначим через ξ^+ и ξ^- столбцы, составленные из контравариантных и ковариантных координат вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{g}^1, \dots, \bar{g}^n\}$

$$x = \xi_1^+ g^1 + \xi_2^+ g^2 + \dots + \xi_n^+ g^n = (g^1, g^2, \dots, g^n) \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \\ \vdots \\ \xi_n^+ \end{pmatrix} = G \xi^+.$$

$$\begin{aligned}\xi_1^- &= x^T g^1 = g^{1T} x, \\ \xi_2^- &= x^T g^2 = g^{2T} x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ \xi_n^- &= x^\top g^n = g^{n\top} x. \end{aligned}$$

Или

$$\xi^- = \begin{pmatrix} g^{1\top} \\ g^{2\top} \\ \vdots \\ g^{n\top} \end{pmatrix} x = G^\top x.$$

Отсюда, кстати, следует $\xi^- = G^\top G \xi^+$.

Как будет показано далее, в стационарной задаче управления при переходе к новому базису координаты целесообразно понимать как контравариантные, что позволяет решить ее наиболее экономным и наглядным образом. Стационарной задаче наблюдения в той или иной постановке соответствуют ковариантные координаты. Такая двойственность в выборе координат вытекает из взаимной сопряженности задач управления и наблюдения.

Далее напомним некоторые факты из линейной алгебры, которые будут использованы в дальнейшем.

Рассмотрим произвольный вектор-столбец $f(n \times 1)$ и произвольную квадратную матрицу $A(n \times n)$. Образует последовательность векторов

$$g^1 = f, g^2 = Ag^1, \dots, g^{j+1} = Ag^j, \dots \quad (4.5)$$

Пусть первый вектор последовательности $\{g^j\}$, линейно зависимый от предыдущих, есть g^{k+1}

$$g^{k+1} = \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_k g^k, \quad k \leq n. \quad (4.6)$$

Тогда все последующие векторы последовательности $\{g^j\}$ также являются однозначными линейными комбинациями первых k векторов. Доказательство — по индукции.

Отсюда следует, что подпространство, натянутое на векторы g^j , k -мерно и набор векторов $\{g^1, \dots, g^k\}$ служит базисом этого подпространства.

Если $k = n$, то набор векторов $\{g^1, \dots, g^n\}$ служит базисом полного пространства

$$g^{n+1} = \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_n g^n. \quad (4.7)$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы A

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Как уже говорилось, по теореме Гамильтона-Кэли любая матрица удовлетворяет собственному характеристическому уравнению

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n E = 0.$$

Последнее соотношение умножим справа на вектор $g^1 = f$, тогда получим

$$g^{n+1} + a_1 g^n + \dots + a_n g^1 = 0. \quad (4.8)$$

Из сравнения (4.7) и (4.8), а также из единственности разложения любого вектора по базисным следует

$$\alpha_1 = -a_n, \dots, \alpha_n = -a_1,$$

т.е. характеристическое уравнение матрицы A можно записать также в виде

$$\lambda^n = \alpha_1 + \alpha_2 \lambda + \dots + \alpha_n \lambda^{n-1}.$$

Далее будут сформулированы теоремы, которые служат основой построения алгоритмов управления и оценивания в случаях вполне управляемых и вполне наблюдаемых систем.

Теорема 8. Пусть стационарная пара $(A(n \times n), B(n \times m))$ управляема и доступны измерению все составляющие вектора состояния x . Тогда существует такая постоянная матрица $C(m \times n)$, что управление в виде обратной связи $u = Cx$ обеспечивает экспоненциальную устойчивость системы $\dot{x} = Ax + Bu$.

Более полная формулировка: если пара (A, B) управляема, то выбором матрицы C можно обеспечить любые наперед заданные коэффициенты характеристического полинома $|\lambda E - (A + BC)|$.

В системе с одним входом

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad b(n \times 1), u(1 \times 1), \quad (4.9)$$

задание характеристического полинома однозначно определяет вектор $c(n \times 1)$ такой, что $u = c^\top x$. В системах со многими входами такой однозначности, вообще говоря, нет.

Докажем теорему 8 применительно к системе с одним входом. Полное доказательство для случая, когда u – вектор, содержится в дополнении к лекциям 5–7. Введем векторы $g^1 = b$, $g^2 = Ag^1, \dots, g^{j+1} = Ag^j, \dots$. Матрица управляемости W представляется в виде $W = (g^1, \dots, g^n)$.

Пусть пара (A, B) управляема. Тогда набор $\{g^1, \dots, g^n\}$ может служить базисом. Имеет место единственное представление

$$g^{n+1} = \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_n g^n, \quad (4.10)$$

где α_j – коэффициенты характеристического уравнения

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - \alpha_1 - \alpha_2 \lambda - \dots - \alpha_n \lambda^{n-1} = 0.$$

Покажем, что существует базис $\{f^1, \dots, f^n\}$, в котором контравариантное представление вектора x

$$x = \xi_1 f^1 + \dots + \xi_n f^n \quad (4.11)$$

описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= \xi_n, \\ \dot{\xi}_n &= \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n + u. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Согласно (4.9) имеем

$$\dot{\xi}_1 f^1 + \dots + \dot{\xi}_n f^n = \xi_1 A f^1 + \dots + \xi_n A f^n + g^1 u.$$

Или, с учетом (4.12),

$$\xi_2 f^1 + \dots + \xi_n f^{n-1} + (\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n + u) f^n = \xi_1 A f^1 + \dots + \xi_n A f^n + g^1 u.$$

Приравнявая векторные коэффициенты последовательно при $u, \xi_n, \xi_{n-1}, \dots$, получим

$$\begin{aligned} f^n &= g^1, \\ f^{n-1} + \alpha_n f^n &= A f^n \Rightarrow f^{n-1} = g^2 - \alpha_n g^1, \\ f^{n-2} + \alpha_{n-1} f^n &= A f^{n-1} \Rightarrow f^{n-2} = g^3 - \alpha_n g^2 - \alpha_{n-1} g^1, \\ &\dots \\ f^1 + \alpha_2 f^n &= A f^2 \Rightarrow f^1 = g^n - \alpha_n g^{n-1} - \dots - \alpha_2 g^1, \\ \alpha_1 f^n &= A f^1. \end{aligned}$$

Соотношение $\alpha_1 f^n = A f^1$ выполняется в силу (4.10). Из линейной независимости набора $\{g^1, \dots, g^n\}$ следует также линейная независимость набора $\{f^1, \dots, f^n\}$, т.е. $\det F \neq 0$, где $F = (f^1 \dots f^n)$. Соотношения (4.12) влекут за собой возможность описания скалярной величины ξ_1 одним дифференциальным уравнением n -го порядка

$$\xi_1^{(n)} + a_1 \xi_1^{(n-1)} + \dots + a_n \xi_1 = u, \quad (4.13)$$

где $a_1 = -\alpha_n, \dots, a_n = -\alpha_1$.

Представление (4.12) называют иногда канонической формой по управлению системы с одним входом.

Замечание 3. Найденное преобразование $x = F\xi$ можно представить в форме $F = WP$, где

$$P = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если измеряются все компоненты вектора состояния x , то может быть определен вектор $\xi = F^{-1}x$. Сформируем управление u в виде линейной обратной связи $u = c_1 \xi_1 + \dots + c_n \xi_n = c^\top \xi$. Характеристическое уравнение системы (4.12) при таком управлении будет иметь вид

$$\lambda^n = (\alpha_1 + c_1) + (\alpha_2 + c_2)\lambda + \dots + (\alpha_n + c_n)\lambda^{n-1}. \quad (4.14)$$

Поскольку выбор вектора s в нашей власти, коэффициенты этого уравнения могут быть любыми наперед заданными. Но характеристические уравнения — инвариант по отношению к невырожденному преобразованию координат, поэтому такими же будут и коэффициенты исходного характеристического уравнения.

Экспоненциальная устойчивость достигается выбором s , обеспечивающим отрицательность действительных частей корней характеристического полинома. Теорема доказана.

Замечание 4. Для того, чтобы выбрать во вполне управляемой системе коэффициенты обратной связи, обеспечивающие желаемое характеристическое уравнение, приводить уравнения системы к виду (4.12) нет необходимости. Такой выбор легко осуществим в первоначальной форме.

Замечание 5. В «рафинированной» постановке задачи стабилизации (при отсутствии постоянно действующих на систему возмущений), которая только что рассмотрена, выбор степени затухания переходных процессов в системе ничем не ограничен, и приведение вектора состояния в нулевое положение может быть осуществлено за любое сколь угодно малое время. Но решение реальных задач стабилизации существенно осложняется, по крайней мере, по двум причинам:

- из-за ограничений мощности исполнительных механизмов,
- из-за неизвестных возмущений, действующих на динамическую систему, и инструментальных погрешностей измерителей, доставляющих информацию о векторах.

К тому же эта информация, как правило, не является полной, т.е. доступны измерению только некоторые составляющие вектора состояния. В этих условиях управление при помощи обратной связи имеет неоспоримые преимущества по сравнению с программным управлением.

Лекция 5

Асимптотические алгоритмы оценивания. Управление по оценке

1. Асимптотически устойчивый алгоритм оценивания

Обсудим теперь вопрос об алгоритмах, доставляющих оценку $\tilde{x}$ вектора x . Ранее при выводе критерия наблюдаемости один из возможных алгоритмов оценивания был получен, но на практике используется иной алгоритм, аналогичный алгоритму управления при помощи линейной обратной связи. К построению такого алгоритма мы и перейдем.

Рассмотрим следующий алгоритм оценивания

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + K(z(t) - H\tilde{x}(t)) + Bu(t), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0. \quad (5.1)$$

Здесь матрица усиления K подлежит определению.

Уравнение относительно рассогласования $\Delta x = x - \tilde{x}$ назовем уравнением ошибок. В нашем случае оно имеет вид

$$\Delta \dot{x}(t) = (A - KH)\Delta x(t), \quad \Delta x(t_0) = x_0 - \tilde{x}_0. \quad (5.2)$$

Обратим внимание на важное свойство алгоритма (5.1), называемое свойством несмещенности. Оно означает, что ошибка оценки $\Delta x \equiv 0$, если вся используемая для оценки информация точна (в нашем случае, если $\Delta x(t_0) = 0$).

Теорема 9. Пусть стационарная пара (A, H) наблюдаема. Тогда существует такая постоянная матрица усиления K , что уравнение ошибок (5.2), соответствующее алгоритму оценивания (5.1), оказывается асимптотически устойчивым.

Более полная формулировка: если стационарная пара (A, H) наблюдаема, то выбором матрицы K можно обеспечить любые наперед заданные коэффициенты характеристического полинома $|\lambda E - (A - KH)|$.

В системах с одним выходом

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad z(t) = h^\top x(t), \quad h(n \times 1), \quad z(1 \times 1) \quad (5.3)$$

задание характеристического полинома однозначно определяет вектор $K(n \times 1)$.

В системах с несколькими выходами такой однозначности, вообще говоря, нет.

Докажем теорему применительно к системам с одним выходом. Общий случай рассмотрен в дополнении к лекциям 5–7. При доказательстве, без потери общности, будем полагать $B = 0$.

Матрица наблюдаемости N в нашем случае имеет вид

$$N^\top = (g^1, \dots, g^n), \quad \det N \neq 0,$$

где $g^1 = h$, $g^2 = A^\top g^1, \dots, g^{j+1} = A^\top g^j, \dots$, причем

$$g^{n+1} = \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_n g^n. \quad (5.4)$$

Покажем, что существует такой базис $\{f^1, \dots, f^n\}$, в котором ковариантные координаты вектора x $\xi_1 = x^\top f^1, \xi_2 = x^\top f^2, \dots, \xi_n = x^\top f^n$ подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \alpha_n \xi_1 + \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \alpha_{n-1} \xi_1 + \xi_3, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= \alpha_1 \xi_1, \\ z &= \xi_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из предыдущих уравнений последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x^\top g^1 = x^\top f^1, \\ \xi_2 &= \dot{\xi}_1 - \alpha_n \xi_1 = x^\top (g^2 - \alpha_n g^1) = x^\top f^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\xi_n = x^\top (g^n - \alpha_n g^{n-1} - \dots - \alpha_2 g^1) = x^\top f^n.$$

Уравнение $\dot{\xi}_n = \alpha_1 \xi_1$ удовлетворяется в силу соотношения (5.4). Отсюда следует, что набор $\{f^1, \dots, f^n\}$ составляет базис.

Динамический алгоритм оценивания имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \alpha_n \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + k_1(z - \tilde{\xi}_1), \\ \dot{\xi}_2 &= \alpha_{n-1} \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_3 + k_2(z - \tilde{\xi}_1), \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= \alpha_1 \tilde{\xi}_1 + k_n(z - \tilde{\xi}_1).\end{aligned}\tag{5.6}$$

Уравнения ошибок

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\xi}_1 &= (\alpha_n - k_1) \Delta \xi_1 + \Delta \xi_2, \\ \Delta \dot{\xi}_2 &= (\alpha_{n-1} - k_2) \Delta \xi_1 + \Delta \xi_3, \\ &\vdots \\ \Delta \dot{\xi}_n &= (\alpha_1 - k_n) \Delta \xi_1.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Характеристическое уравнение для (5.7) таково

$$\lambda^n = (\alpha_1 - k_n) + (\alpha_2 - k_{n-1})\lambda + \dots + (\alpha_n - k_1)\lambda^{n-1}.$$

Поскольку выбор k_j в наших руках, мы можем сделать коэффициенты этого уравнения любыми наперед заданными.

Представление (5.5) называют иногда канонической формой по наблюдению системы с одним выходом.

Заметим, что при построении алгоритма оценивания нет необходимости приводить систему (5.3) к каноническому виду.

Пример 5.1.

$$\ddot{\eta} + \eta = 0, \quad z = \dot{\eta} + r,$$

где r — постоянная ошибка измерения.

Запишем уравнения в форме Коши. Положим

$$\eta = x_1, \dot{\eta} = x_2, r = x_3,$$

тогда

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1, \\ \dot{x}_3 &= 0, \\ z &= x_2 + x_3\end{aligned}$$

Легко убедиться в наблюдаемости системы. Алгоритм оценивания

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + k_1(z - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= -\tilde{x}_1 + k_2(z - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3), \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= k_3(z - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3).\end{aligned}$$

Уравнение ошибок

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= (1 - k_1) \Delta x_2 - k_1 \Delta x_3, \\ \Delta \dot{x}_2 &= -\Delta x_1 - k_2 \Delta x_2 - k_2 \Delta x_3, \\ \Delta \dot{x}_3 &= -k_3 \Delta x_2 - k_3 \Delta x_3.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + (k_2 + k_3)\lambda^2 + (1 - k_1)\lambda + k_3 = 0.$$

Пусть желаемое характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda + 1)^3 = 0$. Из сравнения находим

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = 1.$$

Такой выбор k_j обеспечивает асимптотическую устойчивость ($\Delta x_j \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Пример показывает, что решение задачи оценивания в некоторых случаях может быть точно при неточных измерениях, если известна структура инструментальных погрешностей.

Замечание 6. Высказанные в замечании 4 соображения, касающиеся выбора коэффициентов обратной связи в задаче стабилизации, в равной степени относятся и к выбору матрицы усиления K в алгоритме оценивания.

2. Стабилизация вполне управляемой и вполне наблюдаемой стационарной линейной системы

Предшествующие результаты позволяют решить задачу стабилизации стационарной системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad z(\tau) = Hx(\tau), \quad \tau \in [t_0, t] \quad (5.8)$$

в идеальном случае, когда пара (A, B) управляема, а пара (A, H) — наблюдаема.

Состояние вектора x в начальный момент неизвестно, а измеряется только величина z , размерность которой меньше размерности вектора x . Такая задача иногда называется задачей стабилизации с неполной информацией о векторе состояния.

Первый напрашивающийся вариант решения — введение обратной связи по измерению $u = Cz$. Но в уравнении $\dot{x} = (A + BCH)x$ обеспечить асимптотическую устойчивость за счет выбора матрицы C в общем случае нельзя.

Следующий шаг — введение обратной связи вида

$$u = c_1 z + c_2 \int_{t_0}^t z d\tau + \dots + c_s \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t z d\tau_1 \dots d\tau_s,$$

или более сложного по структуре сигнала с введением внутренних обратных связей в контур формирования управляющего сигнала с целью подбора параметров управления (в данном случае $c_1, \dots, c_s$), обеспечивающих асимптотическую устойчивость.

Но в нашем случае существует универсальная возможность сформировать линейную обратную связь по оценке, доставляемой динамическим алгоритмом

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + K(z(t) - H\tilde{x}(t)) + Bu(t).$$

Уравнение ошибок имеет вид

$$\Delta\dot{x}(t) = (A - KH)\Delta x(t), \quad (5.9)$$

где матричный параметр K можно выбрать так, чтобы имела место экспоненциальная устойчивость с любой наперед заданной степенью.

Введем обратную связь $u(t) = C\tilde{x}(t)$. Тогда исходное уравнение можно записать

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BC\tilde{x}(t),$$

или, с заменой $\tilde{x} = x - \Delta x$,

$$\dot{x}(t) = (A + BC)x(t) - BC\Delta x(t). \quad (5.10)$$

Характеристическое уравнение совокупной системы уравнений (5.9), (5.10) таково

$$\begin{vmatrix} \lambda E_n - (A + BC) & BC \\ 0 & \lambda E_n - (A - KH) \end{vmatrix} = 0.$$

Оно распадается на два

$$|\lambda E_n - (A + BC)| = 0, \quad |\lambda E_n - (A - KH)| = 0.$$

В силу управляемости пары (A, B) матричный параметр C можно выбрать так, чтобы корни соответствующего уравнения имели отрицательные действительные части.

Следствием вышеизложенного служит теорема о достаточных условиях стабилизируемости.

Теорема 10. Пусть в стационарной линейной системе (5.8) пара (A, B) управляема, а пара (A, H) — наблюдаема. Тогда система (5.8) стабилизируема.

Пример 5.2. Стабилизация математического маятника относительно неустойчивого положения равновесия.

Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\alpha} - \omega^2 \sin \alpha = u,$$

где u — нормированный управляющий момент.

В данном случае желаемое состояние $\alpha^* = \dot{\alpha}^* = 0$. Пусть измеряется угол α : $z = \alpha$. Имеем уравнения в линейном приближении:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \omega^2 x_1 + u, \\ z &= x_1.\end{aligned}$$

Алгоритм оценивания

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + k_1(z - \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \omega^2 \tilde{x}_1 + k_2(z - \tilde{x}_1) + u.\end{aligned}$$

Уравнения ошибок оценки

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x}_1 &= -k_1 \Delta x_1 + \Delta x_2, \\ \Delta \dot{x}_2 &= (\omega^2 - k_2) \Delta x_1.\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda + k_1 & -1 \\ -\omega^2 + k_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_1 \lambda + (k_2 - \omega^2) = 0.$$

Выберем k_1 и k_2 из условия асимптотической устойчивости уравнений ошибок оценки: $k_1 > 0$, $k_2 - \omega^2 > 0$.

Алгоритм управления

$$\begin{aligned}u &= c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2, \\ \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega^2 x_1 + c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2,\end{aligned}$$

где $\tilde{x}_1 = x_1 - \Delta x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2 - \Delta x_2$. Характеристическое уравнение собственно управляемой системы

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -(\omega^2 + c_1) & \lambda - c_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - c_2 \lambda - (\omega^2 + c_1) = 0.$$

Выберем c_1 , c_2 из условия, чтобы корни этого уравнения имели отрицательные действительные части

$$c_2 < 0, \quad c_1 + \omega^2 < 0.$$

Такой выбор параметров k_1, k_2, c_1, c_2 обеспечивает стабилизацию.

Лекция 6

Структура стационарных динамических систем с позиций управляемости

Достаточно полная математическая модель реальной управляемой системы, каков бы ни был в ней набор исполнительных механизмов и измерительных устройств, строго говоря, не вполне управляема. Это происходит из-за включения в вектор состояния моделируемой части инструментальных погрешностей и возмущений, а также переменных, описывающих динамику работы исполнительных и измерительных устройств.

Практически важно построение теории, позволяющей выделять из системы её управляемую и наблюдаемую часть, иначе, производить декомпозицию (расщепление) системы с точки зрения управляемости и наблюдаемости.

Элементы этой теории следуют ниже.

1. Декомпозиция линейных стационарных систем с точки зрения управляемости

Обсудим сначала вопрос о декомпозиции с точки зрения управляемости.

Рассматривается стационарная система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (6.1)$$

Пусть условие управляемости для этой системы не выполняется, т.е. $\text{rank } W < n$, где

$$W = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B). \quad (6.2)$$

Вначале рассмотрим вопрос о декомпозиции с геометрической точки зрения. Для простоты будем считать, что управление скалярно, т.е. рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad (6.3)$$

где b — матрица-столбец. В этом случае матрица W квадратная и имеет вид:

$$W = (b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b),$$

или

$$W = (g^1, g^2, \dots, g^n),$$

где

$$\begin{aligned} g^1 &= b, \\ &\dots \\ g^{j+1} &= Ag^j. \end{aligned}$$

Пусть первое g^i , которое оказывается линейно-зависимым от предыдущих, есть g^{m+1} ($m < n$):

$$g^{m+1} = \alpha_1 g^1 + \alpha_2 g^2 + \dots + \alpha_m g^m.$$

Тогда все последующие g^j , $j > m+1$, выражаются линейно через первые m векторов g^j .

Тогда $\text{rank } W = m$. Пусть R_g^m — подпространство, натянутое на векторы $g^1, \dots, g^m$. Набор $g^1, \dots, g^m$ в этом подпространстве является базисом.

Подпространство R_g^m , очевидно, инвариантно по отношению к преобразованию A : если $f \in R_g^m$, то $Af \in R_g^m$. Но тогда подпространство R_g^m инвариантно к преобразованию A^k (k любое) и к преобразованию e^{At} , поскольку

$$e^{At} = E + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Обратимся к уравнению (6.3). Пусть пока $u = 0$ и начальные условия для x выбраны из подпространства R_g^m , то есть

$$x(t_0) = \xi_{10}g^1 + \xi_{20}g^2 + \dots + \xi_{m0}g^m = (g^1, g^2, \dots, g^m)\xi_0,$$

где $\xi_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}, \dots, \xi_{m0})^\top$. В этом случае

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}(g^1, g^2, \dots, g^m)\xi_0.$$

Так как подпространство R_g^m инвариантно к преобразованию e^{At} , то $x(t) \in R_g^m$:

$$x(t) = \xi_1(t)g^1 + \dots + \xi_m(t)g^m = (g^1, \dots, g^m)\xi(t),$$

где $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))^\top$.

Таким образом, если фазовая точка в начальный момент находится в подпространстве R_g^m и $u = 0$, то она будет оставаться в этом подпространстве в любой момент времени.

Пусть теперь, напротив, $x(t_0) = 0$, тогда решение уравнения (6.3) имеет вид

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} g^1 u(\tau) d\tau,$$

Очевидно представление

$$e^{At} g^1 = \varphi_1(t)g^1 + \varphi_2(t)g^2 + \dots + \varphi_m(t)g^m,$$

где $\varphi_j(t)$ — некоторые функции времени. Отсюда следует:

$$x(t) = \left[\int_{t_0}^t \varphi_1(t-\tau) u(\tau) d\tau \right] g^1 + \dots + \left[\int_{t_0}^t \varphi_m(t-\tau) u(\tau) d\tau \right] g^m.$$

Это выражение означает, что никакое управление $u(t)$ не может вывести фазовую точку из подпространства R_g^m . В общем случае, если начальное состояние принадлежит R_g^m

$$x(t_0) = \xi_{10}g^1 + \xi_{20}g^2 + \dots + \xi_{m0}g^m,$$

то любая фазовая траектория, порожденная некоторым управлением $u(t)$, лежит в подпространстве R_g^m , и величину $x(t)$ можно представить в виде контравариантного разложения

$$x(t) = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \dots + \xi_m g^m.$$

Подставляя это разложение в уравнение (6.3) и принимая во внимание соотношения

$$A g^j = g^{j+1}, \quad A g^m = \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_m g^m, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

получим:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \alpha_1 \xi_m + u, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 + \alpha_2 \xi_m, \\ &\dots \\ \dot{\xi}_m &= \xi_{m-1} + \alpha_m \xi_m, \end{aligned} \tag{6.4}$$

или более кратко

$$\dot{\xi} = A_g \xi + (1, 0, \dots, 0)^\top u,$$

где матрица A_g имеет вид:

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Пара $(A_g, (1, 0, \dots, 0)^\top)$ управляема. Легко показать, что в этом случае матрица управляемости W_g равна единичной: $W_g = E$.

Подведем итоги. Подпространство, натянутое на столбцы матрицы управляемости, называется **инвариантным управляемым подпространством**. Его размерность равна рангу матрицы управляемости. Если эта матрица максимального ранга, то управляемое инвариантное подпространство совпадает с полным пространством. Основное свойство указанного подпространства — инвариантность к преобразованию A и, стало быть, к преобразованию e^{At} .

Следствия:

1. Если в начальный момент точка фазового пространства системы находится в управляемом подпространстве, то она в нем и остается при любом управлении u .

2. Система может быть переведена из нулевой точки за счет управления в любую наперед заданную точку фазового пространства, принадлежащую инвариантному управляемому подпространству.

Обратимся к общему случаю (6.1), когда управление u — вектор. При этом применим несколько иной подход, уделив большее внимание процедурной стороне дела.

Пусть $\text{rang } W = m < n$. Тогда среди столбцов (векторов) матрицы W существует m линейно-независимых, которые образуют базис подпространства, натянутого на эти векторы. Так же как и ранее показывается, что это подпространство будет инвариантно к преобразованиям A , $A^2, \dots$ и, стало быть, к преобразованию e^{At} . Для примера рассмотрим случай, когда u — двумерный вектор. Тогда можно написать

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b^1 u_1(t) + b^2 u_2(t), \quad B = (b^1, b^2).$$

Введем векторы

$$\begin{aligned} g^1 &= b^1, & g^2 &= Ag^1, & \dots, & g^{j+1} &= Ag^j, & \dots \\ f^1 &= b^2, & f^2 &= Af^1, & \dots, & f^{j+1} &= Af^j, & \dots \end{aligned}$$

Тогда матрица управляемости имеет вид

$$W = (g^1, f^1, g^2, f^2, \dots, g^n, f^n),$$

где $n = \dim x$.

Один из вариантов построения базиса подпространства $R_{g,f}^m$ таков. Рассмотрим два набора

$$\{g^1, g^2, \dots, g^n\} \quad \text{и} \quad \{f^1, f^2, \dots, f^n\}.$$

Пусть первый вектор из набора $\{g^j\}$, линейно зависящий от предыдущих, есть g^{s+1} :

$$g^{s+1} = \alpha_1 g^1 + \alpha_2 g^2 + \dots + \alpha_s g^s.$$

Очевидно, все последующие g^j линейно зависят от первых s векторов. Дополним векторы $g^1, \dots, g^s$ следующими по порядку векторами второго набора так, что первый, линейно-зависящий от предыдущих, будет вектор f^{r+1} :

$$f^{r+1} = \gamma_1 g^1 + \dots + \gamma_s g^s + \delta_1 f^1 + \dots + \delta_r f^r,$$

где $s + r = m$. Оказалось, что $m < n$.

Все последующие векторы $f^{r+2}, f^{r+3}, \dots$, очевидно также линейно зависят от указанных $s + r = m$ векторов, и подпространство $R_{g,f}^m$, натянутое на эти m векторов, инвариантно к преобразованию A и e^{At} .

Итак, пусть $\text{rang } W = m$. Обозначим через $p^1, p^2, \dots, p^m$ какой-либо базис подпространства R^m , натянутого на столбцы матрицы управляемости W . Введем матрицу $P = (p^1, p^2, \dots, p^m)$. Дополним набор P векторами $q^1, q^2, \dots, q^k$, причем $m + k = n$, и введем матрицу $Q = (q^1, q^2, \dots, q^k)$, так что в совокупности наборы p и q составляют базис всего пространства R^n . В остальном выбор векторов q произволен. Например, векторы q можно выбрать ортогональными векторам p и друг другу.

В новом базисе контрвариантное разложение вектора x запишем в виде

$$x = \xi_1 p^1 + \dots + \xi_m p^m + \eta_1 q^1 + \dots + \eta_k q^k = P\xi + Q\eta,$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{pmatrix}.$$

Справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} AP &= (Ap^1, \dots, Ap^m), \\ Ap^1 &= c_{11}p^1 + \dots + c_{m1}p^m = (p^1, \dots, p^m)c^1 = Pc^1, \\ Ap^2 &= c_{12}p^1 + \dots + c_{m2}p^m = (p^1, \dots, p^m)c^2 = Pc^2, \\ &\dots\dots\dots \\ Ap^m &= c_{1m}p^1 + \dots + c_{mm}p^m = (p^1, \dots, p^m)c^m = Pc^m, \end{aligned}$$

или

$$AP = PA_{11},$$

где $A_{11} = (c^1, \dots, c^m)$, $\dim A_{11} = (m \times m)$.

Матрица AQ имеет вид:

$$AQ = (Aq^1, \dots, Aq^k).$$

Подпространство натянутое на векторы q , не инвариантно к преобразованию A , поэтому векторы Aq^j раскладываются по векторам полного базиса пространства R^n .

Например:

$$Aq^1 = d_{11}p^1 + \dots + d_{m1}p^m + l_{11}q^1 + \dots + l_{k1}q^k = Pd^1 + Ql^1.$$

Продолжая преобразование дальше, окончательно получим:

$$AQ = PA_{12} + QA_{22}.$$

Размерности матриц $A_{12} = (m \times k)$ и $A_{22} = (k \times k)$.

Столбцы матрицы $B = (b^1, \dots, b^s)$ — векторы подпространства R^m , поскольку входят в матрицу управляемости. Поэтому

$$b^j = (p^1, \dots, p^m)b^{j1},$$

или

$$B = PB_1, \quad B_1 = (b^{11}, b^{21}), \quad \dim B_1 = (m \times 2).$$

Обратимся к уравнению (6.1). Заменим x его контравариантным разложением $x = P\xi + Q\eta$ и воспользуемся приведенными выше преобразованиями. Получим:

$$P\dot{\xi} + Q\dot{\eta} = A[P\xi + Q\eta] + PB_1u,$$

или

$$P\dot{\xi} + Q\dot{\eta} = PA_{11}\xi + PA_{12}\eta + QA_{22}\eta + PB_1u.$$

Приравнявая выражения при базисах P и Q , окончательно получим:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}\xi + A_{12}\eta + B_1u \\ \dot{\eta} &= A_{22}\eta \end{aligned} \quad (6.5)$$

Из полученных выражений следует, что если в начальный момент $\eta(t_0) = 0$, то фазовая точка при любом управлении u не может выйти из подпространства ξ . То есть, подпространство ξ — инвариантное управляемое пространство.

Замечание 7. Из (6.5) следует: если матрица A_{22} асимптотически устойчива, и измерению доступны все составляющие вектора x , то система (6.5) (или то же самое, что и система (6.1)) стабилизируема.

Пример 6.1.

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = \dot{u} + u. \quad (6.6)$$

Для тех, кто знаком с понятием передаточной функции: факт неполной управляемости системы следует из вида передаточной функции. Введем обозначение: W_s (s — оператор дифференцирования). Тогда имеем систему:

$$\begin{aligned} y(s) &= W_y(s)u(s), \\ W_y(s) &= \frac{s+1}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s-2}, \end{aligned}$$

в которой не отражен корень характеристического уравнения системы $\lambda = -1$.

Исследуем вопрос об управляемости, следуя формализму теории. Приведем уравнение (6.6) к форме Коши так, чтобы правая часть не содержала производных от управляющего сигнала. Форму Коши будем искать в виде (так называемая форма Фробениуса):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + x_2 + \beta_1 u, \\ \dot{x}_2 &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 u. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Полагая $x_1 = y$ и приводя (6.7) к одному уравнению относительно y и сравнивая его с (6.6), получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + u. \end{aligned}$$

Матрица управляемости принимает вид:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det W = 0.$$

Введем новый базис $\{p, q\}$, где $p = (1, 1)^\top$, $q = (1, -1)^\top$. Вектор x в новом базисе зададим контра-вариантными координатами ξ и η :

$$x = \xi p + \eta q.$$

Уравнения относительно новых переменных:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi + \eta + u \\ \dot{\eta} &= -\eta \end{aligned}$$

Инвариантное управляемое подпространство определяется соотношением $\eta = 0$ ($x_1 = x_2$).

Если измеряются все фазовые координаты, переменная ξ стабилизируется при помощи линейной обратной связи

$$u = -\eta - c\xi, \quad \text{где } c > 2,$$

а неуправляемая переменная $\eta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому, хотя система в целом управляема не полностью, она полностью стабилизируема.

Пример 6.2. Стабилизация динамической системы относительно неустойчивого положения равновесия.

Рассмотрим пример стабилизации линейной динамической системы, иллюстрирующий понятия управляемости и наблюдаемости.

На тележке, которая может передвигаться по горизонтальной прямой любым заданным образом, расположены в шарнирах два математических маятника таким образом, что их оси находятся в малой окрестности неустойчивого положения равновесия (см. рис. 6.1). Углы отклонения маятников относительно вертикали обозначим через α_1 и α_2 . Массы маятников, для простоты полагаются одинаковыми и равными m .

Длины маятников обозначим r_1 и r_2 , а g — удельную силу тяжести.

На опоры маятников действует сила f , порожденная движением тележки с ускорением, и именно посредством этой силы осуществляется управление маятниками. Тогда уравнения углового движения маятников имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\alpha}_1 &= mgr_1 \sin \alpha_1 + fr_1 \cos \alpha_1, \\ I_2 \ddot{\alpha}_2 &= mgr_2 \sin \alpha_2 + fr_2 \cos \alpha_2, \end{aligned}$$

где моменты инерции $I_1 = mr_1^2$, $I_2 = mr_2^2$. При малых α_1 и α_2 , после небольших преобразований, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 - \omega_1^2 \dot{\alpha}_1 &= \frac{u}{r_1}, \\ \ddot{\alpha}_2 - \omega_2^2 \dot{\alpha}_2 &= \frac{u}{r_2}, \end{aligned}$$

где $u = \frac{f}{m}$, $\omega_1 = \frac{g}{r_1}$, $\omega_2 = \frac{g}{r_2}$.

Конструкция снабжена датчиком, измеряющим угол между осями маятников. Результат измерений $z = \alpha_1 - \alpha_2$. Сигнал управления u формируется, как оператор измерения z .

Технические детали конструкции неоднозначны и отдаются на откуп воображению читателя. Проведем формальный анализ управляемости и наблюдаемости. Хотя из предыдущего интуитивно ясно, что управляемость и наблюдаемость имеют место при $r_1 \neq r_2$. Запишем уравнения движения системы в форме Коши.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega_1^2 x_1 + \frac{u}{r_1}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \omega_2^2 x_3 + \frac{u}{r_2}, \quad z = x_1 - x_3. \end{aligned} \tag{6.8}$$

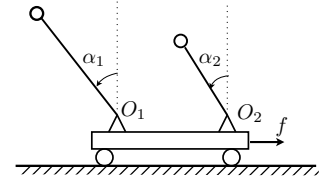


Рис. 6.1. Перевернутые маятники на подвижной основе

Используя каноническую символику, можно записать

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r_1} \\ 0 \\ \frac{1}{r_2} \end{pmatrix}.$$

Матрица управляемости имеет вид :

$$W = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r_1} & 0 & \frac{\omega_1^2}{r_1} \\ \frac{1}{r_1} & 0 & \frac{\omega_1^2}{r_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2} & 0 & \frac{\omega_2^2}{r_2} \\ \frac{1}{r_2} & 0 & \frac{\omega_2^2}{r_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\det W = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 = g^2(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})^2$. Таким образом, для управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы $r_1 \neq r_2$.

Проведем анализ наблюдаемости при измерении $z = h^\top x$, где $h^\top = (1 \ 0 \ -1 \ 0)$. Матрица наблюдаемости будет иметь вид

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \\ 0 & \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\det N = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2$. Таким образом необходимое и достаточное условие наблюдаемости определяется неравенством $r_1 \neq r_2$.

Выполнение условий управляемости и наблюдаемости дает возможность решить задачу стабилизации стандартным способом. Управление u формируется, как линейная комбинация величин, служащих оценками переменных состояния.

В нашем случае алгоритм стабилизации будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega_1^2 x_1 + \frac{1}{r_1}(c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 + c_3 \tilde{x}_3 + c_4 \tilde{x}_4), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \omega_2^2 x_3 + \frac{1}{r_2}(c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 + c_3 \tilde{x}_3 + c_4 \tilde{x}_4), \\ \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2 + k_1(z - \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \omega_1^2 \tilde{x}_1 + k_2(z - \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3) + \frac{1}{r_1}(c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 + c_3 \tilde{x}_3 + c_4 \tilde{x}_4), \\ \dot{\tilde{x}}_3 &= \tilde{x}_4 + k_3(z - \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3), \\ \dot{\tilde{x}}_4 &= \omega_2^2 \tilde{x}_3 + k_4(z - \tilde{x}_1 + \tilde{x}_3) + \frac{1}{r_2}(c_1 \tilde{x}_1 + c_2 \tilde{x}_2 + c_3 \tilde{x}_3 + c_4 \tilde{x}_4) \end{aligned}$$

Переходя от уравнений, которым подчиняется поведение оценок, к уравнениям ошибок оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$, получим систему восьми уравнений, связывающих переменные x и Δx . Нет надобности выписывать эти уравнения, поскольку, следуя лекции 5, характеристическое уравнение всей системы распадается на два независимых блока:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 - \frac{c_1}{r_1} & \lambda - \frac{c_2}{r_1} & -\frac{c_3}{r_1} & -\frac{c_4}{r_1} \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\frac{c_1}{r_2} & -\frac{c_2}{r_2} & -\omega_2^2 - \frac{c_3}{r_2} & \lambda - \frac{c_4}{r_2} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + k_1 & -1 & -k_1 & 0 \\ -\omega_1^2 + k_2 & \lambda & -k_2 & 0 \\ k_3 & 0 & \lambda - k_3 & -1 \\ -k_4 & 0 & -\omega_2^2 + k_4 & \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

откуда

$$\lambda^4 - \lambda^3 \left(\frac{c_2}{r_1} + \frac{c_4}{r_1} \right) - \lambda^2 \left(\frac{c_1}{r_1} + \frac{c_3}{r_2} + \omega_1^2 + \omega_2^2 \right) -$$

$$- \lambda \left(\frac{c_2}{r_1} \omega_2^2 + \frac{c_4}{r_1} \omega_1^2 \right) + \frac{c_3}{r_2} \omega_1^2 + \frac{c_1}{r_1} \omega_2^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0,$$

$$\lambda^4 + \lambda^3 (k_1 - k_3) + \lambda^2 (k_2 - k_4 - \omega_1^2 - \omega_2^2) -$$

$$- \lambda (k_1 \omega_2^2 - k_3 \omega_1^2) + k_2 \omega_2^2 + k_4 \omega_1^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0.$$

Для того, чтобы стабилизировать колебания маятников относительно положения равновесия $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы корни представленных выше характеристических уравнений имели отрицательные действительные части. Положим, для определенности, чтобы все корни были равны -1, т.е. оба характеристических уравнения имели вид $(\lambda + 1)^4 = 0$. Приравнявая коэффициенты характеристических уравнений, получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{r_1(1 + \omega_2^4 + 6\omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, & k_1 &= \frac{4(1 + \omega_1^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ c_2 &= \frac{4r_1(1 + \omega_1^2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, & k_2 &= \frac{1 + 6\omega_1^2 + \omega_1^4}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \\ c_3 &= \frac{r_2(1 + \omega_2^4 + 6\omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, & k_3 &= \frac{4(1 + \omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ c_4 &= \frac{4r_2(1 + \omega_2^2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, & k_4 &= \frac{1 + 6\omega_2^2 + \omega_2^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2}. \end{aligned}$$

Задача стабилизации решена.

Лекция 7

Структура стационарных динамических систем с позиций наблюдаемости и стабилизируемости

1. Декомпозиция линейных стационарных систем с точки зрения наблюдаемости

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) \\ z(\tau) &= Hx(\tau), \tau \in [t_0, t].\end{aligned}\tag{7.1}$$

Пусть пара (A, H) не вполне наблюдаема, т.е. $\text{rank } N < n$, где N — матрица наблюдаемости:

$$N = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Вначале, как и в задаче об управляемости, рассмотрим вопрос о декомпозиции с геометрической точки зрения. Пока для простоты будем считать, что измерение z скалярно, т.е. $z = h^\top x$, и матрица наблюдаемости N имеет вид:

$$N = \begin{pmatrix} h^\top \\ h^\top A \\ \vdots \\ h^\top A^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{1\top} \\ g^{2\top} \\ \vdots \\ g^{n\top} \end{pmatrix},$$

где $g^1 = h$, $g^2 = A^\top g^1, \dots, g^{j+1} = A^\top g^j$.

Пусть первый вектор последовательности $\{g^1, \dots, g^n\}$, линейно зависимый от предыдущих, есть вектор g^{m+1} :

$$g^{m+1} = \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_m g^m,$$

тогда все последующие векторы последовательности также будут линейно зависеть от первых m векторов, и набор $\{g^1, \dots, g^m\}$ порождает подпространство R_g^m , инвариантное к преобразованию $A^\top$.

Этот набор служит одним из возможных в этом подпространстве базисов. Введем набор $\{f^1, \dots, f^k\}$, $m + k = n$, такой, что совокупный набор $\{g^1, \dots, g^m, f^1, \dots, f^k\}$ служит базисом всего пространства R^n . Набор $\{f\}$, очевидно, можно выбрать так, чтобы каждый из векторов f^j был ортогонален каждому вектору g^i , а также чтобы они были ортогональны между собой. Условие ортогональности: $f^{j\top} g^i = 0$, где $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k$.

Покажем, что подпространство, натянутое на векторы $f^1, \dots, f^k$, инвариантно к преобразованию A , а стало быть и к преобразованию e^{At} . Имеем в силу того, что любой из векторов $A^\top g^i$ ортогонален любому из векторов f^j ($j = 1, 2, \dots, k$):

$$f^{j\top} (A^\top g^i) = 0.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде:

$$(Af^j)^\top g^i = 0.$$

Откуда следует, что вектор Af^j принадлежит подпространству, натянутому на векторы набора $\{f\}$. Из последнего вывода следует, что это подпространство инвариантно также к преобразованию e^{At} . Пусть в начальный момент вектор $x(t_0) \in R_f^k$, т.е. $x(t_0)$ можно представить в виде:

$$x(t_0) = \eta_1(t_0)f^1 + \eta_2(t_0)f^2 + \dots + \eta_k(t_0)f^k,$$

тогда

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) = e^{A(t-t_0)}(\eta_1(t_0)f^1 + \dots + \eta_k(t_0)f^k) = \\ &= \eta_1(t)f^1 + \dots + \eta_k(t)f^k.\end{aligned}$$

Измерение $z(t)$ будет в этом случае таким:

$$z(t) = h^\top x(t) = g^{1\top}(\eta_1(t)f^1 + \dots + \eta_k(t)f^k) \equiv 0,$$

поскольку $g^{1\top}f^j = 0$.

Таким образом, для всех фазовых траекторий, порожденных любым начальным условием $x(t_0) \in R_f^k$, измерение $z(t)$ будет нулевым, т.е. такие траектории неразличимы между собой, а также неразличимы с тривиальной траекторией $x(t) = 0$. Иначе говоря, такие траектории ненаблюдаемы.

Подпространство, натянутое на векторы f , назовем **инвариантным ненаблюдаемым подпространством**. Его свойство заключается в том, что все фазовые точки, принадлежащие этому подпространству, не вносят вклада в измерение $z(t)$.

Обратимся к общему случаю, когда измерение z — вектор. Нас здесь будет интересовать, в первую очередь, процедурная сторона вопроса. Пусть $\text{rank } N = m < n$, тогда из строк матрицы наблюдаемости можно выбрать m линейно-независимых. Подпространство, натянутое на векторы, полученные обращением строк матрицы наблюдаемости в столбцы, будет иметь размерность m . Это подпространство инвариантно относительно преобразования $A^\top$.

Пусть $\{p^1, \dots, p^m\}$ — некоторый базис этого подпространства. Дополним этот базис до полного набором $\{q^1, \dots, q^k\}$, $m + k = n$. Векторы q^i могут быть выбраны произвольно, лишь бы не нарушалась линейная независимость совокупного набора $\{p^1, \dots, p^m, q^1, \dots, q^k\}$. Один из вариантов такого выбора — каждый из q^i ортогонален всем векторам p^j , а также все q^i ортогональны между собой.

Введем ковариантные координаты вектора x :

$$\xi_j = x^\top p^j = p^{j\top} x, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\eta_i = x^\top q^i = q^{i\top} x, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Или в краткой форме

$$\xi = P^\top x, \quad \text{где } P = (p^1, \dots, p^m),$$

$$\eta = Q^\top x, \quad Q = (q^1, \dots, q^k).$$

Воспользуемся аналогиями с фрагментом того же названия при обсуждении вопроса о декомпозиции по управлению. Роль матрицы A в указанном фрагменте в нашем случае будет играть матрица $A^\top$:

$$A^\top P = P A_{11}^\top,$$

$$A^\top Q = P A_{21}^\top + Q A_{22}^\top,$$

$$H^\top = P H_1^\top.$$

Получим уравнения, которым подчиняется поведение векторов ξ и η :

$$\dot{\xi} = P^\top \dot{x} = P^\top A x = (A^\top P)^\top x = (P A_{11}^\top)^\top x = A_{11} P^\top x = A_{11} \xi,$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= Q^\top \dot{x} = Q^\top A x = (A^\top Q)^\top x = (P A_{21}^\top + Q A_{22}^\top)^\top x = \\ &= (A_{21} P^\top + A_{22} Q^\top) x = A_{21} \xi + A_{22} \eta, \end{aligned}$$

$$z = H x = (P H_1^\top)^\top x = H_1 P^\top x = H_1 \xi.$$

В итоге приходим к системе:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= A_{21} \xi(t) + A_{22} \eta(t), \\ \dot{\xi}(t) &= A_{11} \xi(t), \\ z(t) &= H_1 \xi(t) \end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь пара (A_{11}, H_1) наблюдаема.

Инвариантность подпространства $\{\eta\}$ следует из факта: если $\xi(t_0) = 0$, то и $\xi(t) = 0$. Порождаемая этим начальным условием траектория принадлежит подпространству $\{\eta\}$.

Определение 8. Система, в которой матрица A_{22} асимптотически устойчива, называется обнаруживаемой или детектируемой.

Это определение можно также рассматривать как необходимое и достаточное условие детектируемости.

Смысл определения становится ясен из следующего рассуждения: будем искать оценки $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ векторов ξ и η в виде:

$$\dot{\tilde{\xi}} = A_{11} \tilde{\xi} + K_1(z - H_1 \tilde{\xi}),$$

$$\dot{\tilde{\eta}} = A_{22}\tilde{\eta} + A_{21}\tilde{\xi}.$$

Тогда уравнение ошибок имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\xi} &= (A_{11} - K_1 H_1)\Delta\xi, \\ \Delta\dot{\eta} &= A_{22}\Delta\eta + A_{21}\Delta\xi,\end{aligned}\tag{7.3}$$

и матрицу K всегда можно выбрать так, чтобы (7.3) была асимптотически устойчива ($\Delta\xi \rightarrow 0$). В силу того, что A_{22} асимптотически устойчива, $\Delta\eta \rightarrow 0$, т.е. существует алгоритм, позволяющий оценить η при $t \rightarrow \infty$.

Пример 7.1.

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0, \quad z = y + \dot{y}.\tag{7.4}$$

Положим $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$. Получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, & z &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 3x_2.\end{aligned}$$

Система не является полностью наблюдаемой, так как $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, т.е. $\det N = 0$.

Невырожденной заменой $\xi = x_1 + x_2, \eta = x_1 - x_2$ система приводится к виду

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -2\xi, & z &= \xi, \\ \dot{\eta} &= 3\xi - \eta.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Инвариантное ненаблюдаемое подпространство составляют точки прямой

$$x_1 + x_2 = 0 \quad (\xi = 0).$$

Отметим, что система (7.5) (а, стало быть, и система (7.4)) детектируема.

2. Стабилизируемость линейных стационарных систем

Рассматривается линейная стационарная система

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ z(\tau) &= Hx(\tau), \quad \tau \in [t_0, t],\end{aligned}\tag{7.6}$$

где $\dim x = n, \dim z = m, \dim u = s$, а A, B, H — постоянные матрицы соответствующей размерности.

Напомним ранее введенное понятие стабилизируемости.

Система (7.6) стабилизируема, если существует оператор $L[z]$, такой что при $u = L[z]$ тривиальное решение системы (7.6) асимптотически устойчиво.

Пусть условие управляемости для этой системы не выполняется, т.е. $\text{rank } W < n$, где

$$W = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B).\tag{7.7}$$

Замечание 8. Поскольку свойство стабилизируемости определяется тройкой (A, B, H) , а свойство детектируемости — парой (A, H) , эти свойства несравнимы. Однако, стабилизируемость пары (A, B) при полной информации о векторе состояния x сопряжена детектируемости пары (A, H) .

Обратимся к характеристическому уравнению системы (7.6)

$$|\lambda E - A| = 0.$$

Пусть для m корней характеристического уравнения $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, m$, выполняется условие $\text{Re } \lambda_j \geq 0$. Для остальных $s = n - m$ корней выполнено

$$\text{Re } \lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Тогда существует невырожденное преобразование F такое, что

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = Fx,$$

где $\dim \xi = m, \dim \eta = s$, и система (7.6) в новых переменных имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A_1\xi + B_1u, \\ \dot{\eta} &= A_2\eta + B_2u, \\ z &= H_1\xi + H_2\eta.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Заметим, что указанные выше величины λ_j являются корнями характеристического уравнения $|\lambda E_m - A_1| = 0$, а величины λ_i — корнями характеристического уравнения $|\lambda E_s - A_2| = 0$. В качестве F , например, можно выбрать преобразование, приводящее матрицу A к жордановой форме.

Имеет место почти очевидная теорема:

Теорема 11. Для стабилизируемости системы (7.8) необходима и достаточна управляемость пары (A_1, B_1) и наблюдаемость пары (A_1, H_1) .

Достаточность следует из того, что существует оператор $L[z]$, описываемый соотношениями:

$$\begin{aligned} u &= C\tilde{\xi}, \\ \dot{\tilde{\xi}} &= A_1\tilde{\xi} + B_1u + K(z - H_1\tilde{\xi} - H_2\tilde{\eta}), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= A_2\tilde{\eta} + B_2u. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь соотношения (7.9) описывают алгоритм оценивания, а матрицы C и K подлежат выбору. Введем ошибки оценки $\Delta\xi = \xi - \tilde{\xi}$, $\Delta\eta = \eta - \tilde{\eta}$ и вектор состояния $\zeta = (\eta, \xi, \Delta\xi, \Delta\eta)^\top$. Целесообразность такого представления вектора состояния ζ прояснится далее.

Уравнения, которым подчиняются компоненты вектора ζ таковы:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_2\eta + B_2C(\xi - \Delta\xi), \\ \dot{\xi} &= (A_1 - B_1C)\xi - B_1C(\Delta\xi), \\ \dot{\Delta\xi} &= (A_1 - KH_1)\Delta\xi - KH_2\Delta\eta, \\ \dot{\Delta\eta} &= A_2\Delta\eta. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Характеристическое уравнение системы (7.10) имеет вид

$$\begin{vmatrix} (\lambda E_s - A_2) & -B_2C & B_2C & 0 \\ 0 & (\lambda E_m - A_1 - B_1C) & B_1C & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda E_m - A_1 + KH_1) & KH_2 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda E_s - A_2) \end{vmatrix} = 0,$$

что эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned} |\lambda E_s - A_2| &= 0, \\ |\lambda E_m - A_1 + B_1C| &= 0, \\ |\lambda E_m - A_1 + KH_1| &= 0, \\ |\lambda E_s - A_2| &= 0. \end{aligned}$$

Корни первого и четвертого уравнений имеют отрицательные действительные части по определению (построению). Действительные части корней второго уравнения могут быть сделаны отрицательными выбором матрицы C вследствие управляемости пары (A_1, B_1) . Действительные части корней третьего уравнения могут быть сделаны отрицательными выбором матрицы K вследствие наблюдаемости пары (A_1, H_1) .

Таким образом, оператор $L[z]$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (7.10).

Достаточность доказана. Необходимость следует из структуры системы, полученной в результате декомпозиции по управлению и наблюдению.

Рассмотренная форма представления управляемой системы позволяет непосредственно сформировать управление (при управляемости пары (A_1, B_1) и наблюдаемости пары (A_1, H_1)) так, что «неустойчивые» корни характеристического уравнения становятся «устойчивыми» с любым наперед заданным запасом устойчивости.

«Устойчивые» корни остаются без изменения. Но если некоторые из таких корней «слабо» устойчивы, то можно соответствующие переменные включить в состав вектора ξ . Если при этом новые пары (A_1, B_1) и (A_1, H_1) удовлетворяют условиям управляемости и наблюдаемости, то можно говорить о стабилизируемости с приемлемой степенью устойчивости.

Лекция 8

Характеристики многомерных случайных векторов. Свойства многомерного нормального распределения

Анализ управляемости и наблюдаемости позволяет ответить на вопрос о возможности построения асимптотически устойчивых алгоритмов наблюдения и оценивания. Но на практике этого не достаточно. При построении рабочих алгоритмов управления и оценивания приходится учитывать стохастическую природу возмущений, действующих на объект, и инструментальных погрешностей измерительных и исполнительных устройств. Для этого разработана теория, позволяющая строить соответствующие математические стохастические модели и основанные на этих моделях алгоритмы. К изложению этой теории мы и приступаем, но прежде напомним в подходящей форме необходимые для дальнейшего сведения из теории вероятностей и теории случайных процессов.

1. Характеристики многомерных случайных векторов

При строгом изложении теории вероятностей вводится понятие вероятностного пространства вместе с сопутствующей ему аксиоматикой. Здесь мы следуем по упрощенному пути и первичным считаем понятие случайной величины.

Универсальной характеристикой, описывающей случайную величину X , служит функция распределения $F(x)$. По определению,

$$F(x) = P(X < x),$$

где P — обозначение вероятности.

В более подробной записи, когда $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ — случайный вектор,

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

Случайная величина называется непрерывной, если непрерывна ее функция распределения. В скалярном случае функция $F(x)$ — монотонно неубывающая функция аргумента x . Обобщение этого свойства на векторный случай очевидно.

Если существует функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \quad (8.1)$$

при любом x , то эта функция называется **плотностью вероятности**.

Из (8.1) следует связь функции распределения и плотности вероятности

$$f(x) = \frac{\partial F^n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

Переход от многомерных характеристик $F(x)$ и $f(x)$ к одномерным $F(x_j)$, $f(x_j)$, где x_j — соответствующая компонента вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, осуществляется по следующим формулам (для простоты положено $n = 2, j = 1$):

$$F(x_1) = F(x_1, +\infty), \quad f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2.$$

Пусть X и Y — две случайные векторные величины. Функция

$$F(x|Y = y) = P(X < x | Y = y)$$

называется **условной функцией распределения вероятности X при условии Y** .

Имеет место формула Байеса

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)},$$

аналогичная формуле, определяющей условную вероятность событий. Здесь $f(x|y)$ — условная плотность вероятности.

Если $f(x, y) = f(x)f(y)$, то случайные величины X и Y называются **независимыми**. Для независимых величин справедливы соотношения

$$f(x|y) = f(x), \quad f(y|x) = f(y).$$

Основные числовые характеристики случайной (в общем случае векторной) величины — математическое ожидание и ковариация. Пусть $g(X)$ — некоторая детерминированная функция случайного (в общем случае векторного) аргумента X . Математическим ожиданием $M[g(X)] = \mu_g$ функции $g(X)$ называется следующая величина:

$$M[g(X)] = \int_{(\mathfrak{A})} g(x) dF(x),$$

где $(\mathfrak{A})$ — область изменения случайной величины.

Если определена плотность вероятности $f(x)$, то

$$M[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n.$$

Величина $M[X]$ носит название **математического ожидания** случайной величины X (другой термин — среднее значение X).

Для определения математического ожидания будем использовать запись $M[X]$. Результат операции будем обозначать через μ_x .

Оператор $M[\cdot]$ линеен, то есть имеет место соотношение

$$M[ag(X) + bh(Y)] = aM[g(X)] + bM[h(Y)].$$

В частности,

$$M[aX + bY] = aM[X] + bM[Y].$$

Введем обозначение $\overset{\circ}{X} = X - \mu_x$. Величину $\overset{\circ}{X}$ будем называть **центрированной случайной величиной**.

Матрицей ковариации случайного вектора X (или просто ковариацией) называется матрица R_x :

$$R_x = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X}^\top].$$

Эта матрица по своему определению симметричная и неотрицательно определенная. В том случае, когда R_x — положительно определенная матрица, вектор X будем называть невырожденным (и вырожденным в противном случае).

Диагональные элементы $R_{ii} = M[\overset{\circ}{X}_i^2]$ матрицы R_x называются **дисперсиями** соответствующих компонент и обозначаются $D_i = D[X_i]$.

Величины $\sigma_i = \sqrt{D_i}$ называются **среднеквадратичными (или стандартными) отклонениями**.

Из определения дисперсии следует, что она служит мерой отклонения скалярной случайной величины относительно своего среднего значения.

Чтобы выяснить смысл недиагональных элементов матрицы R_x , которые называются **моментами корреляции** между компонентами вектора, рассмотрим двумерный вектор $X = (X_1, X_2)^\top$.

Величина $R_{12} = M[\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2]$ есть момент корреляции между случайными величинами X_1 и X_2 .

Одновременно с моментом корреляции R_{12} используется безразмерная характеристика r_{12} , называемая **коэффициентом корреляции**. Она получается из момента корреляции нормировкой:

$$r_{12} = \frac{R_{12}}{\sigma_1\sigma_2}, \quad \text{где} \quad \sigma_1^2 = M[\overset{\circ}{X}_1^2], \quad \sigma_2^2 = M[\overset{\circ}{X}_2^2].$$

Заметим, что матрица ковариации R_x может быть представлена в виде

$$R_x = \check{\sigma}_x \check{r}_x \check{\sigma}_x,$$

где

$$\check{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}, \quad \check{r}_x = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что R_{12} (соответственно r_{12}) = 0, если X_1 и X_2 — независимые случайные величины.

Замечание 9. Из некоррелированности не следует независимость случайных величин.

Рассмотрим пример. Пусть компоненты случайного вектора $Y = (Y_1, Y_2)^\top$ являются координатами точки Y на плоскости OY_1Y_2 . Будем считать, что точка Y всегда принадлежит кругу единичного радиуса, центр которого совпадает с началом координат. Предположим, что двумерная случайная величина $Y = (Y_1, Y_2)^\top$ распределена равномерно в указанной области. Тогда

$$\mu_y = 0, \quad f(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi}$$

и

$$R_{12} = M[\overset{\circ}{Y}_1 \overset{\circ}{Y}_2] = \int_{y_1^2 + y_2^2 \leq 1} \frac{1}{\pi} y_1 y_2 dy_1 dy_2 = 0,$$

поскольку подынтегральное выражение является нечетной функцией своих аргументов, а область интегрирования центрально симметрична. С другой стороны, величины y_1, y_2 очевидно зависимы, поскольку

$$y_1^2 + y_2^2 \leq 1.$$

Выясним вероятностный смысл понятия корреляции. Попробуем X_2 выразить через X_1 линейным образом

$$X_2 \simeq aX_1 + b,$$

подобрав коэффициенты a и b так, чтобы среднеквадратичная ошибка δ линейного представления была минимальной:

$$\delta^2 = M[(X_2 - aX_1 - b)^2] = \min_{a,b}.$$

Получим

$$\delta^2 = \sigma_2^2(1 - r_{12}^2) + (a\sigma_1 - r_{12}\sigma_2)^2 + (\mu_2 - a\mu_1 - b)^2.$$

Минимальное значение δ^2 обеспечивается при

$$a\sigma_1 - r_{12}\sigma_2 = 0, \quad \mu_2 - a\mu_1 - b = 0.$$

И тогда

$$\delta^2 = \sigma_2^2(1 - r_{12}^2).$$

Ошибка δ^2 максимальна при $r_{12} = 0$ ($R_{12} = 0$) и равна нулю при $|r_{12}| = 1$. Кроме того $|r_{12}| \leq 1$, поскольку $\delta^2 \geq 0$, и, соответственно,

$$|R_{12}| \leq \sigma_1 \sigma_2.$$

С другой стороны, если имеет место точное равенство

$$X_2 = aX_1 + b,$$

то, как легко показать,

$$r_{12} = \text{sign}(a).$$

Таким образом, коэффициент корреляции служит мерой линейной связи X_2 с X_1 . Так как r_{12} отражает степень только линейной связи, то из некоррелированности X_2 и X_1 еще не следует их независимость.

2. Основные законы распределения

Закон равной плотности (для скалярной случайной величины).

Закон определяется двумя параметрами x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ 1/(x_2 - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x > x_2. \end{cases}$$

$$\mu_x = \frac{x_2 + x_1}{2}, \quad D_x = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}.$$

Нормальный закон распределения (закон Гаусса).

Одномерный случай.

Закон определяется параметрами $\mu_x = M[X]$ и $\sigma_x^2 = D[X] = M[\overset{\circ}{X}^2]$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

$$P(x_1 \leq X < x_2) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad t_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x}, \quad t_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x}.$$

Для функции $\Phi(t)$ составлены подробные таблицы.

Полезно знать два числа, связанные с нормальным законом распределения:

$$P(|X - \mu_x| < \sigma_x) = 0.67,$$

$$P(|X - \mu_x| < 3\sigma_x) = 0.997.$$

Величину $3\sigma_x$ в инженерной практике называют предельной, тем самым пренебрегая вероятностью

$$P(|X - \mu_x| > 3\sigma_x).$$

Многомерный случай.

$$\begin{aligned} X &= (X_1, X_2, \dots, X_n)^\top, \quad f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det R_x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu_x)^\top R_x^{-1}(x - \mu_x)\right], \\ \mu_x &= M[X], \quad R_x = M[\overset{\circ}{X} \cdot \overset{\circ}{X}^\top]. \quad (8.2) \end{aligned}$$

Замечание 10. Важность нормального распределения в практических задачах частично объясняется **центральной предельной теоремой**, которая утверждает, что это распределение вполне естественно появляется в результате суммарного действия большого числа независимых случайных величин.

Точнее, пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ есть n взаимно независимых случайных величин с произвольными и, возможно, различными функциями распределения. Пусть μ_i и σ_i^2 — среднее значение и дисперсия случайной величины x_i , $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим сумму случайных величин

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

где a_i — произвольные фиксированные постоянные. Тогда среднее значение μ_x и дисперсия σ_x^2 случайной величины x имеют вид

$$\mu_x = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \quad \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2.$$

Последнее равенство справедливо в силу взаимной независимости x_i и x_j при $i \neq j$.

Центральная предельная теорема утверждает, что при достаточно общих условиях распределение суммарной случайной величины x при $n \rightarrow \infty$ стремится к нормальному распределению с приведенными выше средним μ_x и дисперсией σ_x^2 .

Свойства нормального распределения

1. Если X и Y — два случайных вектора, совместная плотность вероятности которых имеет вид (8.2), то $f(x)$, $f(y)$ и $f(x/y)$ также имеют вид (8.2).
2. Если $Y = L[X]$, где L — линейный оператор, то из нормальности распределения вектора X следует нормальность распределения вектора Y .
3. Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, понятия независимости и некоррелированности совпадают.

4. Нормально распределенный вектор X с математическим ожиданием μ_x и ковариацией R_x может быть получен с помощью линейного преобразования

$$x = S_x \cdot u + \mu_x,$$

где u — нормально распределенный вектор с нулевым средним значением и ковариацией, равной единичной матрице:

$$M[u] = 0, \quad M[u u^\top] = E.$$

Для отыскания S_x надо решить задачу факторизации, т. е. задачу представления R_x в виде

$$R_x = S_x S_x^\top \quad \text{при} \quad R_x > 0.$$

Матрицу S_x принято называть квадратным корнем из матрицы R . Задача факторизации может быть решена неоднозначным образом. Приведем два наиболее употребимых варианта.

1. Известно, что квадратичная форма $\alpha^\top R \alpha$ ортогональным преобразованием $\beta = U^\top \alpha$ приводится к диагональному виду:

$$\alpha^\top R \alpha = \beta^\top \Lambda \beta, \quad \text{где} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

В нашем случае все $\lambda_i > 0$. Отсюда следует $R = U \Lambda U^\top$ и

$$S = U \Lambda^{\frac{1}{2}}.$$

2. В качестве матрицы S можно выбрать ниже- или верхне- треугольную матрицу вида

$$S_l = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad S_u = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для вычисления элементов s_{ij} матриц S_l, S_u применяется алгоритм аналитического разбиения Холецкого.

Заметим, что треугольные матрицы широко используются при решении задач оценивания. Их очевидные свойства:

1. сумма и произведение однотипных матриц являются треугольными матрицами того же типа;
2. матрица, обратная к треугольной — треугольная матрица того же типа.

Лекция 9

Случайные процессы и их характеристики

Случайным процессом (случайной функцией) $X(t, \omega)$ будем называть функцию двух аргументов: неслучайного параметра t и элемента $\omega \in \Omega$ из пространства элементарных событий.

При фиксированном t величина X является случайным вектором, при фиксированном ω — детерминированной векторной функцией (реализацией случайного процесса). Параметр t далее будем интерпретировать как время. Параметр t либо изменяется непрерывным образом (процессы с непрерывным временем), либо принимает дискретные значения, допускающие нумерацию (процессы с дискретным временем).

Самый простой способ описать случайный процесс — это задать закон распределения процесса в каждый момент времени t . При таком способе вводится либо функция распределения $F(x, t)$, либо плотность вероятности $f(x, t)$. В соответствии с этим определяются математическое ожидание $M[x(t)] = \mu_x(t)$ и матрица ковариации $M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}^\top(t)] = P_x(t, t)$.

Более полное описание случайного процесса получим, если будем учитывать связь между значениями процесса в моменты $t_1 = t$ и $t_2 = s$, т.е. если зададим совместный закон распределения двух векторов $X(t)$ и $X(s)$:

$$F(x(t), x(s); t, s).$$

Для них можно определить матрицу

$$P_x(t, s) = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}^\top(s)],$$

которую будем далее называть **матрицей корреляции**, в отличие от ее частного случая — матрицы ковариации $P_x(t, t)$. Очевидно, что $P_x(t, s)$ — неотрицательно-определенная матрица.

Теория, основанная на описании процесса с помощью характеристик его вероятностного распределения для двух моментов времени t и s , носит название **корреляционной теории**. В дальнейшем все рассуждения будут проводиться в рамках этой теории.

Для приложений важно — принадлежит или нет случайный процесс к какому-либо из трех классов. Эти классы таковы:

- стационарные,
- марковские,
- нормальные (гауссовы) процессы.

Определение 9. В рамках корреляционной теории **стационарными процессами** называются такие, функции распределения которых не зависят от выбора начала отсчета времени:

$$F(x(t), x(s)) = F(x(t + \tau), x(s + \tau)).$$

Для стационарного процесса

$$\mu_x = \text{const}, \quad P_x(t, s) = P_x(\tau), \quad \text{где } \tau = t - s.$$

Компоненты вектора X в этом случае называются стационарно связанными.

В частности, в скалярном случае

$$K_x(t, s) = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(s)],$$

причем $K_x(t)$ — четная функция, т.е. $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$, и $D_x = K_x(0)$.

Определение 10. Процесс называется **марковским**, если вероятностные свойства процесса в будущем полностью определяются вероятностными свойствами процесса в настоящем и не зависят от поведения процесса в прошлом.

Пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, где n — произвольное целое число. Тогда

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1\} &\equiv \\ &\equiv P\{X(t_n) < x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, \end{aligned}$$

или, в терминах условной плотности:

$$f(x_n | x_{n-1}, \dots, x_1) = f(x_n | x_{n-1}).$$

Определение 11. Процесс называется **нормальным** или **гауссовым**, если для любых моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$ соответствующие случайные векторы имеют совместное нормальное распределение.

1. Анализ случайных процессов

Цель последующего изложения — ввести понятия сходимости, непрерывности, производной, интеграла применительно к случайным функциям. Эти понятия, известные из области анализа, нуждаются в существенном уточнении. Имеется три различных определения сходимости последовательности случайных величин.

Определение 12. Сходимость по вероятности. Последовательность $\{X_n(\omega)\}$ сходится по вероятности к $X(\omega)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Определение 13. Сходимость в среднеквадратичном. Последовательность $\{X_n\}$ сходится в среднеквадратичном к X , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[|X_n - X|^2] = 0.$$

Из сходимости в среднеквадратичном вытекает сходимость по вероятности. Этот факт является непосредственным следствием неравенства Чебышева:

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}.$$

Аналогично определяется непрерывность случайных функций.

Определение 14. Случайная функция $x(t)$ **непрерывна по вероятности** в точке t , если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} P\{|X(t_1) - X(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Определение 15. Случайная функция $X(t)$ **непрерывна в среднеквадратичном**, если

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} M[|X(t_1) - X(t)|^2] = 0.$$

Оба определения непрерывности ничего не говорят о непрерывности каждой реализации. Об этом говорит еще одно определение сходимости, называемой сходимостью с вероятностью единица или почти наверное. Но в дальнейшем нам не понадобится это определение.

Теорема 12. Операции предела и математического ожидания переставимы, если предел понимать в среднеквадратичном:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[X_n] = M\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right] = M[X].$$

Теорема 13. Для того, чтобы случайный процесс был непрерывен в среднеквадратичном, необходимо и достаточно, чтобы были непрерывны его математическое ожидание $\mu_x(t)$ и функция корреляции $P_x(t, s)$ в диагональных точках плоскости (t, s) (при $t = s$).

Замечание 11. Из непрерывности функции корреляции в диагональных точках следует ее непрерывность всюду.

Определение 16. Производной $\frac{dx}{dt}$ в среднеквадратичном называется предел в среднеквадратичном отношения

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Определение означает, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} M\left[\left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} - \frac{dx}{dt}\right)^2\right] = 0.$$

Теорема 14. Для того, чтобы случайная функция была дифференцируема в среднеквадратичном, необходимо и достаточно, чтобы существовали производная математического ожидания и вторая смешанная производная функции корреляции в диагональных точках.

Замечание 12. Из существования второй смешанной производной в диагональных точках следует существование вторых и первых производных от этой функции всюду.

Поскольку производная является пределом в среднеквадратичном, операции дифференцирования и математического ожидания переставимы:

$$M\left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d\mu_x}{dt}, \quad M\left[\frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{dx(s)}{ds}\right] = \frac{\partial^2 P_x(t, s)}{\partial t \partial s}.$$

В частном случае стационарной функции получаем

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad P_y(t, s) = -\frac{d^2 P_x(\tau)}{d\tau^2} = P_y(\tau), \quad \tau = t - s.$$

Определение 17. Интегралом $\int_a^b x(t)dt$ в среднеквадратичном называется предел в среднеквадратичном интегральной суммы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x(\tau_k) \Delta t, \quad \Delta t = \frac{b-a}{n}, \quad (k-1) \cdot \Delta t \leq \tau_k \leq k \cdot \Delta t.$$

Теорема 15. Для того, чтобы процесс был интегрируем в среднеквадратичном, необходимо и достаточно, чтобы существовали интегралы

$$\int_a^b \mu_x(t)dt, \quad \int_a^b \int_a^b P_x(t, s)dt ds.$$

Очевидна перестановочность операций интегрирования и математического ожидания.

2. Процессы с ортогональными приращениями. Белый шум

Процессы такого типа играют большую роль при спектральном описании стационарных случайных процессов, при построении стохастической модели динамических систем, в задачах анализа и синтеза таких систем.

Будем считать, что $M[x] = 0$.

Пусть $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, t_m$ — произвольные моменты времени и целое число m произвольно, а $t_{k+1} > t_k$.

Величина

$$\Delta x(t_k, t_{k-1}) = \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$$

составляет приращение процесса на интервале $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

По определению, процесс будет **процессом с независимыми приращениями**, если Δx_k не зависит от Δx_j и $x_0 = x(t_0)$ ($k \neq j$).

Если имеет место только некоррелированность, процесс называется **процессом с ортогональными приращениями**.

Рассмотрим приращение процесса $x(t)$ на интервале от t до $t + \Delta t$:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

Выясним, как связана ковариация этого приращения $P_{\Delta x} = M[\Delta x \cdot \Delta x^\top]$ с ковариацией процесса $P_x(t) = M[x(t) \cdot x^\top(t)]$. Имеем

$$\begin{aligned} P_{\Delta x} &= M[(x(t + \Delta t) - x(t)) \cdot (x(t + \Delta t) - x(t))^\top] = \\ &= P_x(t + \Delta t) + P_x(t) - \\ &\quad - M[x(t + \Delta t) \cdot x(t)^\top] - M[x(t) \cdot x(t + \Delta t)^\top]. \end{aligned}$$

Но

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x,$$

и в силу определения процессов с ортогональными приращениями

$$M[x(t + \Delta t) \cdot x(t)^\top] = P_x(t),$$

$$M[x(t) \cdot x(t + \Delta t)^\top] = P_x(t).$$

Отсюда

$$P_{\Delta x} = P_x(t + \Delta t) - P_x(t).$$

То есть ковариация приращения для процесса с ортогональными приращениями равна приращению ковариации процесса.

В скалярном случае получим

$$D_{\Delta x} = D_x(t + \Delta t) - D_x(t). \quad (9.1)$$

Обозначим через $R(t)$ производную по времени от ковариационной матрицы процесса. Предположим, что существует производная по времени от ковариационной матрицы процесса

$$R(t) = \dot{P}_x(t),$$

или, в скалярном случае,

$$R(t) = \frac{dD_x(t)}{dt}.$$

Последнее соотношение приближенно можно записать при достаточно малом Δt

$$D_{\Delta x} \approx R(t)\Delta t,$$

т. е. дисперсия приращения процесса с ортогональными приращениями пропорциональна величине временного интервала Δt .

На первый взгляд это может показаться странным (если не обращать внимания на условия дифференцируемости), поскольку дисперсия — квадратичная характеристика. В самом деле, рассмотрим процесс $x(t)$, дифференцируемый в среднеквадратичном:

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) \approx \dot{x}\Delta t.$$

Для него

$$D_{\Delta x} = M[\Delta x^2] \approx \Delta t^2 M[\dot{x}^2],$$

т. е. дисперсия приращения оказалась пропорциональной квадрату приращения аргумента.

Но процесс с ортогональными приращениями, хотя и является непрерывным в среднеквадратичном, не имеет производной, поскольку

$$M[(x(t + \Delta t) - x(t))^2] \approx R(t)\Delta t \rightarrow 0 \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0,$$

$$M\left[\left\{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\right\}^2\right] \approx \frac{R(t)}{\Delta t} \rightarrow \infty \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Покажем, как можно интерпретировать величину dx , которую нельзя понимать как обычный дифференциал в среднеквадратичном.

Предварительно напомним определение и свойства δ -функции. Эта функция широко используется при описании линейных динамических систем и случайных процессов. Она определяется следующими тремя условиями:

1. $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$;
2. $\delta(x) = \infty$ при $x = 0$;
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$.

В нашем случае, как это будет видно из дальнейшего, добавим дополнительное условие четности:

$$\delta(x) = \delta(-x).$$

Основное следствие из определения δ -функции. Пусть $\varphi(x)$ гладкая функция, тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x - a) dx = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \varphi(x) \delta(x - a) dx = \varphi(a),$$

где ε как угодно малое положительное число.

Если $\delta(x)$ четная функция, то имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x - a) dx &= \int_{a-\varepsilon}^a \varphi(x) \delta(x - a) dx + \int_a^{a+\varepsilon} \varphi(x) \delta(x - a) dx = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(a) + \frac{1}{2} \varphi(a) = \varphi(a). \end{aligned}$$

Заметим, что δ -функцию можно определить через предельный переход:

$$\delta(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \delta_R(x), \quad \text{где} \quad \delta_R(x) = \frac{1}{2\pi R} \cdot e^{-\frac{x^2}{2R^2}}.$$

Приращение процесса Δx на интервале $(t, t + \Delta t)$ запишем в виде

$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} dx(u).$$

Тогда

$$P_{\Delta x} = M [\Delta x \cdot \Delta x^\top] = \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} M [dx(u) dx^\top(u_1)] . \quad (9.2)$$

С другой стороны,

$$P_{\Delta x} = \int_t^{t+\Delta t} R(u) du. \quad (9.3)$$

Из сравнения (9.2) и (9.3) следует с учетом свойств δ -функции

$$M [dx(u) dx^\top(u_1)] = R(u) du du_1 \delta(u - u_1)$$

или, если ввести формальную производную,

$$M \left[\frac{dx(t)}{dt} \cdot \frac{dx^\top(s)}{ds} \right] = R(t) \delta(t - s). \quad (9.4)$$

Обратим внимание на то, что в силу определения матрицы корреляции, δ -функцию в последних выражениях следует считать четной функцией своего аргумента.

Сконструированный таким образом процесс $\frac{dx(t)}{dt}$ называется **процессом типа белого шума** или просто белым шумом. Основное его свойство — некоррелированность во времени. Строго говоря, такой процесс (9.4) — не более чем удобная абстракция, и он не может быть реализован физически. Для его реализации требуется существование бесконечной скорости (абсолютной безынерционности, бесконечной энергии и т.п.).

Обозначим вектор размерностей процесса через γ , за единицу времени выберем секунду. Тогда размерности величин, входящих в вышеописанные соотношения, будут таковы:

$$\begin{aligned} [P] &= \gamma \gamma^\top, \quad [P_{\Delta x}] = \gamma \gamma^\top, \quad [R] = \frac{\gamma \gamma^\top}{\text{сек}}, \\ \left[\frac{dx}{dt} \right] &= \frac{\gamma}{\text{сек}}, \quad [\delta] = \frac{1}{\text{сек}}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

то есть для согласования размерностей для δ -функции нужно принять размерность 1/сек, как это следует из самого определения δ -функции.

Полученный результат (9.5) согласуется с формальным правилом, по которому матрица корреляции производной от векторного процесса находится как вторая смешанная производная от матрицы корреляции дифференцируемого процесса.

Лекция 10

Стохастические модели линейных динамических систем

Поведение динамических систем, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, определяется начальным значением всех фазовых координат (начальным значением вектора состояния).

В стохастической ситуации задаются вероятностные характеристики начального состояния системы. Стохастическая модель, описывающая состояние системы, должна позволять предсказывать вероятностные характеристики системы в будущем. Для нас такими характеристиками будут математическое ожидание и матрица корреляции вектора состояния. Рассматриваются только линейные системы.

1. Дискретный случай

Для простоты записи положим $x(t_k) = x_k$.

Математической моделью системы служит вектор $x(t_k)$, подчиняющийся дискретному уравнению

$$x_{k+1} = \Phi(k+1, k)x_k + q_k, \quad (10.1)$$

где q_k — дискретный белый шум:

$$M[q_k] = 0, \quad M[q_k q_j^\top] = Q_k \delta_{kj}, \quad \text{и} \quad M[x_k q_j^\top] = 0, \quad (k - \text{номер шага}).$$

Здесь δ_{kj} — символ Кронекера.

Из (10.1) непосредственно следует уравнение для определения математического ожидания $\mu_k = M[x_k]$:

$$\mu_{k+1} = \Phi(k+1, k)\mu_k. \quad (10.2)$$

Подставив (10.1) и (10.2) в выражение, определяющее ковариационную матрицу $P_{k+1} = M[\overset{\circ}{x}_{k+1} \overset{\circ}{x}_{k+1}^\top]$, получаем ковариационное (дисперсионное) уравнение:

$$P_{k+1} = \Phi(k+1, k)P_k\Phi^\top(k+1, k) + Q_k. \quad (10.3)$$

Легко показать, что матрица корреляции $P(n, m) = M[\overset{\circ}{x}_n \overset{\circ}{x}_m^\top]$ определяется соотношением

$$P(n, m) = \Phi(n, m)P_m, \quad n \geq m.$$

Здесь $\Phi(n, m) = \Phi(n, n-1) \cdot \dots \cdot \Phi(m+1, m)$, а $\Phi(m, m) = E$.

Свойство. В стационарном случае при $Q = \text{const}$, $\Phi = \text{const}$ и при условии, что все корни характеристического уравнения $|\lambda E - \Phi| = 0$ по модулю меньше единицы при $k \rightarrow \infty$ можно говорить об установившемся решении P_∞ дисперсионного уравнения (10.3). Оно определяется из уравнения

$$P_\infty = \Phi P_\infty \Phi^\top + Q.$$

2. Непрерывный случай

Непрерывное стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее состояние динамической системы, будем рассматривать как предел в среднеквадратичном следующего разностного уравнения:

$$\Delta x = A \cdot x \Delta t + \Delta v,$$

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta v = v(t + \Delta t) - v(t),$$

где $v(t)$ — процесс с ортогональными приращениями.

Обозначим производную $\frac{dP_v(t)}{dt} = Q$, где $P_v(t) = M[v(t)v^\top(t)]$. Имеем

$$M[\Delta v \Delta v^\top] = Q(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} dx &= A \cdot x dt + dv, \\ M[dv(t)dv^\top(s)] &= Q(t)dt ds \delta(t-s). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Формально, если ввести производные $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dv}{dt}$, можно записать

$$\frac{dx}{dt} = Ax + q, \quad (10.5)$$

где q — процесс типа белого шума:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^\top(s)] = Q(t)\delta(t-s), \quad M[x(t_0)q^\top(t)] = 0.$$

Уравнение для определения математического ожидания $\mu_x = M[x]$ непосредственно следует из (10.4) или из (10.5):

$$\dot{\mu}_x = A\mu_x, \quad \mu_x(t_0) = \mu_0.$$

Уравнение для определения ковариационной матрицы $P_x(t) = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^\top(t)]$ получим двумя способами.

1. Примем за основу уравнение (10.4). Выпишем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} P_x(t) &= M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^\top(t)], \quad P_x(t+\Delta t) = M[\overset{\circ}{x}(t+\Delta t)\overset{\circ}{x}^\top(t+\Delta t)], \\ \overset{\circ}{x}(t+\Delta t) &= \overset{\circ}{x}(t) + \Delta\overset{\circ}{x}(t), \\ P_x(t+\Delta t) &= M\left[\left\{\overset{\circ}{x}(t) + \Delta\overset{\circ}{x}(t)\right\}\left\{\overset{\circ}{x}(t) + \Delta\overset{\circ}{x}(t)\right\}^\top\right] = \\ &= M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^\top(t)] + M[\overset{\circ}{x}(t)\Delta\overset{\circ}{x}^\top(t)] + M[\Delta\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^\top(t)] + \\ &\quad + M[\Delta\overset{\circ}{x}(t)\Delta\overset{\circ}{x}^\top(t)]. \end{aligned}$$

Так как $\Delta\overset{\circ}{x} = A\overset{\circ}{x}\Delta t + \Delta v$, то

$$\begin{aligned} M[\overset{\circ}{x}(t)\Delta\overset{\circ}{x}^\top] &= P_x(t)A^\top(t)\Delta t, \quad M[\Delta\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^\top] = A(t)P_x(t)\Delta t, \\ M[\Delta\overset{\circ}{x}(t)\Delta\overset{\circ}{x}^\top] &= A(t)P_x(t)A^\top(t)\Delta t^2 + Q\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_x(t+\Delta t) &= P_x(t) + (AP_x + P_xA^\top)\Delta t + \\ &\quad + Q\Delta t + AP_xA^\top\Delta t^2 + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (10.6)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ из (10.6) получим

$$\frac{dP_x}{dt} = AP_x + P_xA^\top + Q. \quad (10.7)$$

Это уравнение называется дисперсионным или ковариационным.

2. Примем за основу уравнение (10.5). Выпишем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d\overset{\circ}{x}}{dt} &= A\overset{\circ}{x} + q, \quad P_x(t) = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}^\top(t)], \\ \frac{dP_x}{dt} &= M\left[\frac{d\overset{\circ}{x}}{dt}\overset{\circ}{x}^\top + \overset{\circ}{x}\frac{d\overset{\circ}{x}}{dt}^\top\right] = \\ &= AP_x + P_xA^\top + M[q(t)\overset{\circ}{x}^\top(t)] + M[\overset{\circ}{x}(t)q(t)^\top]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\overset{\circ}{x}(t) = \Phi(t, t_0)\overset{\circ}{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)q(\tau)d\tau,$$

то

$$M[\overset{\circ}{x}(t)q(t)^\top] = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)M[q(\tau)q(t)^\top]d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Q(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \\
&= \int_{t-\varepsilon}^t \Phi(t, \tau) Q(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} Q(t).
\end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение (10.7).

Матрица корреляции $P_x(t, s) = M \left[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}^\top(s) \right]$, как легко показать, находится из соотношения

$$P_x(t, s) = \Phi(t, s) P_x(s) \quad (t \geq s).$$

В стационарном случае, когда $Q = \text{const}$, $A = \text{const}$ и корни характеристического уравнения $|\lambda E - A| = 0$ имеют отрицательные действительные части, установившееся значение матрицы ковариации может быть найдено из решения алгебраического уравнения

$$AP_\infty + P_\infty A^\top + Q = 0.$$

3. Дискретизация непрерывных случайных процессов

Рассмотрим векторный случайный процесс $x(t)$, описываемый уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + q, \quad (10.8)$$

где x — n -мерный вектор состояния, q — n -мерный вектор — процесс типа белого шума:

$$M [q(t)q^\top(s)] = Q(t)\delta(t - s).$$

Перейдем к значениям процесса в дискретные моменты времени

$$t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, \dots, t_k = t_0 + k\Delta t, \dots$$

Соответственно, рассмотрим вопрос о получении дискретной во времени модели системы, эквивалентной исходной непрерывной модели.

Определение 18. *Дискретное и непрерывное во времени представления называются эквивалентными (в рамках корреляционной теории), если векторы состояния имеют одни и те же математические ожидания и ковариационные матрицы в совпадающие дискретные моменты времени.*

Решая уравнение (10.8) на отрезке времени $[t_k, t_{k+1}]$, получим

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)q(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t_{k+1}, t_k)$ является переходной матрицей системы

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Введя обозначения

$$x_k = x(t_k), \quad \Phi_k = \Phi(t_{k+1}, t_k), \quad q_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)q(\tau)d\tau,$$

получим дискретную во времени, эквивалентную модель

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + q_k,$$

где $\{q_k\}$ — последовательность типа дискретного белого шума:

$$M [q_k q_l^\top] = Q_k^* \delta_{kl}, \quad Q_k^* = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) Q(\tau) \Phi^\top(t_{k+1}, \tau) d\tau.$$

Замечание 13. *При малом Δt обычно полагают*

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) \approx E + \Delta t A(t_k),$$

либо

$$\Phi(t_{k+1}, t_k) \approx E + \Delta t A(t_k) + \frac{\Delta t^2}{2!} A^2(t_k).$$

Тогда

$$Q_k^* \approx Q(t_k) \Delta t.$$

Примеры.

1. Процесс 1-го порядка.

Непрерывная модель.

$$\dot{x} + \lambda x = \sigma \sqrt{2\lambda} q(t), \quad M[q(t)q^T(s)] = 1 \cdot \delta(t-s).$$

Корреляционная функция $K_x(\tau)$ процесса $x(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma^2 \exp^{-\lambda|\tau|}.$$

Дискретная модель.

$$x_{k+1} = \exp^{-\lambda\Delta t} x_k + \sigma \sqrt{1 - \exp^{-2\lambda\Delta t}} q_k, \quad M[q_k q_l] = 1 \cdot \delta_{kl}.$$

2. Процесс 2-го порядка.

Непрерывная модель.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + (\lambda^2 + \alpha^2)x = 2\sigma\sqrt{\alpha(\lambda^2 + \alpha^2)}q(t),$$
$$M[q(t)q^T(s)] = 1 \cdot \delta(t - s).$$

Корреляционная функция $K_x(\tau)$ процесса $x(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma^2 \exp^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \lambda\tau + \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda|\tau| \right).$$

Дискретная модель.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \Phi \cdot \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + q_k,$$
$$x_k = x(t_k), \quad y_k = \frac{\dot{x}(t_k)}{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}},$$
$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos \lambda\Delta t + \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda\Delta t & \frac{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}}{\lambda} \sin \lambda\Delta t \\ -\frac{\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}}{\lambda} \sin \lambda\Delta t & \cos \lambda\Delta t + \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda\Delta t \end{pmatrix},$$
$$M[q_k q_l] = Q^* \delta_{kl}, \quad Q^* = \sigma^2 [E - \Phi \cdot \Phi^T].$$

Лекция 11

Алгоритмизация задачи оценивания

Последующее изложение посвящено задачам стохастически оптимального оценивания некоторой скалярной или векторной случайной величины x с помощью скалярной или векторной информации z . Оценка $\tilde{x}$ реализует критерий, минимизирующий в том или ином смысле ошибку оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$. При этом критерий отражает вероятностные связи между измерениями z и оцениваемой величиной x .

Оценка может быть разовой (локальной) или меняющейся со временем. Соответственно условно можно говорить о статических и динамических задачах оценивания.

Существует много различных методов стохастически оптимального оценивания. Источники, излагающие соответствующую теорию с той или иной степенью детализации, весьма многочисленны. Ниже мы остановимся на задачах, связанных с теорией калмановской фильтрации и примыкающих к ним.

Для суждения о качестве оценки обычно используются две характеристики: несмещенность и состоятельность.

Оценка $\tilde{x}$ называется **несмещенной**, если в среднем она равна оцениваемой величине:

$$M[\Delta x] = 0.$$

Пусть $\tilde{x}_n$ — оценка, использующая результаты n измерений. Оценка $\tilde{x}$ называется **состоятельной**, если она сходится по вероятности к оцениваемой величине:

$$P\{|\tilde{x}_n - x| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В некотором смысле состоятельность является стохастическим аналогом асимптотической устойчивости. Отметим, что практически проще оказывается проверка более сильной сходимости — в среднеквадратичном.

Количественной характеристикой результата оценивания служит эффективность. Оценка **эффективна** (оптимальна), если она наилучшая из всех возможных оценок с точки зрения некоторого заданного критерия.

В связи с выбором критерия сделаем одно важное для прикладных задач замечание. При построении алгоритма оценивания должны быть, прежде всего, четко сформулированы модели всех инструментальных погрешностей измерителей, доставляющих первичную информацию, и модели возмущений, действующих на динамическую систему. Инженеры обычно называют такие модели техническими условиями. Именно выбранная модель погрешностей определяет критерий, а не наоборот.

Далее везде предполагается, что погрешности и возмущения имеют нормальное распределение, и его характеристики известны. Это приводит к квадратичному критерию точности оценки, который может использоваться в различных формах: критерий минимума дисперсии ошибки оценки, критерий максимального правдоподобия, критерий ортогональности.

Ниже в качестве основной формы выбран критерий ортогональности. Смысл его в рамках корреляционной теории состоит в следующем. Оценка $\tilde{x}$, использующая некоторое измерение z , должна быть такова, чтобы ошибка оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ была не коррелирована с исходной для оценивания информацией z :

$$M[\Delta x z^\top] = 0.$$

Эвристически это означает, что вся содержащаяся в измерении z информация о величине x вошла в оценку $\tilde{x}$ и, следовательно, в измерении z не содержится никакой информации о неопределенной части величины x — ошибке Δx .

Ниже, в полном соответствии с гипотезой о нормальности стохастических процессов, будут рассматриваться только линейные алгоритмы оценивания.

1. Решение переопределенных систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим простейшую задачу решения системы линейных алгебраических уравнений

$$z = Hx, \tag{11.1}$$

где x — n -мерный вектор, подлежащий определению; z — известный m -мерный вектор (вектор измерения); матрица H имеет размерность $(m \times n)$ и, предполагается, максимальный ранг. На практике имеет место чаще всего $m \gg n$ и, соответственно, система линейных уравнений (11.1) переопределена.

Очевидный подход к решению задачи (11.1) таков. Поскольку каждому вектору $x \in R^n$ соответствует вектор невязки $r \in R^m$:

$$r = z - Hx,$$

то в качестве решения задачи (11.1) естественно выбрать такой вектор x , который доставляет минимум длины (нормы) вектора невязки r .

Итак, приходим к классической постановке метода наименьших квадратов (МНК):

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \operatorname{argmin} J(x), \\ J(x) &= (z - Hx)^\top (z - Hx) = r^\top r = \|r\|^2. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Минимизация функционала J приводит к уравнению

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -2z^\top H + 2x^\top H^\top H = 0,$$

из которого следует

$$x = (H^\top H)^{-1} H^\top z = H^+ z. \quad (11.3)$$

Матрица

$$H^+ = (H^\top H)^{-1} H^\top$$

называется псевдообратной. Матрица $H^\top H$ не вырождена, поскольку матрица H максимального ранга.

2. Критерий максимального правдоподобия

Придадим задаче решения системы линейных алгебраических уравнений (11.1) вероятностный смысл. Будем считать, что имеется вектор измерения z такой, что

$$z = Hx + r, \quad (11.4)$$

где r — случайный вектор погрешностей измерения, распределенный по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и известной ковариацией R :

$$M[r] = 0, \quad R = M[rr^\top]. \quad (11.5)$$

Замечание 14. Форма представления вектора измерения z (11.4) имеет строгий смысл в отличие от записи (11.1), в которой знак равенства условен.

Функция плотности вероятности $f(r)$ вектора r имеет вид

$$f(r) = C \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} r^\top R^{-1} r \right]. \quad (11.6)$$

Естественный подход к решению задачи в рамках принятой модели помехи r таков. Поскольку имеет место (11.4), то для любого значения вектора x случайный вектор z распределен по нормальному закону с известной ковариацией R и неизвестным математическим ожиданием μ_z . Соответственно функция распределения $f(z, \mu_z)$ вектора z имеет вид

$$f(z, \mu_z) = C \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} (z - \mu_z)^\top R^{-1} (z - \mu_z) \right]. \quad (11.7)$$

Согласно критерию максимального правдоподобия, в качестве оценки $\tilde{\mu}_z$ неизвестного параметра распределения (11.7) принимается такое значение μ_z , при котором функция плотности распределения $f(z, \mu_z)$ для полученного в результате опыта (измерения) значения случайного вектора z достигает максимума.

Условие $\max f(z, \mu_z)$, очевидно, эквивалентно условию $\min J$, где

$$J = (z - Hx)^\top R^{-1} (z - Hx). \quad (11.8)$$

Таким образом, приходим к стандартной форме метода наименьших квадратов, где обратная ковариационная матрица R^{-1} играет роль метрического тензора в пространстве помех измерения r .

Минимизация функционала J (11.8) приводит к следующему решению:

$$\tilde{x} = (H^\top R^{-1} H)^{-1} H^\top R^{-1} z. \quad (11.9)$$

Очевидно, что при равноточных независимых измерениях ($R = \sigma^2 E$) из (11.9) вытекает знаковый результат:

$$\tilde{x} = (H^\top H)^{-1} H^\top z.$$

Предлагается показать, что оценка (11.9) удовлетворяет условиям линейности, несмещенности и ортогональности.

Замечание 15. Пусть помимо измерений z привлекается точная информация

$$z^* = Gx, \quad \dim z^* = (k \times 1), \quad k < n, \quad (\text{обычно } k \ll n). \quad (11.10)$$

Существует 3 способа ее использования:

1. выразив из (11.10) k составляющих вектора x через остальные, подставить их в уравнение (11.1) и тем самым уменьшить на k размерность вектора, определяемого по МНК;
2. можно воспользоваться известным аппаратом множителей Лагранжа;
3. наиболее целесообразный способ: образовать вектор измерений

$$w = \mathfrak{A}z^*, \quad (11.11)$$

где $\mathfrak{A}$ — достаточно большое число. Добавить уравнение (11.11) к уравнению $z = Hx$. Оценку $\tilde{x}$ искать как решение совокупной системы размерности $(m+k)$. Этот прием эквивалентен тому, что компонентам вектора z^* приписываются малые погрешности со среднеквадратичными отклонениями $\frac{\sigma}{\mathfrak{A}}$.

3. Задача сглаживания экспериментальных данных методом наименьших квадратов при помощи кубических сплайнов

В качестве примера задачи, приводящей к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений, рассмотрим задачу сглаживания экспериментальных данных при помощи кубических сплайнов.

Пусть $g(t)$ функция времени, измеряемая в дискретные моменты t_k :

$$t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_N, \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k = \text{const}.$$

Результат измерения есть

$$z_k = g(t_k) + r_k,$$

где r_k — погрешность измерения.

Общее число измерений z_k функции g в моменты времени $\{t_k\}$ равно $N+1$. Требуется построить оценку $\tilde{g}(t)$ на всем отрезке $[t_0, t_N]$.

Отрезок $[t_0, t_N]$ разбивается n узлами T_i :

$$T_1, T_2, \dots, T_i, T_{i+1}, \dots, T_n$$

так, что выполнено

$$T_1 = t_0, \quad T_n = t_N, \quad \Delta T = T_{i+1} - T_i = \text{const}.$$

Узлы T_i выбираются так, чтобы им отвечали какие-то измерения. Измерения в узловой точке T_i удобнее относить к предыдущему отрезку $[T_{i-1}, T_i]$. Число измерений на каждом участке кроме первого обозначим через m (поскольку $\Delta T = \text{const}$). Тогда первый участок $[T_1, T_2]$ содержит $m+1$ измерений. Имеет место соотношение

$$m+1 + (n-2)m = N+1 \quad \text{или} \quad m(n-1) = N.$$

Введем безразмерный интервал между измерениями:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\Delta T}, \quad \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} = m \right).$$

На каждом участке $[T_{i-1}, T_i]$ введем безразмерное время τ :

$$\tau = \frac{t - T_{i-1}}{\Delta T}, \quad \tau \in [0, 1].$$

Основной элемент сглаживания при помощи кубических сплайнов — определение базовых функций. Вводятся четыре базовые функции:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= \frac{1}{4}(1-\tau)^3, & \varphi_2(\tau) &= 1 - \frac{3}{4}(2-\tau)\tau^2, \\ \varphi_3(\tau) &= 1 - \frac{3}{4}(1+\tau)(1-\tau)^2, & \varphi_4(\tau) &= \frac{1}{4}\tau^3. \end{aligned}$$

Линейная независимость функций $\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau), \varphi_4(\tau)$ следует, например, из однозначности определения коэффициентов c_1, c_2, c_3, c_4 в соотношении

$$c_1\varphi_1(\tau) + c_2\varphi_2(\tau) + c_3\varphi_3(\tau) + c_4\varphi_4(\tau) = a_1 + a_2\tau + a_3\tau^2 + a_4\tau^3.$$

Оценка $\tilde{g}$ функции g ищется в виде

$$\tilde{g} = \begin{cases} c_i\varphi_1(\tau) + c_{i+1}\varphi_2(\tau) + c_{i+2}\varphi_3(\tau) + c_{i+3}\varphi_4(\tau), & t \in [T_i, T_{i+1}], \\ 0, & t \notin [T_i, T_{i+1}]. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что $\tilde{g}(t)$ непрерывна вместе со своими первой и второй производной в узловых точках и, стало быть, всюду.

Для определения коэффициентов

$$c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2},$$

имеем следующую переопределенную систему, имеющую так называемую ленточную структуру.

Интервал $[T_1, T_2]$:

$$\begin{aligned} z_0 &= c_1\varphi_1(0) + c_2\varphi_2(0) + c_3\varphi_3(0) + c_4\varphi_4(0), \\ z_1 &= c_1\varphi_1(\Delta\tau) + c_2\varphi_2(\Delta\tau) + c_3\varphi_3(\Delta\tau) + c_4\varphi_4(\Delta\tau), \\ z_2 &= c_1\varphi_1(2\Delta\tau) + c_2\varphi_2(2\Delta\tau) + c_3\varphi_3(2\Delta\tau) + c_4\varphi_4(2\Delta\tau), \\ &\dots \\ z_m &= c_1\varphi_1(1) + c_2\varphi_2(1) + c_3\varphi_3(1) + c_4\varphi_4(1). \end{aligned}$$

Интервал $[T_2, T_3]$:

$$\begin{aligned} z_{m+1} &= c_2\varphi_1(\Delta\tau) + c_3\varphi_2(\Delta\tau) + c_4\varphi_3(\Delta\tau) + c_5\varphi_4(\Delta\tau), \\ &\dots \\ z_{2m} &= c_2\varphi_1(1) + c_3\varphi_2(1) + c_4\varphi_3(1) + c_5\varphi_4(1). \end{aligned}$$

Интервал $[T_{n-1}, T_n]$:

$$\begin{aligned} &\dots \\ z_N &= c_{n-1}\varphi_1(1) + c_n\varphi_2(1) + c_{n+1}\varphi_3(1) + c_{n+2}\varphi_4(1). \end{aligned}$$

Решение этой системы обычно находят по методу наименьших квадратов.

Заметим, что алгоритм сглаживания может успешно применяться, если некоторые из измерений или даже целые блоки таких измерений отсутствуют.

Лекция 12

Критерий ортогональности и критерий условного среднего

Рассматривается задача оценивания, которая служит основой многочисленных модификаций метода наименьших квадратов. Из нее, в частности, следует и предыдущий результат.

Рассматриваются два случайных вектора $x(n \times 1)$ и $z(m \times 1)$ с известными характеристиками:

$$\begin{aligned}\mu_x &= M[x], & \mu_z &= M[z], \\ P_{xx} &= M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^\top], & P_{zz} &= M[\overset{\circ}{z}\overset{\circ}{z}^\top], & P_{xz} &= M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{z}^\top].\end{aligned}$$

Эти характеристики будем называть априорной информацией.

Ставится задача построения оценки скалярной величины $\alpha = c^\top x$, где $c(n \times 1)$ — известный вектор.

В рамках априорной информации в качестве оценки $\tilde{\alpha}$ величины α естественно принять ее математическое ожидание, т.е. положить $\tilde{\alpha} = c^\top \mu_x$. Ошибка оценки $\Delta\alpha = \alpha - \tilde{\alpha}$. Мерой ошибки оценки служит дисперсия $D[\Delta\alpha] = M[(c^\top \overset{\circ}{x})^2] = M[c^\top \overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^\top c] = c^\top P_{xx} c$.

Пусть теперь измеряется вектор z , и результат измерения известен. Поскольку известна мера линейной связи двух векторов x и z (задана матрица P_{xz}), то возникает задача получения оценки величины α с учетом измерения z .

Будем искать линейную, несмещенную и оптимальную оценку при условии, что критерием оптимальности служит минимум дисперсии ошибки оценки $\Delta\alpha$.

1. *Линейность.* Оценка $\tilde{\alpha}$ ищется в виде

$$\tilde{\alpha} = \gamma^1{}^\top \mu_x + \gamma^2{}^\top \mu_z + \gamma^3{}^\top z,$$

где векторы γ^1, γ^2 и γ^3 подлежат определению.

2. *Несмещенность.* Условие несмещенности означает, что в среднем оценивание приводит к точному результату, т.е. $M[\Delta\alpha] = 0$. Имеем

$$M[\Delta\alpha] = M[c^\top x - (\gamma^1{}^\top \mu_x + \gamma^2{}^\top \mu_z + \gamma^3{}^\top z)] = (c - \gamma^1)^\top \mu_x - (\gamma^2 + \gamma^3)^\top \mu_z,$$

отсюда $\gamma^1 = c$, $\gamma^2 = -\gamma^3$. Переобозначим $\gamma^3 = \varkappa$, тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} &= c^\top \mu_x + \varkappa^\top (z - \mu_z), \\ \Delta\alpha &= c^\top \overset{\circ}{x} - \varkappa^\top \overset{\circ}{z}.\end{aligned}$$

Вектор $\varkappa$ подлежит дальнейшему определению.

3. *Оптимальность.*

$$D[\Delta\alpha] = M[(\Delta\alpha)^2] = c^\top P_{xx} c + \varkappa^\top P_{zz} \varkappa - 2c^\top P_{xz} \varkappa.$$

Условие оптимальности имеет вид

$$\frac{\partial D[\Delta\alpha]}{\partial \varkappa} = 0, \tag{12.1}$$

откуда следует

$$\varkappa^\top = c^\top P_{xz} P_{zz}^{-1} = c^\top K, \tag{12.2}$$

где $K = P_{xz} P_{zz}^{-1}$.

Если в качестве оценки $\tilde{x}$ вектора x выбрать

$$\tilde{x} = \mu_x + K(z - \mu_z), \tag{12.3}$$

то при всяком c оценка $\tilde{\alpha} = c^\top \tilde{x}$ оптимальна.

Мерой ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$ вектора x служит ковариация $P_{\Delta x} = M[\Delta x \Delta x^\top] = M[(\overset{\circ}{x} - K \overset{\circ}{z})(\overset{\circ}{x} - K \overset{\circ}{z})^\top]$. После выкладок с учетом (12.2) получаем

$$P_{\Delta x} = P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx}. \tag{12.4}$$

Мерой ошибки оценки величины α служит дисперсия

$$D[\Delta\alpha] = c^\top P_{\Delta x} c.$$

Величины $\tilde{x}$ и $\tilde{P}_{xx}$ можно интерпретировать как апостериорные характеристики (условные, уточненные в результате учета измерения z). Результаты, сведенные в формулы (12.2), (12.3), позволяют критерий оптимальности (12.1) сформулировать в виде критерия ортогональности: оценка $\tilde{x}$ оптимальна, если ошибка оценки ортогональна измерениям (т.е. не коррелирована с ними):

$$M[\Delta x z^\top] = 0. \quad (12.5)$$

В самом деле, из (12.5) следует (12.1) с учетом того, что $\Delta x = \overset{\circ}{x} - K\overset{\circ}{z}$.

Как уже говорилось, критерий (12.5) служит отражением простого эвристического рассуждения: оптимальная оценка должна вобрать в себя всю информацию об оцениваемой величине, содержащуюся в измерениях, поэтому ошибка оценки не должна быть связана с измерениями.

Ввиду важности полученного результата дадим ему несколько иную интерпретацию, напрямую используя нормальность закона распределения случайных векторов x и z . Оценка $\tilde{x}$ будет определяться как условное математическое ожидание.

Пусть случайный вектор

$$u = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

распределен по нормальному закону с характеристиками

$$\begin{aligned} P_u &= M \begin{bmatrix} \overset{\circ}{u} \overset{\circ}{u}^\top \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{pmatrix}, \quad P_{xz} = P_{zx}^\top, \\ \mu_u &= M[u] = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Функция плотности вероятности $f(u) = f(x, z)$ вектора u записывается в следующем виде:

$$f(u) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m+n}{2}} |P_u|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (u - \mu_u)^\top P_u^{-1} (u - \mu_u) \right\}. \quad (12.7)$$

Пусть вектор z доступен измерению. Требуется уточнить априорную характеристику $M[x]$ случайного вектора x и определить соответствующую ковариацию.

Для решения этой задачи естественно воспользоваться формулой условной вероятности:

$$f(x|z) = \frac{f(x, z)}{f(z)},$$

где функция распределения $f(x, z)$ определяется соотношением (12.7), а функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P_{zz}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z - \mu_z)^\top P_{zz}^{-1} (z - \mu_z) \right\}.$$

Обозначим через $\mu_{x|z}$ и $P_{x|z}$ условное математическое ожидание и условную ковариационную матрицу. Тогда

$$\begin{aligned} f(x|z) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P_{x|z}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu_{x|z})^\top P_{x|z}^{-1} (x - \mu_{x|z}) \right\}, \\ P_{x|z} &= M \left[(x - \mu_{x|z}) (x - \mu_{x|z})^\top | z \right]. \end{aligned}$$

Далее нам понадобится соотношение

$$P_u^{-1} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xz} \\ P_{zx} & P_{zz} \end{pmatrix}^{-1} = N = \begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xz} \\ N_{zx} & N_{zz} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} N_{xx} &= (P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx})^{-1}, \quad N_{zz} = (P_{zz} - P_{zx} P_{xx}^{-1} P_{xz})^{-1}, \\ N_{xz} &= - (P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx})^{-1} P_{xz} P_{zz}^{-1}. \end{aligned}$$

Справедливость последних соотношений непосредственно следует из равенства $P_u N = E$.

Применяя формулу Байеса и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем уже известный результат

$$\begin{aligned} \mu_{x|z} &= \mu_x + P_{xz} P_{zz}^{-1} (z - \mu_z), \\ P_{x|z} &= P_{xx} - P_{xz} P_{zz}^{-1} P_{zx}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Рассмотрим частный случай, когда вектор z линейно зависит от вектора x , т.е.

$$z = Hx + r,$$

где H — известная матрица, r — случайный вектор с нулевым средним, трактуемый как погрешность измерения.

Пусть заданы априорные характеристики

$$\mu_x = M[x], \quad P_{xx} = M[\overset{\circ}{x}x^\top], \quad R = M[r r^\top],$$

и, кроме того, предположим, что вектор r не коррелирован с оцениваемым вектором x :

$$M[\overset{\circ}{x}r^\top] = 0.$$

Целесообразно ввести обозначения, в которых априорность фиксируется верхним индексом « $-$ », апостериорность — верхним индексом « $+$ »:

$$\tilde{x}^- = \mu_x, \quad P_x^- = P_{xx}.$$

После очевидных выкладок имеем

$$P_z^- = P_{zz} = H P_x^- H^\top + R, \quad P_{xz} = P_x^- H^\top, \quad \mu_z = H \mu_x = H \tilde{x}^-.$$

Взамен соотношений (12.8) получим

$$\begin{aligned} \tilde{x}^+ &= \tilde{x}^- + K(z - H \tilde{x}^-), \\ K &= P_x^- H^\top (H P_x^- H^\top + R)^{-1}, \\ P_x^+ &= P_x^- - K H P_x^-. \end{aligned} \tag{12.9}$$

Замечание 16. Критерий условного среднего заранее не требует выполнения условий, линейности, несмещенности и ортогональности, а взамен этого требуется, чтобы векторы x и z имели нормальный закон распределения.

Лекция 13

Дискретный фильтр Калмана

Дальнейшее изложение посвящено динамическим задачам оценивания, когда поведение во времени оцениваемой величины x описывается линейными стохастическими (непрерывными или дискретными) уравнениями. При этом будет использоваться только одна форма критерия оптимальности — критерий ортогональности. Обсуждение указанного круга задач начнем с дискретного случая.

Термин «фильтрация» означает, что речь идет об алгоритме выделения полезной информации на фоне помех.

1. Алгоритмы дискретного фильтра Калмана

Сначала опишем дискретный вариант задачи, используя при этом результаты лекций 10 и 12.

Поведение динамической системы подчиняется уравнению

$$x_{j+1} = \Phi_j x_j + q_j,$$

где x_j — вектор состояния в момент t_j ; q_j — дискретный белый шум с известной интенсивностью — ковариационной матрицей Q_j ; Φ_j — известная переходная матрица.

Заданы $\tilde{x}_0 = M[x_0]$, $P_0 = M[(x_0 - \tilde{x}_0)(x_0 - \tilde{x}_0)^\top]$. В моменты времени $j = 0, 1, 2, \dots$ поступает информация $z_0, z_1, \dots$:

$$z_j = H_j x_j + r_j.$$

Погрешность информации r_j — некоррелированный во времени вектор с нулевым средним и известной интенсивностью R_j : $M[r_j r_i^\top] = R_j \delta_{ji}$. Кроме того, полагаем $M[x_i r_j^\top] = 0$.

Требуется в каждый момент j получить оценку $\tilde{x}_j$, удовлетворяющую условию линейности, несмещенности, оптимальности. Введем обозначения:

$\tilde{x}_j^-$ — оценка вектора x в момент времени j , использующая измерения $z_0, \dots, z_{j-1}$ (априорная оценка $\tilde{x}_j^- = M[x_j | z_0, z_1, \dots, z_{j-1}]$);

$\tilde{x}_j^+$ — оценка вектора x в момент времени j , использующая измерения $z_0, \dots, z_{j-1}, z_j$ (апостериорная оценка $\tilde{x}_j^+ = M[x_j | z_0, z_1, \dots, z_j]$);

P_j^- — ковариация ошибки априорной оценки вектора x в момент j ;

P_j^+ — ковариация ошибки апостериорной оценки вектора x в момент j .

Для каждого момента времени j , $j = 0, 1, \dots$ задача решена на лекции 12, откуда следует, что процедуру оценивания можно представить в виде повторяющихся от момента к моменту циклов, каждый из которых состоит из двух этапов — этапа коррекции и этапа прогноза.

Этап коррекции — переход от априорных оценок к апостериорным в момент j . В соответствии с формулами (12.9)

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j^+ &= \tilde{x}_j^- + K_j(z_j - H_j \tilde{x}_j^-), \\ K_j &= P_j^- H_j^\top (H_j P_j^- H_j^\top + R_j)^{-1}, \\ P_j^+ &= (E - K_j H_j) P_j^-. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Этап прогноза — переход от апостериорных оценок $\tilde{x}^+$ в момент j к априорным оценкам $\tilde{x}^-$ в момент $j + 1$. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{j+1}^- &= \Phi_j \tilde{x}_j^+, \\ P_{j+1}^- &= \Phi_j P_j^+ \Phi_j^\top + Q_j. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Кроме того, для включения начального цикла надо положить

$$\tilde{x}_0^- = \tilde{x}_0, \quad P_0^- = P_0. \tag{13.3}$$

Алгоритм оценивания, описываемый соотношениями (13.1)–(13.3), носит название дискретного фильтра Калмана.

Пояснение. Из самой процедуры получения оценок $\tilde{x}_j^+$ следует, что ошибка оценки $\Delta x_j = x_j - \tilde{x}_j^+$ ортогональна текущему измерению z_j :

$$M[\Delta x_j z_j^\top] = 0, \quad \hat{z}_j = z_j - H_j \tilde{x}_j^-.$$

Но она также ортогональна всем предшествующим измерениям. Этот факт проиллюстрируем на примере первых двух измерений. Оценка $\tilde{x}_0^+$ в начальный момент строится из условия

$$M[\Delta x_0 \overset{\circ}{z}_0^\top] = 0, \quad \Delta x_0 = x_0 - \tilde{x}_0^+, \quad \overset{\circ}{z}_0 = z_0 - H_0 \tilde{x}_0,$$

где $\tilde{x}_0$ — априорное математическое ожидание величины x_0 .

Имеем

$$x_1 = \Phi_0 x_0 + q_0, \quad z_1 = H_1 x_1 + r_1.$$

Оценка $\tilde{x}_1^+$ в момент времени t_1 строится из условия

$$M[\Delta x_1 \overset{\circ}{z}_1^\top] = 0, \quad \tilde{x}_1^- = \Phi_0 \tilde{x}_0^+, \quad \tilde{x}_1^+ = \tilde{x}_1^- + K_1(z_1 - H_1 \tilde{x}_1^-).$$

Покажем, что величина Δx_1 ортогональна измерению z_0 . Для этого ошибка Δx_1 должна иметь следующую структуру:

$$\Delta x_1 = A_1 \Delta x_0 + A_2 q_0 + A_3 r_1.$$

Из написанного выше следует

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - \tilde{x}_1^- - K_1 z_1 + K_1 H_1 \tilde{x}_1^-; \\ x_1 - \tilde{x}_1^- &= \Phi_0 x_0 + q_0 - \Phi_0 \tilde{x}_0^+ = \Phi_0 \Delta x_0 + q_0; \\ z_1 - H_1 \tilde{x}_1^- &= H_1 x_1 + r_1 - H_1 \tilde{x}_1^- = \\ &= H_1(x_1 - \tilde{x}_1^-) + r_1 = H_1(\Phi_0 \Delta x_0 + q_0) + r_1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что величина Δx_1 имеет требуемую структуру. Отсюда по индукции следует

$$\Delta x_j \perp z_{j-1} \perp z_{j-2} \perp \dots \perp z_0.$$

Возможно обобщение алгоритма дискретного фильтра Калмана на случай коррелированности шумов системы и шумов измерений. Пусть дополнительно $M[q_j r_j^\top] = L_j$, тогда соотношения, описывающие этап коррекции, остаются прежними, а ковариационное соотношение этапа прогноза будет таким:

$$P_{j+1}^- = \Phi_j P_j^+ \Phi_j^\top + Q_j - \Phi_j K_j L_j^\top - L_j K_j^\top \Phi_j^\top. \quad (13.4)$$

В частном случае, нередко встречающемся на практике, при

$$q_j = q_j^* + \Psi_j r_j, \quad M[q_j^* r_j^\top] = 0,$$

получим

$$P_{j+1}^- = \Phi_j P_j^+ \Phi_j^\top + Q_j^* + \Psi_j R_j \Psi_j^\top - \Phi_j K_j R_j \Psi_j^\top - \Psi_j R_j K_j^\top \Phi_j^\top, \quad (13.5)$$

где $Q_j^* = M[q_j^* q_j^{*\top}]$.

2. Некоторые свойства дискретного фильтра Калмана

Рассмотрим стационарный случай: $\Phi_j = \Phi = \text{const}$, $Q_j = Q = \text{const}$, $R_j = R = \text{const}$. Поскольку $Q \geq 0$, то существует представление (неоднозначное) $Q = BB^\top$, где матрица B называется квадратным корнем из матрицы Q .

Теорема 16. Пусть пара (Φ, H) наблюдаема, пара (Φ, B) управляема. Тогда при бесконечном времени наблюдения:

1) существуют P_∞^- , P_∞^+ , K_∞ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} P_\infty^- &= \Phi P_\infty^+ \Phi^\top + Q, \\ P_\infty^+ &= P_\infty^- - K_\infty H P_\infty^-, \\ K_\infty &= P_\infty^- H^\top (H P_\infty^- H^\top + R)^{-1}; \end{aligned}$$

2) уравнения ошибок относительно величин $\Delta x_j^- = x_j - \tilde{x}_j^-$, $\Delta x_j^+ = x_j - \tilde{x}_j^+$

$$\begin{aligned} \Delta x_{j+1}^- &= \Phi \Delta x_j^+ + q_j, \\ \Delta x_j^+ &= (E - K_\infty H) \Delta x_j^- - K_\infty r_j \end{aligned}$$

таковы, что при $q_j = 0$, $r_j = 0$ выполнено

$$\Delta x_j^-, \Delta x_j^+ \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Более подробно случай стационарности будет рассмотрен в разделе, посвященном непрерывному фильтру Калмана.

Пример 13.1. Пусть

$$\begin{aligned}x_{j+1} &= x_j + q_j, \\ z_j &= x_j + r_j, \quad Q = 1, \quad R = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Здесь $\Phi = 1$, $H = 1$, $K_j = \frac{P_j^-}{(P_j^- + 3/4)}$. Найдем установившееся значение K и вид фильтра:

$$\begin{aligned}P_\infty^- &= \frac{3}{2}, \quad P_\infty^+ = \frac{1}{2}, \quad K_\infty = \frac{2}{3}, \\ \tilde{x}_{j+1}^- &= \tilde{x}_j^+, \quad \tilde{x}_j^+ = \tilde{x}_j^- + \frac{2}{3}(z_j - \tilde{x}_j^-).\end{aligned}$$

Уравнение ошибок таково:

$$\Delta x_{j+1}^+ = \frac{1}{3}\Delta x_j^+ + \frac{1}{3}q_j - \frac{2}{3}r_j,$$

при этом однородное уравнение

$$\Delta x_{j+1}^+ = \frac{1}{3}\Delta x_j^+$$

асимптотически устойчиво.

Полученные результаты, связанные с дискретным фильтром Калмана, позволяют придать иную форму рассмотренному ранее (см. лекцию 11) методу наименьших квадратов в задаче решения переопределенной системы алгебраических уравнений $z = Hx$.

Рассматривая компоненты z_j как последовательные измерения, методу наименьших квадратов можно придать рекуррентную форму, интерпретируя индекс j как дискретный отсчет времени. Будем считать, что в начальный момент $j = 0$. В качестве начальной ковариации вектора x примем величину $P_0 = \varkappa E$, где $\varkappa$ — достаточно большое число ($\varkappa \gg 1$). Далее используем процедуру фильтра Калмана, исключив из неё этап прогноза. Будем считать, что все измерения некоррелированы между собой и стохастически равноточны. Положим для определенности, что $M[r_j^2] = 1$.

Первый шаг:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^1 &= \tilde{x}^0 + K_1(z_1 - h_1^\top \tilde{x}^0), \\ P_1 &= P_0 - P_0 h_1 (h_1^\top P_0 h_1 + 1)^{-1} h_1^\top P_0, \\ K_1 &= P_0 h_1 (h_1^\top P_0 h_1 + 1)^{-1}.\end{aligned}$$

Второй шаг:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^2 &= \tilde{x}^1 + K_2(z_2 - h_2^\top \tilde{x}^{(1)}), \\ P_2 &= P_1 - P_1 h_2 (h_2^\top P_1 h_2 + 1)^{-1} h_2^\top P_1, \\ K_2 &= P_1 h_2 (h_2^\top P_1 h_2 + 1)^{-1}.\end{aligned}$$

.....

j -ый шаг:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^j &= \tilde{x}^{j-1} + K_j(z_j - h_j^\top \tilde{x}^{j-1}), \\ P_j &= P_{j-1} - P_{j-1} h_j (h_j^\top P_{j-1} h_j + 1)^{-1} h_j^\top P_{j-1}, \\ K_j &= P_{j-1} h_j (h_j^\top P_{j-1} h_j + 1)^{-1}.\end{aligned}$$

Последний шаг при $j = m$.

Очевидно, что при достаточно большой величине $\sqrt{\varkappa}$, оценка $\tilde{x}^{(m)}$ с высокой степенью точности совпадает с оценкой $\hat{x} = (H^\top H)^{-1} H^\top z$.

3. Реализация дискретного фильтра Калмана методом квадратного корня.

На практике обычно используется численная модификация дискретного фильтра Калмана, основанная на так называемом методе квадратного корня.

Метод квадратного корня состоит в том, что ковариационная матрица P представляется либо в виде разложения $P = SS^\top$, где S — верхне- или нижнетреугольная матрица, либо в виде $P =$

$UDU^\top$, где U – верхне- или нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, причем $d_j > 0$. При таком представлении, каковы бы ни были невырожденные матрицы S и D , матрица P будет положительно определенной.

Метод корня в частности позволяет избежать потери положительной определенности ковариационной матрицы P на этапе коррекции при вычитании, когда разности соизмеримы с квантом дискретизации по уровню. Далее рассматривается только вариант, когда P представляется в виде $P = SS^\top$.

В соответствии со сказанным всюду в соотношениях, описывающих фильтр Калмана, заменим ковариацию P на произведение $SS^\top$, где $S = P^{1/2}$ – треугольная матрица.

Рассмотрим сначала случай скалярного измерения:

$$z_j = h_j^\top x_j + r_j, \quad M[r_j] = 0, \quad M[r_j r_i] = R_j \delta_{ji}.$$

Этап коррекции (нижние индексы пока опускаем). Имеем

$$P^+ = P^- - P^- h (h^\top P^- h + R)^{-1} h^\top P^-,$$

$$\tilde{x}^+ = \tilde{x}^- + K(z - h^\top \tilde{x}^-), \quad K = P^- h (h^\top P^- h + R)^{-1}.$$

Положим $P^- = S^- S^{-\top}$, $P^+ = S^+ S^{+\top}$. Получим

$$S^+ S^{+\top} = S^- S^{-\top} - S^- S^{-\top} h (h^\top S^- S^{-\top} h + R)^{-1} h^\top S^- S^{-\top},$$

$$K = S^- S^{-\top} h (h^\top S^- S^{-\top} h + R)^{-1}.$$

Введем обозначения $f = S^{-\top} h$, $\alpha = f^\top f + R$. Окончательно получим

$$S^+ = S^- \left[E - \frac{1}{\alpha} f f^\top \right]^{1/2}, \quad K = \frac{1}{\alpha} S^- f. \quad (13.6)$$

Если z – вектор и матрица R – диагональна (составляющие вектора r некоррелированы между собой), этап коррекции реализуется путем последовательной обработки каждой компоненты вектора измерения, причем выходные (апостериорные) значения S и x каждого шага служат входной информацией следующего шага. Результат обработки последней координаты вектора z служит исходной информацией для перехода к этапу прогноза.

Замечание. Если матрица R не диагональна, то невырожденным преобразованием C вводится вектор

$$z^* = Cz = CHx + Cr = H^* x + r^*$$

такой, что координаты вектора r^* некоррелированы.

Например, матрицу C можно выбрать так, чтобы $M[r^* r^{*\top}] = E$. Имеем в этом случае $M[r^* r^{*\top}] = CRC^\top = E$. Откуда $C = R^{-1/2}$ – обратная матрица к матрице квадратного корня $R^{1/2}$.

Этап прогноза.

$$x_{j+1}^- = \Phi_j x_j^+, \quad P_{j+1}^- = \Phi_j P_j^+ \Phi_j^\top + Q_j,$$

или

$$S_{j+1}^- S_{j+1}^{-\top} = \Phi_j S_{j+1}^+ S_{j+1}^{+\top} \Phi_j^\top + Q_j.$$

Обозначим $W_j = \Phi_j S_{j+1}^+$. Тогда

$$S_{j+1}^- = [W_j W_j^\top + Q_j]^{1/2}.$$

Лекция 14

Непрерывный фильтр Калмана

Рассматривается непрерывная линейная динамическая система, поведение которой описывается вектором состояния

$$\dot{x} = A(t)x + q. \quad (14.1)$$

Возмущения $q(t)$ представляют собой нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^\top(s)] = Q(t)\delta(t-s), \quad Q(t) \geq 0.$$

Заданы также начальные условия:

$$\tilde{x}(t_0) = M[x(t_0)], \quad P(t_0) = M\left[\{x(t_0) - \tilde{x}(t_0)\}\{x(t_0) - \tilde{x}(t_0)\}^\top\right] \geq 0.$$

Возмущение $q(t)$ предполагается независимым от начального состояния системы $x(t_0)$:

$$M[x(t_0)q^\top(t)] = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Пусть информация

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t), \quad M[r(t)] = 0, \quad (14.2)$$

поступает непрерывно на интервале $[t_0, t]$.

Погрешность информации $r(t)$ — случайный нормальный процесс типа белого шума:

$$M[r(t)r^\top(s)] = R(t)\delta(t-s), \quad R(t) > 0.$$

Кроме того

$$M[x(t_0)r^\top(t)] = 0, \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{и} \quad M[r(t)q^\top(s)] = 0, \quad \forall t, s.$$

Требуется в любой момент времени $t > t_0$ определить оценку $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности и ортогональности.

1. *Линейность.* Оценку будем искать в виде

$$\dot{\tilde{x}} = \Gamma_1 \tilde{x} + \Gamma_2 z,$$

где матрицы Γ_1 и Γ_2 подлежат выбору.

2. *Несмещенность.* Запишем уравнение ошибок оценки относительно величины $\Delta x = x - \tilde{x}$:

$$\Delta \dot{x} = \Gamma_1 \Delta x + (A - \Gamma_1 - \Gamma_2 H)x + q - \Gamma_2 r.$$

Требование $M[\Delta x] = 0$ приводит к условию

$$A - \Gamma_1 - \Gamma_2 H = 0 \quad \text{или} \quad \Gamma_1 = A - KH, \quad K = \Gamma_2.$$

Таким образом, уравнение для оценки x имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + K(z - H\tilde{x}).$$

Матрица K подлежит определению.

3. *Ортогональность.* Условие ортогональности имеет вид

$$M[\Delta x(t)\dot{z}^\top(s)] = 0, \quad t_0 \leq s \leq t,$$

где Δx служит решением уравнения ошибок

$$\Delta \dot{x} = (A - KH)\Delta x + q - Kr \quad (14.3)$$

и

$$\dot{z}(s) = z(s) - M[z(s)] = z(s) - H\tilde{x} = H(s)\Delta x + r(s).$$

Отсюда

$$P_x(t, s)H^\top(s) + M[\Delta x(t)r^\top(s)] = 0, \quad (14.4)$$

где $P_x(t, s) = M[\Delta x(t)\Delta x^\top(s)]$.

Запишем решение уравнения (14.3):

$$\Delta x(t) = \Phi(t, t_0)\Delta x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) [q(\tau) - K(\tau)r(\tau)] d\tau,$$

где $\Phi_k(t, t_0)$ — переходная матрица однородной линейной системы (14.3).

Далее получим

$$\begin{aligned} M[\Delta x(t)r^\top(s)] &= - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(\tau) M[r(\tau)r^\top(s)] d\tau = \\ &= - \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) K(\tau) R(\tau) \delta(\tau - s) d\tau = -\Phi(t, s) K(s) R(s). \end{aligned}$$

Уравнение (14.4) теперь запишется так:

$$P_x(t, s) H^\top(s) - \Phi(t, s) K(s) R(s) = 0.$$

Устремляя $s \rightarrow t$, находим $K(t)$:

$$K(t) = P_x(t) H^\top(t) R^{-1}(t).$$

Ковариационная матрица $P_x(t) = M[\Delta x(t) \Delta x^\top(t)]$ находится как решение дисперсионного уравнения, соответствующего уравнению (14.3):

$$\begin{aligned} \dot{P}_x(t) &= (A(t) - K(t)H(t))P_x(t) + \\ &+ P_x(t)(A(t) - K(t)H(t))^\top + Q(t) + K(t)R(t)K^\top(t). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Подставив выражение для матричного коэффициента усиления K в (14.5), получим

$$\begin{aligned} \dot{P}_x(t) &= A(t)P_x(t) + P_x(t)A^\top(t) + Q(t) - \\ &- P_x(t)H^\top(t)R^{-1}(t)H(t)P_x(t). \end{aligned} \quad (14.6)$$

Уравнение вида (14.6) в теории дифференциальных уравнений носит название **уравнения Риккати**.

Алгоритм оценивания, описываемый соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A(t)\tilde{x}(t) + K(t)(z(t) - H(t)\tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \\ K(t) &= P_x(t)H^\top(t)R^{-1}(t), \\ \dot{P}_x(t) &= A(t)P_x(t) + P_x(t)A^\top(t) + Q(t) - P_x(t)H^\top(t)R^{-1}(t)H(t)P_x(t), \\ P_x(t_0) &= P_0 \end{aligned} \quad (14.7)$$

носит название **непрерывного фильтра Калмана**.

Алгоритм, доставляющий оценку вектора состояния в соответствии с формулами (14.7), вырождается при $R = 0$ (т.е. если измерение не содержит шума r). Такая ситуация возникает, например, когда коррелированный шум в измерении представляется в виде формирующего уравнения и включается в вектор состояния. Один из удобных «инженерных» вариантов решения такой задачи состоит в том, что вводится некоторая матрица R , соответствующая фиктивному шуму r малой интенсивности:

$$M[rr^\top] = \varepsilon E \quad (\varepsilon > 0 \text{ — малый параметр}).$$

Далее выясняются некоторые свойства алгоритма (14.7) и, в частности, уравнения Риккати.

1. Представление уравнения Риккати в виде линейных уравнений большей размерности

Для краткости обозначим $H^\top R^{-1}H = C > 0$. Прежде всего заметим, что уравнение

$$\dot{P} = AP + PA^\top + Q - PCP \quad (14.8)$$

при $Q = 0$ сводится к линейному путем перехода к обратной матрице $N = P^{-1}$:

$$\dot{N} = -NA - A^\top N + C.$$

Рассмотрим совокупность соотношений, определяющих матрицы Ψ_1, Ψ_2 :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= A\Psi_1 + Q\Psi_2, \quad \Psi_1(t_0) = P_0, \\ \dot{\Psi}_2 &= C\Psi_1 - A^\top\Psi_2, \quad \Psi_2(t_0) = E, \end{aligned} \quad (14.9)$$

и определим матрицу P^* соотношением

$$\Psi_1 = P^*\Psi_2. \quad (14.10)$$

Покажем, что соотношения (14.9) эквивалентны уравнению (14.8) в том смысле, что задают одну и ту же функцию $P(t) = P^*(t)$. Продифференцируем соотношение (14.10):

$$\dot{\Psi}_1 = \dot{P}^* \Psi_2 + P^* \dot{\Psi}_2$$

и, подставив выражения для производных $\dot{\Psi}_1$ и $\dot{\Psi}_2$ из соотношений (14.9), получим

$$\left(\dot{P}^* - AP^* - P^* A^\top - Q + P^* CP^* \right) \Psi_2 = 0.$$

Если Ψ_2 — невырожденная матрица, то из последнего соотношения следует, что матрица P удовлетворяет уравнению (14.8), т.е. $P^* = P$. Но

$$\dot{\Psi}_2 = (CP - A^\top) \Psi_2, \quad \Psi_2(t_0) = E,$$

т.е. Ψ_2 — переходная матрица и, стало быть, $\det \Psi_2 \neq 0$. Соответственно матрица P может быть найдена по формуле

$$P = \Psi_1 \Psi_2^{-1}.$$

Таким образом, нелинейное уравнение Риккати сведено к двум линейным уравнениям (14.9).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $H = 0$. Тогда в (14.8) матрица $C = 0$, и уравнение Риккати трансформируется в дисперсионное уравнение. Обозначим через $\Phi(t, t_0)$ переходную матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = E.$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \Psi_2(t) &= \Phi^\top(t_0, t), \\ \Psi_1(t) &= \Phi(t, t_0) \left(P_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) Q(\tau) \Phi^\top(t_0, \tau) d\tau \right), \\ P(t) &= \Phi(t, t_0) \left(P_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau) Q(\tau) \Phi^\top(t_0, \tau) d\tau \right) \Phi^\top(t, t_0). \end{aligned}$$

2. Пусть $Q = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \Phi(t, t_0) P_0, \\ \Psi_2(t) &= \Phi^\top(t_0, t) + \left(\int_{t_0}^t \Phi^\top(\tau, t_0) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \right) P_0, \\ P(t) &= \Psi_1 \Psi_2^{-1}. \end{aligned}$$

2. Устойчивость фильтра Калмана

Обратимся к алгоритму оценки (14.7). Уравнение ошибок оценки относительно величины $\Delta x = x - \tilde{x}$ имеет вид

$$\dot{\Delta x} = A_K \Delta x + q - Kr, \quad A_K = A - KH. \quad (14.11)$$

Важнейшим свидетельством работоспособности алгоритма (14.7) является устойчивость (асимптотическая устойчивость) уравнения ошибок (14.11) при $q = r = 0$. Ниже без доказательства приводятся три теоремы, устанавливающие условия устойчивости фильтра Калмана для некоторых важных практических случаев.

Теорема 17. Пусть $P(t)$ — положительно определенная и ограниченная для всех $t > t_0$ матрица

$$\rho_1^2 E < P(t) < \rho_2^2 E, \quad \rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const},$$

являющаяся решением уравнения Риккати

$$\dot{P} = AP + PA^\top + Q - PCP. \quad (14.12)$$

Тогда уравнение (14.11) устойчиво.

Пусть, кроме того, пара (A, H) наблюдаема. Тогда уравнение

$$\Delta \dot{x} = A_K \Delta x \quad (14.13)$$

асимптотически устойчиво.

Теорема 18. Пусть P_1 и P_2 — два решения уравнения Риккати

$$\dot{P} = AP + PA^\top + Q - PCP,$$

соответствующие двум возможным начальным значениям $P_1(t_0)$ и $P_2(t_0)$. Решения уравнений

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}_1 &= A_{K_1}\Delta x_1, & A_{K_1} &= A - K_1C, \\ \Delta\dot{x}_2 &= A_{K_2}\Delta x_2, & A_{K_2} &= A - K_2C\end{aligned}\tag{14.14}$$

устойчивы (соответственно асимптотически устойчивы). Тогда разность $\Delta P = P_2 - P_1$ ограничена (соответственно стремится к 0 при $t \rightarrow \infty$).

Вышеприведенная теорема позволяет положительно ответить на вопрос о возможности применения фильтра Калмана (14.7) в условиях, когда априорные стохастические характеристики динамической системы (14.1) известны приблизительно.

Замечание 17. По условиям теорем требуется ограниченность матрицы $P(t)$. Установить эту ограниченность можно либо из физических соображений, либо путем прямого моделирования алгоритма оценки.

Рассмотрим стационарный случай: A, H, Q, R — постоянные матрицы. Поскольку $Q \geq 0$, существует разложение $Q = BB^\top$. Обычно, как уже говорилось ранее, в качестве матрицы B выбирается либо верхне-, либо нижнетреугольная матрица.

Теорема 19. Пусть пара (A, H) наблюдаема, пара (A, B) управляема. Тогда:

1) Существует единственное установившееся решение P_∞ уравнения

$$\dot{P} = AP + PA^\top + Q - PCP, \quad P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t),$$

удовлетворяющее алгебраическому уравнению

$$AP_\infty + P_\infty A^\top + Q - P_\infty CP_\infty = 0.$$

2) Однородное уравнение

$$\Delta\dot{x} = (A - K_\infty H)\Delta x, \quad K_\infty = P_\infty H^\top R^{-1}$$

асимптотически устойчиво.

Лекция 15

Применение теории наблюдаемости и оценивания в инерциальной навигации

Теория наблюдаемости и оптимального оценивания находит самое широкое применение при построении бортовых алгоритмов **инерциальных навигационных систем (ИНС)**. Эти системы служат основой навигации самолетов, крылатых ракет, морских надводных и подводных судов, дефектоскопов, движущихся в газопроводах или нефтепроводах и т.д.

1. Приборы. Метод инерциальной навигации

Приборной основой систем, реализующих метод инерциальной навигации, служат два устройства:

- первое называется датчиком удельной силы, или ньютонометром (традиционно используется некорректный термин – акселерометр); далее применяется термин ньютонометр;
- второе устройство — датчик угловой скорости (ДУС) или функционально эквивалентная трем ДУС гиролаформа.

Моделью ньютонометра является однокомпонентный пружинный подвес с точечной чувствительной массой (см. рис. 15.1).

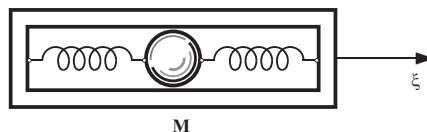


Рис. 15.1. Однокомпонентный ньютонометр.

На чувствительную массу ньютонометра (точка M), расположенную на движущемся в поле силы тяготения Земли объекте (например, на самолете), действуют две силы: сила $\vec{f}$, приложенная к массе со стороны пружины, и сила тяготения $\vec{g}^0$. Сила $\vec{f}$ направлена вдоль оси чувствительности $M\xi$ и определяется (измеряется) по деформации пружины.

Чтобы сделать более понятным принцип работы ньютонометра, представим, что он расположен на неподвижном относительно Земли основании так, что его ось чувствительности строго вертикальна (совпадает с направлением силы тяжести). За положительное направление оси чувствительности выбирается направление вверх. На чувствительную массу, которая считается единичной, действуют две силы: сила со стороны пружины $\vec{f}$ и сила тяжести $\vec{g}$, причем из-за неподвижности точки M $\vec{f} + \vec{g} = 0$, или $f_\xi = g$, где $g = |\vec{g}|$.

Блоку из трех однокомпонентных ньютонометров с ортогональными осями чувствительности может быть поставлен в соответствие пространственный ньютонометр с одной чувствительной массой, называемой приведенной (см. рис. 15.2). За счет нормировки ее можно считать единичной. Далее будем считать, что местоположения чувствительных масс однокомпонентных ньютонометров совпадают.

Модель датчика угловой скорости. Существующие датчики угловой скорости разнообразны по своей конструкции и основаны на различных физических принципах. В последнее время получили распространение лазерные и волоконно-оптические ДУС, в которых используется эффект Саньяка (вариант эффекта Доплера).

В качестве примера приведем краткое описание лазерного ДУС. Кольцевой лазерный гироскоп содержит замкнутый оптический резонатор, в котором с помощью лазера возбуждаются две встречные световые волны (лучи). Частота встречных волн одинакова, если резонатор не вращается. При вращении резонатора вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, возникает разность частот, пропорциональная скорости вращения. Встречные лучи сводятся на призму и образуют интерференционную картину, по которой оценивается величина угловой скорости. Инерциальные системы, в которых используются датчики угловой скорости называют бескарданными. Существуют системы,

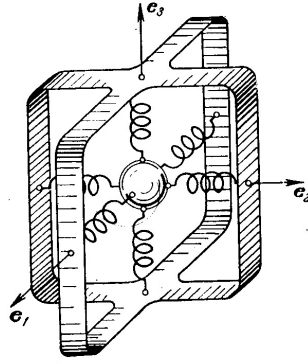


Рис. 15.2. Пространственный ньютонометр.

в которых вместо датчиков угловой скорости используются гироскопы. Здесь такие системы не рассматриваются.

Приборный трехгранник Mz . Ключевым понятием метода инерциальной навигации является понятие приборного трехгранника.

Ортогональный трехгранник Mz ($Mz_1z_2z_3$) жестко связан с осями чувствительности ньютонометров. А именно, с точностью до инструментальных погрешностей установки, оси чувствительности ньютонометров совпадают с осями приборного трехгранника.

Обычно датчики угловых скоростей располагаются в навигационной системе так, что их оси чувствительности с точностью до инструментальных погрешностей также совпадают с осями приборного трехгранника.

Метод инерциальной навигации. Опишем на словесном уровне метод инерциальной навигации. Он состоит, применительно к системам с датчиками угловых скоростей, в следующем (с некоторым повтором уже сказанного).

На борту движущегося объекта располагается инерциальная навигационная система, включающая в себя три однокомпонентных ньютонометра и три однокомпонентных датчика угловой скорости. Оси чувствительности ньютонометров и ДУС образуют (с точностью до инструментальных погрешностей) ортогональные трехгранники (системы координат), совпадающие друг с другом. Конструкция устанавливается на платформе, жестко связанной с корпусом объекта.

Вводится понятие **приборного** ортогонального (правого) трехгранника, оси которого с точностью до инструментальных погрешностей совпадают с осями чувствительности ньютонометров, и, тем самым, приборный трехгранник также жестко связывается с корпусом объекта. Под местоположением понимается положение приведенной чувствительной массы ньютонометров, обозначаемой точкой M .

Выбирается система координат с началом в центре Земли, называемая **опорной** или опорным трехгранником. Ставится задача определения координат и скоростей точки M в проекциях на оси этого трехгранника.

Чаще всего в качестве опорной системы координат выбирается ортогональный трехгранник, одна из осей которого параллельна направлению географической вертикали в точке M .

В этой системе координат записываются уравнения Ньютона движения материальной точки единичной массы под действием двух сил: силы тяготения $\vec{g}^0$ и внешней силы $\vec{f}$. Под внешней силой $\vec{f}$ понимается сила, действующая на приведенную чувствительную массу блока ньютонометров со стороны корпуса блока (применительно к модели ньютонометра, описанной выше, сила натяжения пружины). Ньютонометры измеряют именно эту силу. Сила $\vec{g}^0$ однозначно определяется координатами точки M в соответствии с принятой ее моделью. Вычисление координат и скоростей точки M (фазовых переменных) в осях опорного трехгранника осуществляется путем интегрирования дифференциальных уравнений Ньютона.

Поскольку при интегрировании уравнений Ньютона используется информация о внешней силе $\vec{f}$ в проекциях на оси опорного трехгранника, а измерение этих сил осуществляется в осях приборного трехгранника, не совпадающего с опорным, требуется их перепроектирование. Для этого следует определить ориентацию приборного трехгранника относительно опорного.

Ориентация находится интегрированием кинематических уравнений, входной информацией для которых служит абсолютная угловая скорость приборного трехгранника. Проекция угловой скорости на оси приборного трехгранника измеряются датчиками угловой скорости.

Для интегрирования уравнений Ньютона и кинематических уравнений требуется начальная информация о координатах и скоростях точки M и о начальной ориентации приборного трехгранника.

Интегрирование уравнений, структурно повторяющих опорные уравнения, осуществляется в компьютере навигационной системы, входной информацией которого служат показания ньютонометров и ДУС, а также информация о начальных условиях, указанная выше.

В реальности в вычислителе определяются трехгранники и навигационные параметры, отличные от реальных. Они называются **модельными**. Иначе, модельные трехгранники и модельные параметры могут рассматриваться как числовые образы реальных. Модельные параметры и трехгранники позволяют ввести понятие **модельной точки** M' в модельном пространстве.

Уравнения, описывающие поведение модельных величин относительно опорных, реальных, называются **уравнениями ошибок**. Свойства уравнений ошибок определяют свойства навигационной системы, а их решение — точность решения задачи навигации.

Далее для иллюстрации вышесказанного, рассмотрим упрощенный двумерный вариант задачи навигации с невращающейся Землей. При этом основные свойства метода инерциальной навигации сохраняются.

Неустойчивость уравнений ошибок вертикального канала ИНС. Рассмотрим частный случай, когда точка M неподвижна в инерциальном пространстве [18]. Для простоты будем считать, что поле тяготения Земли центральное, а Земля не вращается. К точке M приложены две силы: сила тяготения $\vec{g}^0$, направленная к центру Земли, равная по величине μ/r^2 , и уравновешивающая ее сила $\vec{f}$, противоположно направленная. Здесь μ — постоянная тяготения, r — расстояние от точки M до центра Земли.

Пусть погрешность начальной информации такова, что точка M' расположена на продолжении радиуса-вектора OM и $r' > r$. Предполагается, что других погрешностей в системе нет. Тогда к точке M' будут приложены модельная сила тяготения μ/r'^2 и внешняя сила f . Так как $r' > r$, то равновесие нарушается, и результирующая сила

$$\Delta f = f - \frac{\mu}{r'^2} = \mu \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} \right) > 0,$$

действующая на модельную точку M' , приводит к увеличению скорости рассогласования $\Delta \dot{r}$, поскольку эта сила Δf растет по мере удаления точки M' от M .

При малом $\Delta r = r' - r$ результирующая сила Δf , действующая на точку M' , в линейном приближении определяется соотношением

$$\Delta f = \frac{\mu}{r^2} - \frac{\mu}{(r + \Delta r)^2} \simeq 2\omega_0^2 \Delta r, \quad \text{где} \quad \omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3} = \frac{g}{r}.$$

Величина ω_0 носит название частоты Шулера по имени немецкого ученого Макса Шулера, который ввел понятие математического маятника, длина которого равна радиусу Земли. На поверхности Земли она равна примерно $1.243 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Величина ω_0 является также первой угловой космической скоростью.

Следовательно, уравнение Ньютона относительно малых Δr имеет вид

$$\Delta \ddot{r} - 2\omega_0^2 \Delta r = 0.$$

При начальных значениях $\Delta r_0 \neq 0$, $\Delta \dot{r}_0 = 0$ имеем

$$\Delta r(t) = \frac{\Delta r_0}{2} \left(e^{\sqrt{2}\omega_0 t} + e^{-\sqrt{2}\omega_0 t} \right).$$

Таким образом, решение $\Delta r(t)$ содержит слагаемое, быстро растущее экспоненциально со временем.

Можно показать, что подобные рассуждения приводят к тем же выводам при скоростях движения объекта малых по сравнению с первой космической (например, при самолетных скоростях). Поэтому полностью автономные инерциальные системы для объектов, функционирующих продолжительное время (самолетов, морских судов, и т.п.), не применяются.

Привлечение информации о высоте. Шулеровские колебания приборной вертикали.

Для изменения ситуации, описанной выше, привлекается внешняя, по отношению к инерциальной, информация о высоте (в нашем случае о величине r). Например, эту информацию доставляют баровысотометры, спутниковые навигационные системы, или она вводится в навигационную систему априорно: в частности, предполагается, что $r = \text{const}$. С точки зрения механики, введение внешней информации о высоте равносильно наложению на точку M' геометрической связи, такой что $r' = r^*$, где r^* — дополнительная внешняя информация.

Рассмотрим эту ситуацию подробнее, используя представление о двух точках — опорной и модельной. Как и ранее, для простоты будем предполагать, что точка M неподвижна. Тогда сила $\bar{f}$, действующая на точку M со стороны подвеса, равна силе тяготения по величине и противоположна ей по знаку.

Предположим, что $r^* = \text{const} = r$. Тогда точка M' может перемещаться только по сфере радиуса r , и на нее действуют две силы: модельная сила тяготения $g^{0'}$ и сила $\bar{f}' = \bar{f}$. Нормальная составляющая силы тяготения $g^{0'}$ может быть исключена из рассмотрения, поскольку ее действие уравнивается реакцией геометрической связи.

Таким образом, движение точки M' можно интерпретировать как движение по сфере (играющей роль двусторонней связи) в однородном поле сил. А это есть не что иное, как модель сферического маятника.

Обозначим угол между направлениями OM и OM' через α , при этом $r \cdot \alpha$ есть расстояние между точками M и M' . Пусть в начальный момент времени погрешность числовой информации об угловом положении модельной точки M' , вводимой в вычислитель, равна α_0 . Для малых α имеет место хорошо известное уравнение колебаний маятника

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Величина α в нашем случае также имеет смысл угловой ошибки построения приборной вертикали, поскольку её направление совпадает с вектором $\overline{OM'}$.

Таким образом показано, что приборная вертикаль совершает незатухающие колебания с периодом Шулера относительно положения равновесия.

Проведенные рассуждения объясняют смысл введения в навигационную систему информации о высоте — в нашем случае о величине r . Можно показать [27], что поведение приборной вертикали, подобное сферическому маятнику, сохраняется и при движении точки M со скоростями, малыми по сравнению с первой космической, например, при самолетных скоростях.

2. Упрощенный вариант инерциальной навигационной системы

Приведем описание упрощенной инерциальной навигационной системы, которое тем не менее демонстрирует основные свойства метода инерциальной навигации и отражает в какой-то мере работу бескарданной инерциальной системы. Полагаем, что во всех работающих ИНС помимо измерений инерциальных датчиков привлекается информация о высоте. Для определенности будем считать, что в состав навигационной системы включен баровысотометр.

Земля предполагается двумерной и невращающейся. Ее поверхность — окружность. Точка O — геометрический центр Земли. Вектор силы тяжести направлен к центру и совпадает с вектором силы тяготения. Модуль вектора силы тяжести обозначим через g . С Землей жестко связывается опорная ось $O\xi$, относительно которой производится отсчет основных углов, используемых далее.

Местоположение движущегося объекта отождествляется с местоположением точки M — приведенной чувствительной массой блока из двух ньютометров, оси чувствительности которых с точностью до инструментальных погрешностей ортогональны друг другу. Величина $OM = R$ считается известной. С точкой M связывается система координат Mx_1x_3 так, что ось Mx_3 — продолжение направления OM (геоцентрическая вертикаль). Одновременно с системой Mx_1x_3 вводится система Ox_1x_3 . Координаты точки M в системе Ox : $x_1 = 0$, $x_3 = R$. Систему Ox_1x_3 будем называть опорной. Ось Mx_1 касается окружности.

Положение точки M на окружности определим углом σ — углом между осями Ox_3 и $O\xi$, отсчитываемым от опорной оси $O\xi$ в положительном направлении (против движения часовой стрелки). Таким образом, ось Mx_1 направлена в сторону увеличения угла σ (см. рис. 15.3).

Введем также приборную систему координат Mz^0 ($Mz_1^0z_3^0$), жестко связанную с осями чувствительности ньютометров и тем самым жестко связанную с корпусом объекта. В проекциях на оси

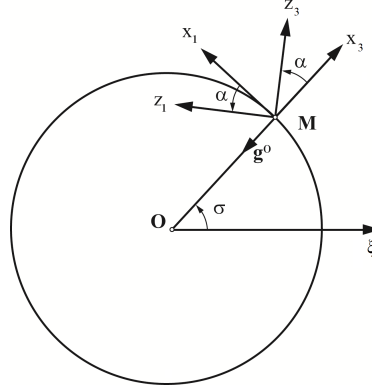


Рис. 15.3. Навигация точки, движущейся по окружности.

приборной системы координат измеряется внешняя сила f_{z^0} , приложенная к точке M (сила, действующая на точку M со стороны пружин ньютонометров). Результат измерения: $f'_{z^0} = f_{z^0} + \Delta f_{z^0}$, $f_{z^0} = (f_{z^0_1}, f_{z^0_3})^\top$, $f'_{z^0} = (f'_{z^0_1}, f'_{z^0_3})^\top$, $\Delta f_{z^0} = (\Delta f_{z^0_1}, \Delta f_{z^0_3})^\top$, Δf_{z^0} — инструментальная погрешность.

Датчиком угловой скорости измеряется угловая скорость вращения ω_{z^0} приборной системы координат Mz^0 ($Mz^0_1 z^0_3$) вокруг оси, ортогональной плоскости чертежа. Результат измерения: $\omega'_{z^0} = \omega_{z^0} + \nu_{z^0}$, где ν_{z^0} — инструментальная погрешность. Ориентацию приборной системы координат Mz^0 относительно опорной оси $O\xi$ определим углом ϕ — углом между осями Oz^0_3 и $O\xi$. Тогда $\dot{\phi} = \omega_{z^0}$.

В бортовом вычислителе интегрируется кинематическое уравнение $\dot{\phi}' = \omega'_{z^0}$ с начальным условием $\phi'(t_0)$. Угол ϕ' определяет ориентацию некоторой системы координат Oy^0 , которую можно интерпретировать как числовой образ приборной системы координат.

Из уравнения Ньютона для точки M (динамического), спроектированного на ось Mx_1 , можно определить текущее значение величины угла σ : $R\dot{\omega} = f_{x_1}$, где $\omega = \dot{\sigma}$, с начальными условиями $\sigma(t_0)$, $\omega(t_0)$. Здесь f_{x_1} — горизонтальная составляющая внешней силы $f_x = (f_{x_1}, f_{x_3})^\top$, приложенной к точке M . Вследствие того, что точка M движется по окружности радиуса R , имеет место соотношение $g - f_{x_3} = R\dot{\sigma}^2$.

В бортовом вычислителе интегрируются уравнения:

$$R\dot{\omega}' = f', \quad \dot{\sigma}' = \omega',$$

которые естественно назвать модельными динамическими уравнениями. Их можно интерпретировать как уравнения, определяющие движение модельной точки M' (числового образа точки M).

Далее установим связь между величинами f_x и f_{z^0} , а также величиной f' и величинами $f'_{z^0_1}$, $f'_{z^0_3}$. Угловое положение опорной системы координат Mx относительно приборной Mz^0 определим углом χ . Тогда $\chi = \sigma - \phi$, $f_{x_1} = f_{z^0_1} \cos \chi - f_{z^0_3} \sin \chi$. Соответствующие модельные уравнения имеют вид: $\chi' = \sigma' - \phi'$, $f' = f'_{z^0_1} \cos \chi' - f'_{z^0_3} \sin \chi'$.

Итак, бортовой алгоритм навигационной системы — совокупность модельных уравнений в бортовом вычислителе, описываемая замкнутой системой соотношений:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}' &= \omega'_{z^0}, & R\dot{\omega}' &= f', & \dot{\sigma}' &= \omega', \\ f' &= f'_{z^0_1} \cos \chi' - f'_{z^0_3} \sin \chi', \end{aligned} \quad (15.1)$$

$$\chi' = \sigma' - \phi'. \quad (15.2)$$

Величины ω'_{z^0} , f'_{z^0} — входная информация, доставляемая датчиком угловой скорости и ньютонометрами, соответственно.

Обсудим вопрос о начальных условиях. Будем полагать, что в начальный момент времени местоположение точки M известно точно, т.е. $\sigma'(t_0) = \sigma(t_0)$, и что точка M неподвижна, т.е. $\omega(t_0) = \omega'(t_0) = \omega_{z^0}(t_0) = \omega'_{z^0}(t_0) = 0$. Определим начальные условия для величин $\phi'(t_0)$ и $\chi'(t_0)$. Очевидны соотношения в начальный момент времени:

$$f_{z^0_1} = -g \sin \chi, \quad f_{z^0_3} = g \cos \chi.$$

Отсюда имеем: $f'_{z_1^0} = -g \sin \chi'$, $f'_{z_3^0} = g \cos \chi'$, или

$$\chi'(t_0) = -\arctan \frac{f'_{z_1^0}}{f'_{z_3^0}}.$$

Относительно приборной системы $Mz_1^0z_3^0$ угол χ' определяет ориентацию некоторой системы координат, которую обозначим как Mz_1z_3 . Из полученных выше соотношений следует, что результат измерения внешней силы, приложенной к точке M , перепроектируется на ось Mz_1 и служит входной информацией при интегрировании уравнений Ньютона. Поэтому систему Mz_1z_3 естественно назвать квазиприборной (при отсутствии погрешностей в измерениях датчиков система Mz_1z_3 совпадает с опорной системой Mx_1x_3).

Точность инерциальной навигационной системы и ее свойства определяют уравнения ошибок. Введем соответствующие обозначения: $\alpha = \chi' - \chi$, $\beta = \phi' - \phi$, $\gamma = \sigma' - \sigma$, $\Delta\omega = \omega' - \omega$.

Из (15.2) следует равенство: $\alpha = \gamma - \beta$. Угол α — это угол между квазиприборной осью Mz_1 и осью Mx_1 . Это следует из очевидного соотношения: $\alpha = \phi + \chi' - \sigma$. Таким образом, величина α — ошибка определения горизонта (вертикали). Угол β называется кинематической ошибкой. Угол γ — ошибка определения местоположения точки M .

Сравнение модельных уравнений с опорными приводит к соотношениям:

$$\dot{\beta} = \nu_{z^0}, \quad \dot{\gamma} = \Delta\omega, \quad R\Delta\dot{\omega} = \delta f,$$

где $\delta f = f' - f_{x_1}$. Величину δf можно переписать в виде

$$\delta f = f_{x_1} \cos \alpha - f_{x_3} \sin \alpha + \Delta f - f_{x_1},$$

где $\Delta f = \Delta f_{z_1^0} \cos \chi' - \Delta f_{z_3^0} \sin \chi'$.

Действительно, преобразуем (15.1) к виду

$$f' = f_{z_1^0} \cos \chi' - f_{z_3^0} \sin \chi' + \Delta f.$$

Подставляя в него соотношение $\chi' = \alpha + \chi$, получим:

$$f' = f_{x_1} \cos \alpha - f_{x_3} \sin \alpha + \Delta f,$$

откуда следует вышеприведенное выражение для δf .

Далее сделаем некоторые замены и упрощения. Введем величины $\varepsilon = \Delta f/g$ и $\omega_0^2 = g/R$, где ω_0 — введенная ранее частота Шулера. Тогда верны соотношения: $\Delta f/R = \omega_0^2 \varepsilon$ и $f_{x_3}/R = \omega_0^2 - \dot{\sigma}^2$. Для самолетных скоростей $\dot{\sigma}^2 = \omega^2 \ll \omega_0^2$. Угол α предполагается малым. В результате с учетом сказанного получим $\Delta\dot{\omega} = -\omega_0^2 \alpha + \omega_0^2 \varepsilon$. Дифференцирование соотношения $\alpha = \gamma - \beta$ приводит к уравнению

$$\dot{\alpha} = \Delta\omega - \nu_{z^0}.$$

Таким образом, замкнутая система соотношений, позволяющих определить ошибку определения местоположения γ , ошибку определения горизонта α (динамическую ошибку) и кинематическую ошибку β , имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\omega} &= -\omega_0^2 \alpha + \omega_0^2 \varepsilon, & \dot{\beta} &= \nu_{z^0}, \\ \dot{\alpha} &= \Delta\omega - \nu_{z^0}, & \gamma &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Полученные соотношения показывают, что ошибка определения местоположения есть сумма динамической и кинематической ошибок. Кинематическая ошибка в предположении постоянной инструментальной погрешности ν_{z^0} растет линейно со временем.

Положим для простоты, что $\nu_{z^0} = \text{const}$. Исключая из первых двух уравнений величину $\Delta\omega$, получим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = \omega_0^2 \varepsilon.$$

В случае $\Delta f = 0$ это уравнение описывает свободные колебания математического маятника с собственной частотой Шулера.

Существует ряд задач мониторинга земной поверхности, осуществляемого при помощи авиации. В этом случае используется комплексная навигационная система, включающая в себя помимо инерциальной системы приемник спутниковой навигационной системы GPS или ГЛОНАСС, доставляющий высокоточную информацию о координатах самолета.

Приемник спутниковой навигационной системы обрабатывает сигнал от видимых навигационных спутников, движущихся вокруг Земли по орбитам с периодом приблизительно двенадцать часов. На борту каждого спутника установлены атомные часы и передатчик, излучающий цифровой

сигнал на определенной частоте. Спутники располагаются так, что из любой точки земной поверхности или ее ближайшей окрестности в каждый момент времени видны по крайней мере четыре спутника.

Навигационные сигналы содержат информацию, позволяющую определить в вычислителе приемника координаты спутников. Кроме того, приемник определяет время прохождения сигнала до спутника, которое с учетом скорости распространения радиоволн является измерением расстояния до спутника, называемым псевдодальностью:

$$d_i = \sqrt{(\eta_1 - \eta_1^i)^2 + (\eta_2 - \eta_2^i)^2 + (\eta_3 - \eta_3^i)^2 + c\Delta t + \varrho^i},$$

где η_j $j = 1, 2, 3$ — координаты приемника; η_j^i — координаты i -го навигационного спутника; Δt — рассогласование часов спутниковой системы и часов приемника (спутниковое время общее для всех спутников); c — скорость света; ϱ^i — инструментальная погрешность, включающая в себя задержки распространения сигнала в атмосфере, тропосфере и т.д.

Четыре псевдодальности позволяют однозначно определить (с точностью до инструментальных погрешностей) три координаты приемника и рассогласование часов Δt .

Одна из целей комплексирования — повышение точности определения ошибки приборной вертикали α .

Эта задача может быть решена, как задача коррекции инерциальной навигационной системы при помощи спутниковой навигационной информации. В нашем, упрощенном случае, задача коррекции решается так: вводятся математические модели инструментальных погрешностей ИНС

$$\nu = \nu^0 + \nu^s, \quad \varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^s,$$

где ν^0, ε^0 — неизвестные константы, ν^s, ε^s — белые шумы с известными интенсивностями.

Фиксируется уравнение ошибок

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \Delta\omega - \nu^0 - \nu^s, \\ \Delta\dot{\omega} &= -\omega_0^2\alpha + \omega_0^2(\varepsilon^0 + \varepsilon^s), \\ \dot{\beta} &= \nu^0 + \nu^s, \\ \dot{\nu}^0 &= 0, \quad \dot{\varepsilon}^0 = 0, \quad \gamma = \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Фиксируется информация, доставляемая спутниковой навигационной системой $\sigma^* = \sigma + \varrho^s$. Здесь ϱ^s — белый шум с известной интенсивностью. Формируется сигнал коррекции $w = \sigma^* - \sigma' = \gamma + \varrho^s$.

Постановка задачи состоит в оценивании вектора состояния $(\alpha, \Delta\omega, \beta, \nu^0, \varepsilon^0)^\top$ по измерению w .

Проведем анализ наблюдаемости, используя тот факт, что если наблюдается какая-то переменная, то наблюдается и ее производная.

Наблюдаемые переменные

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \alpha + \beta & \kappa_2 &= \Delta\omega \\ \kappa_3 &= \alpha - \varepsilon^0 & \kappa_4 &= \nu^0. \end{aligned}$$

Уравнение, которому подчиняется вектор $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)^\top$ имеет вид

$$\dot{\kappa} = A\kappa + q,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \varepsilon^s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \kappa_1 + \varrho^s.$$

Оценка $\tilde{\kappa}$ строится по стандартной схеме

$$\dot{\tilde{\kappa}} = A\tilde{\kappa} + K^*(w - \tilde{\kappa}_1).$$

Уравнения ошибок оценки $\Delta\kappa = \kappa - \tilde{\kappa}$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta\dot{\kappa} = A\Delta\kappa - K^*\Delta\kappa_1 + q + K^*\varrho^s.$$

Вектор K^* выбирается либо постоянным, обеспечивающим компромисс между скоростью затухания переходных процессов в уравнении ошибок и среднеквадратическими установившимися ошибками, либо из реализации фильтра Калмана.

Примеры соответствующих числовых расчетов выходят за рамки этой лекции. Заметим только, что дополнительная спутниковая информация имеет очень высокую точность и можно считать, что

величины $\varkappa_i$, $i = 1, \dots, 4$ оцениваются практически точно. Тогда ошибка определения угла α равна ε^0 . Для серийных навигационных систем эта ошибка не превышает 1 минуты в угловой мере.

В заключение заметим, что в инерциальной навигации существует целый ряд задач (различные виды калибровки, начальной выставки, коррекции), алгоритмы решения которых основаны на фильтрах Калмана.

Лекция 16

Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов с некоторыми приложениями к задачам оценивания

В прикладной теории оценивания существуют два подхода: временной и частотный (спектральный). Примером первого может служить калмановская фильтрация и связанный с ней ковариационный анализ. Но для понимания некоторых явлений в рамках первого подхода бывает полезно, хотя бы в некоторой степени, привлечение элементов второго подхода — спектральной теории. Основы этой теории составляет спектральное представление стационарных случайных процессов.

Напомним, что в рамках корреляционной теории скалярный случайный процесс $x(t)$ называется стационарным, если постоянно его математическое ожидание $\mu_x(t)$ и дисперсия D_x , а функция корреляции $K_x(t, s) = M[\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(s)]$ зависит только от разности $\tau = t - s$, т.е. $K_x(t, s) = K_x(\tau)$, причем функция $K_x(\tau)$ — четная: $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$.

Требование постоянства математического ожидания несущественно, поскольку от случайного процесса $x(t)$ всегда можно перейти к центрированному процессу $\overset{\circ}{x}(t) = x(t) - \mu_x(t)$.

На интуитивном уровне стационарные случайные процессы представляются для нас, в некотором условном смысле, как аналог детерминированных периодических процессов. Поэтому попробуем сконструировать простейший стационарный процесс в виде $x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, где a и b — случайные величины, причем $M[a] = M[b] = 0$. Каким условиям должны удовлетворять величины a и b , чтобы процесс $x(t)$ был стационарным, то есть математическое ожидание $M[x(t)x(s)] = K_x(\tau)$, $\tau = t - s$.

Легко убедиться в том, что для этого необходимо и достаточно, чтобы $M[a^2] = M[b^2] = D$, где D по определению дисперсия, и $M[ab] = 0$. В нашем случае $K_x(\tau) = D \cos \omega \tau$.

Функция $D(\omega)$ называется спектром. Соответствующий график имеет вид:

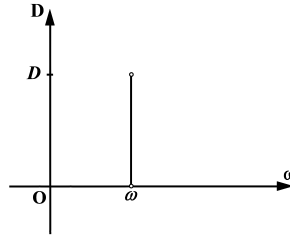


Рис. 16.1. Одночастотный спектр в действительной форме.

В данном случае спектр содержит одну спектральную линию. Для удобства дальнейших выкладок, используя формулу Эйлера, перейдем к комплексной форме

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t,$$

получим

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$$

$$\sin \omega t = -\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}).$$

Отсюда следует

$$x(t) = \frac{1}{2}(a - jb)e^{j\omega t} + \frac{1}{2}(a + jb)e^{-j\omega t}.$$

Введем условно понятие отрицательной частоты. Положим:

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_{-1} = -\omega,$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a - jb), \quad c_{-1} = \frac{1}{2}(a + jb);$$

причем $c_{-1} = c_1^*$, или $x(t) = c_1 e^{j\omega_1 t} + c_{-1} e^{j\omega_{-1} t}$. Учитывая, что для дисперсии D_z и момента корреляции $K_{z_1 z_2}$ комплексных чисел z, z_1, z_2 имеют место формулы:

$$D_z = M[z z^*], \quad K_{z_1 z_2} = M[z_1 z_2^*].$$

Получим $D_{c_1} = \frac{D}{2}$, $D_{c_{-1}} = \frac{D}{2}$, $K_{c_1 c_{-1}} = 0$.

Спектр в этом случае располовинивается (см. рис. 16.2), на графике мы видим две симметричные спектральные линии.

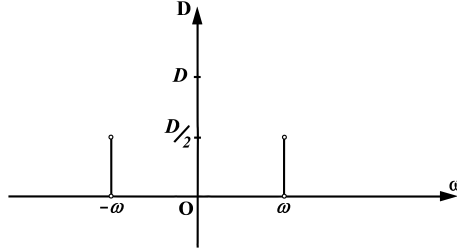


Рис. 16.2. Одночастотный спектр в комплексной форме.

А теперь обобщение. Зададим некоторый набор частот $\{0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, включив в него нулевую частоту. Действительный процесс $x(t)$ построим в виде

$$x(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{j\omega_k t}. \quad (16.1)$$

Условие стационарности: $D_{c_k} = D_{c_{-k}} = D_k$; $K_{c_k c_m} = 0$, $k \neq m$. Легко видеть, что

$$D_x = \sum_{k=-N}^N D_k.$$

В построенном нами процессе все c_k попарно некоррелированы. Вспомним, что при введении термина «белый шум», мы пользовались понятием процесса с некоррелированными (ортогональными) приращениями. Для такого процесса было показано, что он не дифференцируем в среднеквадратичном, и бесконечно малое приращение $d_x(t)$ удовлетворяет соотношению:

$$M[d_x(t)d_x(s)] = R(t)\delta(t-s)dtds,$$

где $R(t) = \frac{dD_x}{dt}$, $D_x = D[x(t)]$.

Возникает идея, заменить в формуле (16.1) величины c_k на приращения $\Delta V(\omega_k)$ некоторой функции с ортогональными приращениями $V(\omega)$. Выбранный набор частот и функция с ортогональными приращениями $V(\omega)$ позволяют построить стационарный случайный процесс. Замена случайных величин c_k на приращения

$$\Delta V_k = V(\omega_k) - V(\omega_{k-1}),$$

где $V(\omega)$ — функция с ортогональными приращениями, — основной шаг к построению спектрального представления стационарных случайных процессов. Далее естественным продолжением был бы предельный переход к континууму частот, но этот переход мы здесь опускаем, из-за некоторых связанных с ним тонкостей, и будем рассматривать сказанное выше, как пояснение к последующим утверждениям.

Пусть для стационарного процесса $x(t)$ справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau < \infty,$$

где $K_x(\tau)$ — функция корреляции. Тогда имеет место представление

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dV(\omega), \quad (16.2)$$

где $V(\omega)$ — случайная комплексная функция с ортогональными приращениями.

Имеют место соотношения

$$M[dV(\omega_1)dV^*(\omega_2)] = S_V(\omega)\delta(\omega_1 - \omega_2)d\omega_1d\omega_2, \\ S_V(\omega) = dD_V(\omega).$$

Функция $S_V(\omega)$ называется спектральной плотностью. Ее свойства: $S_V(\omega) \geq 0$, $S_V(\omega) = S_V(-\omega)$.

Важная особенность спектрального представления (16.2) в том, что вся «случайность» процесса $x(t)$ сосредоточена во множителях, не зависящих от времени. В то же время, функция времени, входящая в разложение, — обычная детерминированная. Это позволяет совершать все стандартные временные операции над такими функциями (как дифференцирование, интегрирование) по правилам математического анализа.

Установим связь между функцией корреляции $K_x(\tau)$ и спектральной плотностью $S_V(\omega)$. Имея ввиду, что действительный процесс $x(t)$ представляется в виде разложения по комплексным функциям, запишем

$$M[x(t)x(s)] = M[x(t)x^*(s)].$$

Далее получим

$$\begin{aligned} M[x(t)x^*(s)] &= M\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 t - \omega_2 s)} dV(\omega_1) dV^*(\omega_2)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 t - \omega_2 s)} M[dV(\omega_1) dV^*(\omega_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_1 t - \omega_2 s)} S_V(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$K_x(t, s) = K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_V(\omega) d\omega, \\ D_x = K_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_V(\omega) d\omega.$$

Последнее соотношение означает, что спектральная плотность

$$S_V(\omega) = S_x(\omega) = \frac{dD_x(\omega)}{d\omega}.$$

Таким образом показано, что функция корреляции является преобразованием Фурье спектральной плотности. Обратное преобразование Фурье:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) d\tau.$$

Пусть $x(t)$ — белый шум с единичной интенсивностью, т.е. $K_x(\tau) = \delta(\tau)$. Тогда $S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}$.

Следовательно, белый шум содержит бесконечный спектр частот. Его дисперсия (энергия) бесконечна. Само название белого шума происходит из аналогии такого процесса с белым светом, который также включает в себя континуум частот. Вспомним прежние рассуждения о не реализуемости этого процесса. Спектральное представление оказывается полезным для решения задачи, связанной с реализацией фильтра Калмана, который ранее мы оставили без ответа. В теории фильтра Калмана предполагается, что немоделируемые шумы, действующие на систему, белые, и белые шумы также содержатся в измерениях. Но на практике это не всегда так.

Случайные процессы, когда хотят подчеркнуть их небелость, иногда называют цветным шумом. Возникает задача — построение такого фильтра (оператора, алгоритма), выходом которого является белый шум, а входом — заданный процесс, цветной шум. Фильтр, в этом случае, называется формирующим. Но прежде чем приводить пример формирующего фильтра, предварительно решим такую задачу. Пусть динамическая система описывается уравнением

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_m u.$$

Здесь:

- постоянные коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ удовлетворяют условию Гурвица, то есть корни λ_i характеристического уравнения $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ имеют отрицательные действительные части,

- $u(t)$ – стационарный случайный процесс, $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dV_u(\omega)$,

$$M[dV_u(\omega_1)dV_u^*(\omega_2)] = S_u(\omega)\delta(\omega_1 - \omega_2)d\omega_1d\omega_2.$$

Требуется найти спектральную плотность $S_x(\omega)$. Легко видеть, что процесс $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} e^{j\omega t} dV_u(\omega).$$

Введем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m}{p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n},$$

где p – оператор дифференцирования. Имеем

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} dV_u(\omega).$$

Далее получим

$$K_x(t, s) = M\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega_1)W(-j\omega_2)e^{j(\omega_1 t - \omega_2 s)} dV_u(\omega_1)dV_u^*(\omega_2)\right].$$

Отсюда после несложных преобразований следует

$$K_x(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega \tau} W(j\omega)W(-j\omega)S_u(\omega)d\omega.$$

Это означает, что

$$S_x(\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)S_u(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_u(\omega),$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega.$$

Обычно реальные спектральные плотности аппроксимируются в виде дробно-рациональной функции четных степеней частоты ω . В этом случае дисперсия D_x может быть найдена при помощи таблиц, выражающих результаты интегрирования через коэффициенты дробно-рациональных функций. Такой способ конструктивен при небольших степенях n . Приведем таблицы при $n = 1, 2, 3$.

Общая формула:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(x)dx}{h_n(x)h_n(-x)},$$

где

$$g_n(x) = b_0x^{2n-2} + b_1x^{2n-1} + \dots + b_{n-1},$$

$$h_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Значит,

$$I_1 = \pi j \frac{b_0}{a_0 b_1},$$

$$I_2 = \pi j \frac{-b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2}}{a_0 a_1},$$

$$I_3 = \pi j \frac{-a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3}}{a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)}.$$

Пример построения формирующего фильтра. Пусть спектральная плотность случайного процесса $x(t)$ имеет вид:

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma^2 \lambda}{\pi(\omega^2 + \lambda^2)}.$$

Выходной величиной фильтра должен служить белый шум с единичной интенсивностью $\xi(t)$, с функцией корреляции $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$ и спектральной плотностью $S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi}$.

Имеем

$$\frac{\sigma^2 \lambda}{\pi(\omega^2 + \lambda^2)} = W(j\omega)W(-j\omega)\frac{1}{2\pi},$$

или

$$W(j\omega)W(-j\omega) = \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{j\omega + \lambda} \cdot \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{-j\omega + \lambda}.$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{j\omega + \lambda},$$

$$W(p) = \frac{\sigma\sqrt{2\lambda}}{p + \lambda}.$$

Таким образом $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t) + \sigma\sqrt{2\lambda}\xi.$$

При построении фильтра Калмана переменная x включается в вектор состояния.

Дискретизация стационарных случайных процессов Обычно в системах управления и оценивания аналоговые сигналы записываются в бортовом (рабочем) компьютере в дискретной форме. Очень важно понять к каким последствиям приводит такая дискретизация. Прежде чем переходить к формальной стороне дела, приведем два поясняющих примера.

Первый пример: вспомним о стробоскопе. Если наблюдать через отверстие за вращающимся колесом, отверстие закрыть подвижной шторкой, и открывать ее на только на очень короткое время с частотой вращения колеса, то колесо будет казаться неподвижным.

Второй пример: в дискретные моменты времени измеряется функция $x = \sin(2\pi t)$, для определенности, t — время в секундах. Тогда период колебаний — 1 сек., циклическая частота — 1 Гц. Пусть измерение величины $g = 2\pi t$ осуществляется с интервалом $\Delta t = \pi(2 - \frac{1}{10})$, то есть с интервалом, немного меньшим, чем 2π . Тогда время между двумя измерениями $\Delta t = \frac{19}{20}$. Результаты измерений определяют некоторую синусоиду x_Δ со значениями момента измерений $x_\Delta(n)$, где n — число измерений.

$$x_\Delta(n) = \sin \pi(2 - \frac{1}{10})n.$$

Очевидно, первый экстремум этой функции будет при $n = 5$, циклическая частота функции после дискретизации — $\frac{1}{19}$ Гц. Произошло то, что называется маскировкой частот. Высокочастотная функция из-за дискретизации стала выглядеть как низкочастотная. Это явление называют также элайзингом.

А теперь обратимся к дискретизации стационарных случайных процессов. Выше было показано, что стационарный случайный процесс может быть представлен в спектральной форме:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dV_x(\omega),$$

$$M[dV_x(\omega_1)dV_x^*(\omega_2)] = S_x(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)d\omega_1 d\omega_2.$$

Для простоты предположим, что съём (измерение сигнала) производится с частотой 1 Гц, то есть период дискретизации равен 1 сек; $t_\Delta = n = 0; \pm 1; \pm 2, \dots$. Обозначим дискретизированный процесс через

$$x_\Delta = x(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega n} dV_x(\omega).$$

Представим функцию $x(n)$ в виде

$$\begin{aligned} x_{\Delta}(n) &= \dots + \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} dV_x(\omega) + \int_{\pi}^{3\pi} e^{j\omega n} dV_x(\omega) + \int_{3\pi}^{5\pi} e^{j\omega n} dV_x(\omega) + \dots \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} e^{j\omega n} dV_x(\omega). \end{aligned}$$

Частоту ω на интервале $[(2m-1)\pi; (2m+1)\pi]$ представим в виде $\omega = 2\pi m + u$, где u меняется в пределах $[-\pi; \pi]$. Получим

$$\begin{aligned} x_{\Delta}(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} e^{j(2\pi m + u)n} dV_x(2\pi m + u) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jun} dV_{\Delta}(u); \\ V_{\Delta}(u) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} dV(2\pi m + u). \end{aligned}$$

В силу того, что $V(\omega)$ — функция с ортогональными (некоррелированными) приращениями, получим

$$\begin{aligned} M[dV_{\Delta}(u_1)dV_{\Delta}^*(u_2)] &= S_{\Delta}(u_1)\delta(u_1 - u_2)du_1du_2, \\ S_{\Delta}(u) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_x(u + 2\pi m). \end{aligned}$$

В результате, дискретизированный процесс оказался представленным в виде спектрального разложения по частоте u , меняющейся только в интервале $[-\pi; \pi]$, со спектральной плотностью, вобравшей в себя спектральные плотности, соответствующие всем частотам ω , удовлетворяющим неравенству $|\omega| > \pi$. Частота $\omega^* = \pi$ называется частотой Найквиста, циклическая частота Найквиста в этом случае равна $\frac{1}{2}$.

Такое представление дискретизированного процесса иллюстрирует следующий неприятный факт. Обычно низкие частоты ассоциируются с полезным сигналом, а высокие — с вредными помехами. Задача фильтрации состоит в выделении полезного сигнала на фоне помех. После дискретизации эта задача стала неразрешимой, поскольку высокие частоты замаскировались под низкие. Борьба с явлением маскировки частот состоит в том, что либо повышается частота дискретизации, либо высокие частоты фильтруются до дискретизации, когда сигнал предстает в аналоговой форме. На графике спектра показывается, как вычисляется спектральная плотность дискретизированного сигнала. На оси абсцисс нарезаются отрезки отметками $\omega = 0, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, и спектральная плотность из интервалов $[(2n-1)\pi; (2n+1)\pi]$ переносится в промежутки $[-\pi; \pi]$. Точка $(2n-1)\pi$ при этом совмещается с точкой π .

Установим связь функции корреляции дискретизированного процесса

$$K_{\Delta}(n, m) = K_{\Delta} = M[x_{\Delta}(n)x_{\Delta}(m)]$$

со спектральной плотностью $S_{\Delta}(u)$. В нашем случае

$$x_{\Delta}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jun} dV_{\Delta}(u),$$

по аналогии с предыдущим, при $k = m - n$, следует

$$K_{\Delta}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{juk} S_{\Delta}(u) du.$$

Поскольку аргумент функции меняется в интервале $[-\pi; \pi]$, мы можем разложить ее в ряд Фурье

$$S_{\Delta}(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jku},$$

где $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-juk} S_{\Delta}(u) du.$

Отсюда $c_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{\Delta}(k) e^{-juk}.$

Часть II

ВТОРОЙ СЕМЕСТР. УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЗМУЩАЕМЫМИ СИСТЕМАМИ

Лекция 17

Стратегии многоуровневого управления движением

В курсах теоретической механики и механики сплошных сред изучаются статические и динамические системы. При этом вопросы управления такими системами не рассматриваются. В то же время и в природе, и в технике имеются динамические системы, снабженные исполнительными механизмами (двигателями), что позволяет изменять позицию (состояние) этих систем, т.е. управлять ими. Будем говорить в этом случае, что рассматривается движение управляемого объекта, которое описывается дифференциальными уравнениями с функциональным включением

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), & y(t_0) = y^*, \quad y(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^s, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] | u(t) \in \Omega \subset R^s, \quad t \in [t_0, t_k]\}. \end{cases} \quad (17.1)$$

Здесь y — n -мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние управляемого объекта; u — s -мерный вектор-столбец управляющих воздействий, $f(y, u)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция своих координат; $\mathcal{U}$ — функциональное множество, описывающее имеющиеся ресурсы по управлению движением объекта, Ω — выпуклое замкнутое ограниченное множество в R^s .

Функциональная схема управляемого объекта представлена на рис.17.1.

Физический смысл управляющих воздействий может быть различным. В одном случае это могут быть управляющие силы и моменты непосредственно, если исполнительные механизмы идеальны. В другом случае — это управляющие сигналы, подающиеся на исполнительные механизмы, когда необходимо учесть их функционирование.

Описание ресурсов управления в виде функционального множества $\mathcal{U}$ позволяет представить в компактном виде разнообразные ограничения на управления u , встречающиеся на практике: ограничения на величину или производную, ограничения на интеграл или ограничение в среднеквадратичном (по энергии) и т.д. Из рис.17.1 следует, что для формирования управляющих воздействий необходимо наличие исполнительных механизмов, осуществляющих механический процесс (движение системы), а также сенсоров и системы управления, осуществляющих информационный процесс — формирование управляющих сигналов на основе информации от сенсоров (см. лекции 1,6).

Формирование управляющих сигналов может иметь многоуровневую структуру.

1. Линейная комбинация программного и дополнительного управления при помощи обратной связи

Пусть задано желаемое движение, которое в дальнейшем будем называть программным: $y^p(t), t \in [t_0, t_k], \quad t_0 < t_k \leq \infty$, и программное управление $u^p(t)$, реализующее это движение в силу тождества

$$\begin{cases} \dot{y}^p(t) \equiv f(y^p(t), u^p(t)), \\ u^p(t) \in \text{int } \Omega, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{cases} \quad (17.2)$$

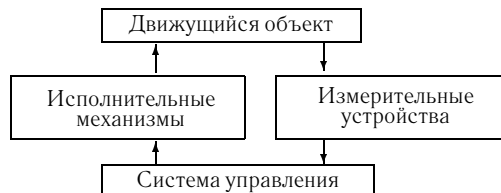


Рис. 17.1. Функциональная схема управляемой системы

При этом различают три ситуации:

- 1) программный управляемый процесс — тройка $\{y^n(t), u^n(t), [t_0, t_k]\}$ — задан в явном виде;
- 2) программный управляемый процесс задан в неявном виде, например, как решение экстремальной задачи;
- 3) программный управляемый процесс неизвестен.

Если программный процесс задан в явном виде, то можно рассмотреть задачу позиционного управления, заключающуюся в стабилизации программного движения $y^n(t)$. Для того чтобы осуществить эту постановку, необходимо знать отклонения реального движения $y(t)$ от программного $y^n(t)$. Предположим, что имеется m измерительных устройств, с помощью которых можно получить первичную информацию о реальном движении. Обработав эту информацию, можно оценить текущие отклонения $x(t) = y(t) - y^n(t)$ и построить алгоритмы формирования управляющих сигналов.

Для постановки задачи позиционного управления ограничимся простейшей моделью, описывающей получение первичной информации Z :

$$Z = \Psi(y) + \xi(t), \quad (17.3)$$

где $\xi(t)$ — инструментальные погрешности измерительных устройств.

Будем формировать управление u как сумму программного и позиционного управления:

$$u = u^n(t) + \Delta u(\tilde{x}, t),$$

где $\tilde{x}$ — оценка отклонений $x = y - y^n$, полученная с помощью алгоритма оценивания, позволяющего обработать информацию $z(t) = Z(t) - Z^n$, записанную в линеаризованном виде $z(t) = Hx + \xi(t)$, где матрица $H(t) = \frac{\partial \Psi(y)}{\partial y} \Big|_{y=y^n}$ вычислена на известной программной траектории $y^n(t)$.

Координаты $x_i(t)$ описывают первый (нижний) уровень управления, координаты $y_i^n(t)$ — второй уровень управления.

На практике в силу наличия как инструментальных погрешностей измерительных устройств (17.3), так и возмущающих сил и моментов, действующих на объект, вместо математической модели (17.1) приходится рассматривать более сложную модель

$$\dot{y} = f(y, u, v), \quad (17.4)$$

где v — вектор-функция, описывающая влияние возмущающих сил и моментов.

В связи с наличием начальных и постоянно действующих возмущений приходится решать две задачи:

- а) задачу нахождения программного управляемого процесса;
- б) задачу стабилизации программного движения объекта (при этом используются оставшиеся ресурсы управления).

Последняя задача подробно рассматривалась в первом семестре. Было показано, что позиционное стабилизирующее управление Δu строится в виде линейной обратной связи $\Delta u = K(t)\tilde{x}$ по оценке отклонений $\tilde{x}$ от программного движения, доставляемой линейным оценителем на основе информации $z(t) = Hx + \xi$.

Таким образом, замкнутая управляемая динамическая система (УДС) имеет двухуровневую систему управления, нижний уровень которой решает задачу стабилизации уравнений в отклонениях от программного движения:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\Delta u + C\Delta v, \\ \Delta u = K\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\Delta u + \tilde{K}(z - H\tilde{x}), \\ z = Hx + \xi. \end{cases} \quad (17.5)$$

Соответствующие матрицы в линейной системе уравнений (17.5) вычисляются вдоль известного программного движения $y^n(t)$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(y^n, u^n), \quad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(y^n, u^n), \quad H(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}(y^n), \\ C(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(y^n, v^n), \quad v^n \equiv 0.$$

В том случае, когда модели постоянно действующих возмущений $\Delta v(t)$ и инструментальных погрешностей измерений $\xi(t)$ представляют собой случайные процессы типа белого шума, будет показано, что матрицы обратной связи $K(t)$ стабилизатора и оценителя $\tilde{K}(t)$ в системе (17.5) можно

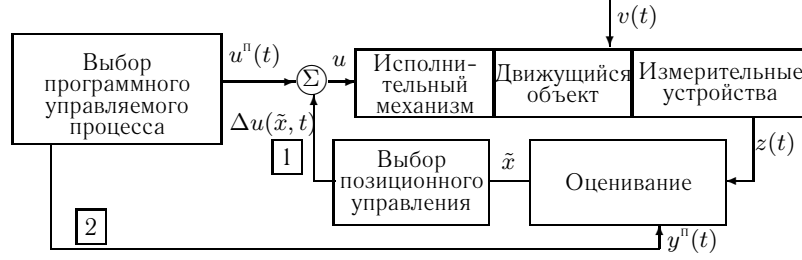


Рис. 17.2. Двухуровневое управление УДС

выбирать независимо. Алгоритмы выбора матрицы $\tilde{K}(t)$ для оценщика были рассмотрены ранее (см. лекцию 14).

Функциональная схема двухуровневой управляемой динамической системы изображена на рис.17.2.

2. Оптимизация программного движения. Принцип максимума Понтрягина

Для построения программного управления второго уровня, а в некоторых случаях и для синтеза позиционного управления первого уровня будем использовать следующий результат, полученный в 1956–1958 гг. Л.С.Понтрягиным, В.Г.Болтянским и Р.В. Гамкрелидзе. Пусть дана управляемая система

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, u), \quad y(t_0) = y^*, \quad y(t) \in R^n, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} &= \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] | u(t) \in \Omega \subset R^s, \quad t \in [t_0, t_k]\}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Здесь $PC[t_0, t_k]$ — пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке $[t_0, t_k]$. В конечный момент t_k система должна попасть на некоторое гладкое и без особых точек многообразие $M \subset R^n$, ($y(t_k) \in M$), причем это первый момент, когда достигается многообразие M .

Предположим, что:

- 1) система управляема относительно M , т.е. многообразие достижимо;
- 2) существует оптимальное управление $u^0(\cdot) \in PC[t_0, t_k]$, доставляющее локальный минимум функционалу $J(u) = \varphi_0(y(t_k))$:

$$J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u);$$

Процесс $y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]$ доставляет локальный минимум, если существует $\varepsilon \geq 0$, такое, что выполняется неравенство $J(u^0) \leq J(u)$, где $y(\cdot), u(\cdot), [t_0, t_k]$ — допустимый процесс, удовлетворяющий условию $\|y(\cdot) - y^0(\cdot)\|_C < \varepsilon$;

3) многообразие M гладкое и без особых точек: $M = \{\varphi_i(y(t_k)) = 0, \quad i = 1, \dots, m\}$, $\text{rank} \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} \right\| = m$. Функции $f, \varphi_i, i = 0, 1, \dots, m$ непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

Если известна тройка $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$, где u^0 — оптимальное управление, y^0 — соответствующая этому управлению траектория и $[t_0, t_k^0]$ — интервал времени, на котором это соответствие реализуется в виде тождества $\dot{y}^0(t) \equiv f(y^0(t), u^0(t))$, то можно выписать **сопряженную систему**

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right)^\top \psi, \quad (17.7)$$

к системе уравнений в вариациях

$$\Delta \dot{y} = \left(\frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right) \Delta y, \quad (17.8)$$

и **функцию Понтрягина** $H(\psi, y, u) = \psi^\top f(y, u)$.

Предположим, что все условия теоремы А.Ф. Филиппова [?] о существовании оптимального процесса выполнены. Тогда справедлива теорема

Теорема 20 (1956). Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ — оптимальный управляемый процесс, то существует ненулевая пара $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ такая, что

1.

$$\max_{u(t) \in \Omega \subset R^s} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)), \quad (17.9)$$

$\forall t \in T \subseteq [t_0, t_k^0]$, где T — множество точек непрерывности управления $u(t)$.

Это условие означает, что максимум функции Понтрягина достигается на оптимальном управлении (условие максимума);

2. условие трансверсальности в точке $y^0(t_k^0) \in M$

$$\psi(t_k^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))^\top}{\partial y} \perp M; \quad (17.10)$$

3. $\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$ — условие стационарности гамильтониана ($t \in [t^0, t_k^0]$).

Теорема дает только необходимые условия экстремума, но, тем не менее, во многих случаях позволяет произвести отбор управлений, подозрительных на оптимальность.

Замечание 18. Для того, чтобы найти оптимальное управление из принципа максимума надо решить так называемую двухточечную краевую задачу — совместно проинтегрировать прямую (17.6) и сопряженную (17.7) системы уравнений. На левом конце задано n граничных условий $y(t_0) = y^*$, а на правом — m условий $y(t_k) \in M$ и $n - m$ условий трансверсальности (17.10). При этом при каждом $t \in T$ надо решать задачу (17.9) максимизации функции Понтрягина.

Замечание 19. Утверждения 1 и 2 теоремы принципа максимума остаются верными и в том случае, когда ресурсы управления, задаваемые множеством Ω зависят от времени достаточно «гладким» образом. Например, если множество $\Omega(t)$ в каждый момент времени $t \in (t_0, t_k)$ непрерывно сверху, то есть для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $0 < \Delta t < \delta$ следует $\varrho(\Omega(t + \Delta t), \Omega(t)) \leq \varepsilon$. Здесь $\varrho(A, B)$ — полурасстояние Хаусдорфа между множествами A и B , которое по определению равно

$$\varrho(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} \varrho(x, y).$$

3. Два уровня управления для сингулярно возмущенных систем

Задача формирования управляющих сигналов многоуровневой управляемой системы возникает в разных ситуациях:

- а) биологических(персонально) управляемых систем;
- б) автоматических управляемых систем;
- г) полуавтоматических управляемых систем.

При полуавтоматическом управлении движением возникает еще одна возможная схема двухуровневого управления. Предположим, что верхний уровень управления представлен человеком (пилотом). Он осуществляет управление в реальном времени, используя собственные данные о движении объекта. Нижний уровень автоматического управления вступает в действие в экстремальной ситуации либо автоматически, либо по сигналу от верхнего (второго) уровня.

Пусть динамическая система (после проведения процедур нормализации и обезразмеривания) состоит из двух подсистем вида:

$$\mu \frac{dz}{dt} = \varphi(z, y, u_1), \quad z(t_0) = a, \quad u_1(\cdot) \in \mathcal{U}_1, \quad (17.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(z, y, u_2), \quad y(t_0) = b, \quad u_2(\cdot) \in \mathcal{U}_2, \quad (17.12)$$

где $0 < \mu \equiv \text{const} \ll 1$.

Система вида (17.11), (17.12), с малым параметром μ при производной, принадлежит к классу **сингулярно возмущенных систем**. Векторная переменная называется медленной, а переменная z — быстрой.

Выбор управления $u_1(\cdot) \in \mathcal{U}_1$ позволяет реализовать синтез автоматического уровня управления и одновременно выполнить условия теоремы А.Н. Тихонова.

Примеры:

- 1) Управление торможением автомобиля: управление u_2 реализуется водителем, управление u_1 — антиблокировочной системой.
- 2) Управление спуском ЛА с помощью руля высоты u_1 и тяги двигателя u_2 .

Управление u_1 выбирается в виде линейной комбинации основного u_1^0 и дополнительного Δu_1 управлений. Основное автоматическое управление выбирается из условия существования изолированного корня z^0 правой части уравнения (17.11) при фиксированном значении координат второй подсистемы, т.е.

$$\varphi(z^0, y, u_1^0(y)) = 0 \Rightarrow z^0 = \varphi^{-1}(y, u_1^0(y)). \quad (17.13)$$

Дополнительное управление Δu_1 строится как отрицательная обратная связь по отклонениям $\Delta z(\tau) = z(\tau) - z^0$ от точки покоя z^0 , позволяющая асимптотически по быстрому времени $\tau = \frac{t}{\mu}$ стабилизировать положение равновесия z^0 присоединенной системы:

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi(z, y, u_1(y, \Delta z)). \quad (17.14)$$

Этот результат опирается на доказанную А.Н. Тихоновым (1952г.) теорему о поведении решений системы дифференциальных уравнений типа (17.11), (17.12)

$$\begin{cases} \mu \frac{dz}{dt} = \varphi(z, y, t), & z(t_0) = z^*, \quad t \in [t_0, t_k], \quad z(t) \in R^l, \\ \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), & y(t_0) = y^*, \quad y(t) \in R^m, \\ 0 < \mu \equiv \text{const} \ll 1, & n = l + m. \end{cases} \quad (17.15)$$

При $\mu = 0$ получим вырожденную (укороченную) систему

$$\begin{cases} \varphi(\tilde{z}, \tilde{y}, t) = 0 \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = f(\tilde{z}, \tilde{y}, t), & y(t_0) = y^*. \end{cases}$$

При замене времени $t = \mu\tau$ получим присоединенную (быструю) систему

$$\frac{dz}{d\tau} = \varphi(z, y, t), \quad z(t_0) = z^*. \quad (17.16)$$

В системе уравнений (17.16) величины y, t рассматриваются как постоянные параметры.

Теорема 21 (А.Н. Тихонов, 1952). Пусть выполнены пять условий в открытом выпуклом подмножестве $(z, y, t) \in D \subset R^{l+m+1}$:

1. функции $\varphi(z, y, t)$, $f(z, y, t)$ аналитичны в D по всем переменным;
2. для присоединенной подсистемы уравнение $\varphi(z, y, t) = 0$ относительно z имеет изолированные корни (точки покоя) — $z_j^0 = \varphi^{-1}(y, t)$ (при фиксированных y, t);
3. все точки покоя z_j^0 асимптотически устойчивы;
4. начальные условия z^* принадлежат области притяжения точки покоя z_j^0 ;
5. функция $f(\varphi^{-1}(y, t), y, t)$ аналитична в D по y, t .

Тогда найдется такое μ_0 , что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ решение системы (17.11), (17.12) существует, единственно и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) &= \tilde{y}(t) \quad \forall t \in [t_0, \tilde{t}], \quad \tilde{t} \leq t_k; \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) &= \tilde{z}(t) \quad \forall t \in (t_0, \tilde{t}]. \end{aligned}$$

Таким образом, система двухуровневого управления сингулярно возмущенной системой имеет функциональную схему (см. рис. 17.3) отличную от схемы, представленной на рис. 17.2.

Возможно также и большее количество уровней управления, образующих иерархическую систему управления движением, например, система управления тестирующим динамическим стендом-тренажером [17] имеет три уровня.

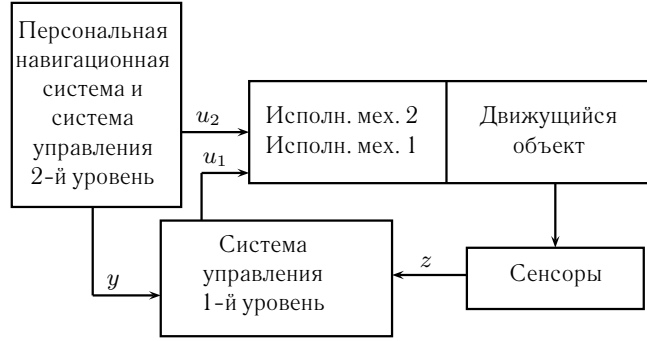


Рис. 17.3. Двухуровневое управление сингулярной системой

Лекция 18

Двухуровневое управление планированием летательного аппарата

Будем считать, что летательный аппарат (ЛА) представляет собой твердую оболочку, имеющую плоскость симметрии, совпадающую с вертикальной плоскостью. Центр масс ЛА расположен на продольной оси и не меняет своего положения относительно корпуса в процессе полета. При выгорании топлива создается реактивная тяга P , которая направлена вдоль продольной оси ЛА. Тогда можно отдельно рассматривать боковое движение ЛА и движение в вертикальной плоскости. Для полетов в районе аэродрома пренебрегаем сферичностью и вращением Земли.

Движение ЛА в вертикальной плоскости описывается 2-мя группами уравнений: уравнения движения центра масс C , которые представляют собой уравнения Мещерского при движении точки переменной массы

$$M \frac{d\vec{V}}{dT} = M\vec{g} + \vec{A} + \vec{P}$$

и уравнения движения вокруг центра масс

$$\frac{d\vec{G}}{dT} = \vec{M}_z.$$

Здесь M — масса ЛА; $\vec{V}$ — вектор абсолютной скорости движения центра масс ЛА;

$M\vec{g}$ — гравитационная сила; $\vec{A}$ — равнодействующая аэродинамических сил;

$\vec{P} = \vec{v} \frac{dM}{dT}$ — реактивная сила, вызванная выбросом частиц топлива; $\vec{v}$ — относительная скорость выброса частиц топлива;

$\vec{G}$ — кинетический момент корпуса ЛА; $\vec{M}_z$ — момент аэродинамических сил, действующих на ЛА;

Спроектируем первое уравнение на оси скоростной системы координат $Cx'y'z'$, где проекции вектора скорости ц.м. имеют вид $\vec{V}_c = (V, 0, 0)^T$, а угловой скорости вращения скоростного трехгранника $Cx'y'z' - \vec{\Omega}_c = (0, 0, \dot{\theta})^T$. Тогда уравнения движения ЛА в вертикальной плоскости в проекции на $Cx'y'z'$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} M\dot{V} &= P \cos \alpha - X(V, \alpha) - Mg \sin \theta, \\ MV\dot{\theta} &= P \sin \alpha + Y(V, \alpha) - Mg \cos \theta, \\ \dot{\varphi} &= \Omega, \\ J_z \dot{\Omega} &= M_z(V, \alpha, \Omega, \delta), \\ \dot{M} &= -U, \quad P = \nu U \\ \dot{L} &= V \cos \theta, \quad \dot{H} = V \sin \theta, \end{aligned} \tag{18.1}$$

где H — высота полета; L — дальность полета; V — скорость ЛА; M — его масса; Ω — угловая скорость поворота корпуса ЛА; $\alpha = \varphi - \theta$ — угол атаки; φ — угол тангажа, θ — траекторный

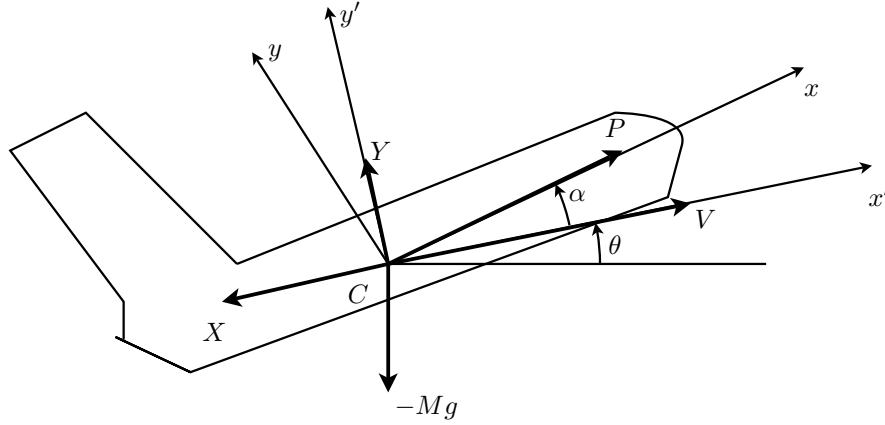


Рис. 18.1. Полет ЛА в вертикальной плоскости

угол; J_z — момент инерции корпуса; Mg — гравитационная сила; X, Y — составляющие суммарной аэродинамической силы; M_z — аэродинамический момент; ν — величина относительной скорости истечения частиц из сопла двигателя.

В рассматриваемом случае управляемый объект имеет два управляющих воздействия — величину тяги P и отклонение руля высоты δ .

Аэродинамические силы X и Y приближенно вычисляются согласно соотношениям, полученным в результате продувок в аэродинамических трубах:

$$X = \frac{\rho V^2}{2} S c_x(\alpha), \quad Y = \frac{\rho V^2}{2} S c_y(\alpha),$$

$$c_x(\alpha) = c_x^0 + B c_y^2, \quad c_y(\alpha) = c_y^0 + c_y^\alpha \alpha,$$

где S — площадь крыла, ρ — плотность воздуха, c_x, c_y — безразмерные аэродинамические коэффициенты; $c_x^0, c_y^0, c_y^\alpha, B$ — безразмерные постоянные, α — угол атаки ЛА.

Будем рассматривать режим планирования ЛА, при котором справедливы допущения:

- а) $P \equiv 0$ — планирование осуществляется без тяги (пилот только контролирует процесс планирования);
- б) $\theta < 0$ — ЛА все время снижается;
- в) изменение высоты сравнительно невелико, т.е. $\rho, g = \text{const}$;
- г) при вычислении аэродинамических коэффициентов можно пренебречь c_y^0 и $B c_y^2$;
- д) аэродинамический момент можно представить как

$$M_z = M_z(V, \alpha, \delta) = -\frac{\rho V^2}{2} S b (m_z^\delta \delta + m_z^\alpha \alpha),$$

где b — расстояние от ц.м. до центра давления ЛА, $m_z^\delta > 0, m_z^\alpha > 0$ — постоянные аэродинамические коэффициенты.

Тогда уравнения (18.1) упрощаются:

$$\begin{cases} M\dot{V} = -X(V, \alpha) - Mg \sin \theta, \\ MV\dot{\theta} = Y(V, \alpha) - Mg \cos \theta, \\ \dot{\varphi} = \Omega, \quad \alpha = \varphi - \theta, \\ J_z \dot{\Omega} = -\frac{\rho V^2}{2} S b (m_z^\delta \delta + m_z^\alpha \alpha). \end{cases} \quad (18.2)$$

Построим двухуровневую систему управления планированием ЛА, разделив его движение на медленные и быстрые составляющие, используя подход, изложенный в лекции 17. Покажем, что в нашем случае управляемая система является системой тихоновского типа.

Рассмотрим этапы проектирования двухуровневой системы управления планированием.

1. Нормализация и обезразмеривание уравнений движения ТЛА

Предположим, что рассматриваемый аппарат принадлежит к классу тяжелых летательных аппаратов (ТЛА), для которых характерное время T_2 фугоидных колебаний центра масс порядка $T_2 \approx 1$ мин.

Пусть характерная скорость планирования $V_* = 300$ м/с., характерное ускорение центра масс связано с ускорением свободного падения. Поскольку характерные ускорение и скорость связаны соотношением $gT_* = V_*$, откуда получаем, что характерное время спуска равно величине порядка $T_* \approx 30$ сек.

Характерное время движения корпуса вокруг центра масс получим, выписав уравнения колебаний корпуса ЛА вокруг центра масс при горизонтальном полете с постоянной скоростью (при $\theta \equiv 0$, $\delta \equiv 0$)

$$J_z \ddot{\varphi} + \frac{m_z^\alpha \varrho V_*^2 S b}{2} \varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0.$$

Выберем $T_1^2 = \frac{2J_z}{\varrho V_*^2 S b} = \frac{1}{\omega_0^2}$ (при $m_z^\alpha \approx 1$). Параметр T_1 представляет характерное время вращательного движения ЛА ($T_1 \approx 1/6$ периода собственных колебаний корпуса вокруг ц.м.) и для нашего аппарата $T_1 \approx 1$ сек.

Следовательно выполнены соотношения $T_1 \ll T_* \approx \frac{1}{2}T_2$. Положим малый параметр равным $\mu = \frac{T_1}{T_*} \ll 1$.

Считаем, что при планировании выполняется соотношение $M_* g = \frac{\varrho V_*^2}{2} S$, выражающее баланс характерных сил, действующих на ТЛА (при $c_x^0 = 1$).

Введем новые (безразмерные) переменные: $V = V_* v$, $\Omega = \Omega_* \omega$, $M = m M_*$, $T = t T_*$, где $\Omega_* = \frac{1}{T_1}$.

Нормализованная система уравнений планирования ЛА примет вид

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -c_x^0 v^2 - \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} = c_y^\alpha \alpha v - \frac{\cos \theta}{v}, \\ \mu \frac{d\omega}{dt} = -(m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta) v^2, \\ \mu \frac{d\varphi}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (18.3)$$

Начальные условия для системы (18.3) следующие: начальная скорость $v(t_0) = v_0 \approx 1$; наклон траектории $\theta(t_0) = \theta_0$ ($|\theta_0| \ll 1$); угловая скорость корпуса $\omega(t_0) = \omega_0$, ($\omega_0 \approx 0$); наклон корпуса $\varphi(t_0) = \varphi_0$, ($0 < \varphi_0 \ll 1$).

Отметим, что осталось всего одно управление — угол отклонения руля высоты δ .

2. Анализ присоединенной системы и синтез алгоритма управления рулем высоты

Рассмотрим быстрое (компьютерное) время $\tau = \frac{t}{\mu}$. Поскольку выполнены соотношения $t \in [0, t_k]$, где $t_k \leq 1$, то в быстром времени решение присоединенной системы исследуется на отрезке

$$\tau \in [0, \tau_k], \quad \text{где} \quad \tau_k \rightarrow +\infty \text{ при } \mu \rightarrow 0.$$

Присоединенная система запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{d\tau} = -(m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta) v^2, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \omega, \quad \alpha(\tau) = \varphi(\tau) - \theta. \end{cases} \quad (18.4)$$

При ее анализе фиксируем параметры $\theta, v = \text{const}$, таким образом система (18.4) — линейная система. Для применения теоремы Тихонова должна существовать изолированная точка покоя этой системы, причем асимптотически устойчивая.

Пусть в точке покоя выполнены равенства $\varphi = \varphi_*$, $\omega = 0$, где некоторый угол $\varphi_* = \varphi_*(\theta, v)$, зависящий от медленных переменных. В силу линейности системы (18.4) точка покоя $(\varphi_*, 0)$ изолированная. Чтобы ее реализовать, необходимо повернуть руль высоты на балансирующий угол

$$\delta_0(v, \theta) = -\frac{m_z^\alpha}{m_z^\delta} (\varphi_* - \theta). \quad (18.5)$$

Сконструируем управление в виде $\delta = \delta_0(v, \theta) + \Delta\delta(v, \theta, \Delta\varphi, \Delta\omega)$, где δ_0 — программное управление, а $\Delta\delta$ — корректирующее управление. Оно формируется в виде обратной связи по быстрым переменным и призвано обеспечить устойчивость выбранной точки покоя.

Допустим, что имеется точная информация от датчиков $z_1 = \omega$, $z_2 = \varphi$. Тогда корректирующая составляющая управления рулем высоты имеет вид

$$\Delta\delta = k_1(\varphi - \varphi_*) + k_2\omega,$$

где $(\varphi_*, 0)$ — соответствующая точка покоя.

Поскольку система (18.4) полностью управляемая, подбором k_1, k_2 можно добиться асимптотической устойчивости уравнений в отклонениях

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\omega}{d\tau} = -m_z^\alpha v^2 \Delta\varphi - m_z^\delta v^2 \Delta\delta, \\ \frac{d\Delta\varphi}{d\tau} = \Delta\omega \end{cases} \quad (18.6)$$

от точки покоя присоединенной системы в быстром компьютерном времени τ .

Как будет показано в лекции 20 асимптотическую устойчивость точки покоя $(\varphi_*, 0)$ можно обеспечить, решая задачу оптимизации квадратичного функционала

$$\int_{\tau_0}^{\infty} (\Delta\varphi^2 + \Delta\omega^2 + \Delta\delta^2) d\tau \rightarrow \min_{\Delta\delta}, \quad (18.7)$$

где $\Delta\varphi(\tau) = \varphi - \varphi_*$, $\Delta\omega(\tau) = \omega$ — отклонения от точки покоя.

По теореме Тихонова в начальный момент точка (ω_0, φ_0) должна принадлежать области притяжения точки покоя. Это условие выполнено, поскольку присоединенная система линейна. При этом $\varphi_*(\theta, v)$ — пока неизвестный нам программный угол тангажа, который определяется на верхнем уровне системы управления.

3. Редукция к вырожденной (упрощенной) системе с помощью теоремы Тихонова

Вырожденная система описывает поведение медленных переменных и имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{v}}{dt} = -c_x^0 \tilde{v}^2 - \sin \tilde{\theta}, & \tilde{v}(t_0) = v_0, \\ \frac{d\tilde{\theta}}{dt} = c_y^\alpha (\tilde{\varphi} - \tilde{\theta}) \tilde{v} - \frac{\cos \tilde{\theta}}{\tilde{v}}, & \tilde{\theta}(t_0) = \theta_0, \\ \tilde{\varphi} = \varphi_*(\tilde{\theta}, \tilde{v}), & \tilde{\omega} = 0. \end{cases} \quad (18.8)$$

При соответствующем выборе коэффициентов обратной связи k_1, k_2 , например, решая задачу (18.7), для точки покоя $(\varphi_*, 0)$ выполнены условия теоремы Тихонова поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \theta(t, \mu) &= \tilde{\theta}(t), & \forall t \in [t_0, t_k], \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} v(t, \mu) &= \tilde{v}(t), & \forall t \in [t_0, t_k], \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \omega(t, \mu) &= \tilde{\omega}(t), & \forall t \in (t_0, t_k], \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi(t, \mu) &= \tilde{\varphi}(t), & \forall t \in (t_0, t_k], \end{aligned}$$

то есть решения вырожденной системы близки к решениям полной системы уравнений. Таким образом управление планированием сводится к управлению упрощенной системой, имеющей более низкий порядок. В нашем случае это управление можно осуществить посредством выбора соответствующей точки покоя $(\varphi_*(\tilde{\theta}, \tilde{v}), 0)$.

В простейшем случае программное движение для медленных переменных выберем постоянным: $\tilde{\theta} = \theta_* < 0$ и $\tilde{v} = v_*$, где v_* — требуемая скорость, а θ_* — требуемый постоянный угол снижения. Таким образом программное движение есть свободное планирование с постоянной скоростью и постоянным углом снижения. Отметим, что программное движение реализуется точно, если в начальный момент выполнено $v(t_0) = v_*$, $\theta(t_0) = \theta_*$.

4. Построение управления для вырожденной системы.

Обеспечить программное движение можно, выбрав подходящий угол тангажа. Действительно, движение с постоянной скоростью v_* возможно, если правая часть первого уравнения системы (18.8) равна нулю, то есть $\sin \theta = -c_x^0 v_*^2$, откуда $\theta_* = -\arcsin c_x^0 v_*^2$.

Тогда из второго уравнения системы (18.8) находим балансировочный угол тангажа

$$\varphi_* = \theta_* + \frac{\cos \theta_*}{v_*^2 c_y^\alpha}.$$

Программный угол поворота руля высоты δ_0 обеспечивающий точку покоя $(\varphi_*, 0)$ находится из соотношения (18.6).

Проверим, что программное движение реализуемо, когда имеются начальные возмущения $v(t_0) \neq v_*$ и $\theta(t_0) \neq \theta_*$. Для этого должны выполняться условия устойчивости балансировочного решения вырожденной системы. Обозначим $\alpha_* = \varphi_* - \theta_*$. Запишем линеаризованные уравнения в отклонениях от программного движения

$$\begin{cases} \frac{d\Delta v}{dt} = -2c_x^0 v_* \Delta v - \cos \theta_* \Delta \theta, \\ \frac{d\Delta \theta}{dt} = c_y^\alpha (\varphi_* - \theta_*) \Delta v + \frac{\cos \theta_*}{v_*^2} \Delta v - c_y^\alpha v_* \Delta \theta + \frac{\sin \theta_*}{v_*} \Delta \theta, \end{cases}$$

откуда получим

$$\begin{cases} \frac{d\Delta v}{dt} = -2c_x^0 v_* \Delta v - \cos \theta_* \Delta \theta, \\ \frac{d\Delta \theta}{dt} = (c_y^\alpha \alpha_* v + \frac{\cos \theta_*}{v_*^2}) \Delta v + (\frac{\sin \theta_*}{v_*} - c_y^\alpha v_*) \Delta \theta. \end{cases} \quad (18.9)$$

Н айдем корни характеристического уравнения системы (18.9)

$$\begin{pmatrix} -2c_x^0 v_* - \lambda & -\cos \theta_* \\ c_y^\alpha \alpha_* v + \frac{\cos \theta_*}{v_*^2} & \frac{\sin \theta_*}{v_*} - c_y^\alpha v_* - \lambda \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + (2c_x^0 v_* + c_y^\alpha v_* - \frac{\sin \theta_*}{v_*}) \lambda + \cos \theta_* c_y^\alpha \alpha_* + \frac{\cos \theta_*^2}{v_*^2} +$$

$$+ 2c_x^0 v_* (c_y^\alpha v_* - \frac{\sin \theta_*}{v_*}) = 0.$$

Так как $c_y^\alpha v_* - \frac{\sin \theta_*}{v_*} > 0$, $(\theta_* < 0)$, для устойчивости системы достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$2c_x^0 v_* + c_y^\alpha v_* - \frac{\sin \theta_*}{v_*} > 0,$$

$$\cos \theta_* c_y^\alpha \alpha_* > 0.$$

Первое неравенство выполнено, поскольку $v_* > 0$, все параметры положительны, а программный угол снижения $\theta_* < 0$.

Второе неравенство выполнено, если $\alpha_* > 0$, т.е. угол атаки положителен. Тогда подъемная сила, действующая на ЛА, положительна. Поскольку балансировочный угол атаки в нашей задаче положителен, система уравнений в отклонениях от программного движения вырожденной системы устойчива, поэтому для вырожденной системы не потребовалось формировать дополнительное управление верхнего уровня. Достаточно обойтись управлением руля высоты в виде

$$\delta = -\frac{m_z^\alpha}{m_z^\delta} (\varphi_* - \theta_*) + k_1 (\varphi - \varphi_*) + k_2 \omega,$$

где постоянные k_1, k_2 находятся из решения задачи (18.7).

Вывод: возможно планирование без тяги двигателя. Для его осуществления необходимо знать θ_* , зависящее от v_* , а также текущие угол тангажа $\varphi(t)$ и угловую скорость корпуса $\omega(t)$.

Лекция 19

Классическая вариация и необходимое условие слабого локального минимума

1. Формула приращения функционала для задачи с фиксированным временем и свободным правым концом траектории

Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления системой

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y(t_0) = y^*, \quad (19.1)$$

когда время движения фиксировано $t \in [t_0, t_k]$ и правый конец траектории свободен $M = R^n$.

Предположим, что оптимальное управление удовлетворяет ограничениям

$$u^0(\cdot) \in C^1[t_0, t_k], \quad u^0(t) \in \text{int } \Omega \subset R^s, \quad (19.2)$$

решение экстремальной задачи

$$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}$$

существует, т.е. функционал $J(u)$ достигает минимума.

Процесс $\{y(t), u(t), [t_0, t_k]\}$ называется допустимым, если управление $u(\cdot)$ удовлетворяет условиям (19.2), а траектория $y(\cdot)$ — условиям (19.1).

Обозначим $\{y^0(t), u^0(t), [t_0, t_k]\}$ — оптимальный процесс.

Введем норму в пространстве C^1 следующим образом

$$\|y\|_{C^1} = \max\{\|y\|_C, \|\dot{y}\|_C\},$$

где $\|y\|_C = \max_{t \in [t_0, t_k]} |y(t)|$.

Определение 19. Процесс $\{y^0(t), u^0(t), [t_0, t_k]\}$ доставляет локальный слабый минимум функционалу $J(u)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого допустимого процесса $\{y(t), u(t), [t_0, t_k]\}$, удовлетворяющего условию $\|y(\cdot) - y^0(\cdot)\|_{C^1} \leq \delta$, справедливо неравенство $J(u) \geq J(u^0)$.

Такой процесс будем называть локально оптимальным.

Рассмотрим допустимый процесс $\{y(t), u(t), [t_0, t_k]\}$, где $u(t) = u^0(t) + \Delta u(t)$. Запишем полное приращение управления в виде $\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t)$, где вариация управления представляет любые функции из класса $\delta u(\cdot) \in C^1[t_0, t_k]$ при условии $\delta u(t_0) = 0$, а величина ε выбрана достаточно малой, чтобы выполнялось условие

$$u^0(\cdot) + \varepsilon \delta u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in C^1[t_0, t_k] \mid u(t) \in \Omega \subset R^s \forall t \in [t_0, t_k]\}.$$

Соответствующее приращение функционала определяется как

$$\Delta J(u^0) = J(u^0 + \Delta u) - J(u^0) = \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y} \Delta y(t_k) + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|), \quad (19.3)$$

где $\Delta y(t)$ — решения нелинейной системы уравнений в отклонениях

$$\dot{\Delta y} = f(y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - f(y^0, u^0), \quad \Delta y(t_0) = 0. \quad (19.4)$$

Рассмотрим функцию Понтрягина $H(\psi, y, u) = \psi(t)^\top f(y(t), u(t))$, где $\psi(t)$ — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right)^\top \psi.$$

Зададим краевое условие в виде $\psi(t_k) = - \left(\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y} \right)^\top$ (позднее покажем, что это условие следует из условий трансверсальности принципа максимума $\psi(t_k) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y} \right)^\top \perp M$ и выполнено условие $\lambda_0 > 0$, поэтому в силу однородности сопряженной системы можно положить $\lambda_0 = 1$). Тогда,

поскольку $\Delta y(t_0) = 0$, из (19.3) следует

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) &= -\psi^\top(t_k)\Delta y(t_k) + \psi^\top(t_0)\Delta y(t_0) + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|) = \\ &= -\int_{t_0}^{t_k} \frac{d(\psi^\top \Delta y)}{dt} dt + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|) = \\ &= -\int_{t_0}^{t_k} (\dot{\psi}^\top \Delta y + \psi^\top \Delta \dot{y}) dt + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|).\end{aligned}\tag{19.5}$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned}\psi^\top \Delta \dot{y} &= \psi^\top f(y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - \psi^\top f(y^0, u^0) = \\ &= H(\psi, y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) + \\ &\quad + H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0) = \\ &= \frac{\partial H}{\partial y}(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) \Delta y + \Delta_u H(\psi, y^0, u^0) + \bar{o}_2(|\Delta y(t_k)|),\end{aligned}$$

где $\Delta_u H(\psi, y^0, u^0) = H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0)$.

Подставим полученное выражение в (19.5) и преобразуем первое слагаемое (19.5) учитывая, что ψ явно не зависит от y , откуда следует

$$\psi^\top \frac{\partial f(y, u)}{\partial y} = \frac{\partial \psi^\top f(y, u)}{\partial y} = \frac{\partial H(\psi, y, u)}{\partial y}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\Delta J(u^0) &= -\int_{t_0}^{t_k} \left(-\psi^\top \frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u)}{\partial y} \Delta y + \right. \\ &\quad \left. + \Delta_u H(u^0) \right) dt - \int_{t_0}^{t_k} \bar{o}_2(|\Delta y(t)|) dt + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|) = \\ &= -\int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{\partial \Delta_u H(\psi, y^0, u^0)}{\partial y} \Delta y + \Delta_u H(\psi, y^0, u^0) \right] dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_k} \bar{o}_2(|\Delta y(t)|) dt + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|)\end{aligned}\tag{19.6}$$

формулу приращения функционала.

2. Необходимое условие слабого локального минимума

В дальнейшем нам потребуется теорема о непрерывной зависимости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) от параметра.

Исследуем свойства решений $\Delta y(t)$ нелинейной системы уравнений в отклонениях

$$\Delta \dot{y} = f(y^0 + \Delta y, u^0 + \Delta u) - f(y^0, u^0), \quad \Delta y(t_0) = 0.$$

Рассмотрим уравнение в вариациях системы (19.1)

$$\frac{d(\delta y)}{dt} = \left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial u} \right) \delta u, \quad \delta y(t_0) = 0.$$

Теорема 22. Если правая часть ОДУ (2) гладкая и $\Delta u = \varepsilon \delta u$, то приращение траектории Δy (с точностью $\bar{o}(\varepsilon)$) выражается через вариацию $\Delta y = \varepsilon \delta y + \bar{o}(\varepsilon)$.

В формуле для приращения функционала присутствует выражение $\Delta_u H(\psi, y^0, u^0) = H(\psi, y^0, u^0 + \Delta u) - H(\psi, y^0, u^0)$. Поскольку $u^0 \in \text{int } \Omega$, то можно записать

$$\Delta_u H(\psi, y^0, u^0) = \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0)}{\partial u} \Delta u + \bar{o}_3(|\Delta u(t)|).$$

Аналогично

$$\frac{\partial \Delta_u H(\psi, y^0, u^0)}{\partial y} = \frac{\partial^2 H(\psi, y^0, u^0)}{\partial y \partial u} \Delta u + \bar{o}_4(|\Delta u(t)|).$$

Подставив Δy в формулу приращения функционала (учитывая, что $\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t)$) и отбрасывая члены второго порядка малости по ε в (19.6), получим выражение для приращения функционала

$$\Delta J(u^0) = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0)}{\partial u} \delta u dt - \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial^2 H(\psi, y^0, u^0)}{\partial y \partial u} \delta y \delta u dt + \bar{o}(\varepsilon).$$

В функциональном анализе доказывается, что если для функционала $J(u)$ существует производная по направлению для любого направления δu , то существует вариация Лагранжа

$$\delta J(u^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^0 + \varepsilon \delta u) - J(u^0)}{\varepsilon}.$$

В нашем случае выполнено $\Delta J(u^0) = \varepsilon \delta J(u^0) + \bar{o}(\varepsilon)$, т.е. найдена вариация Лагранжа функционала $J(u)$

$$\delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0)}{\partial u} \delta u dt. \quad (19.7)$$

Так как по предположению $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$ — оптимальный процесс, то $\Delta J(u^0) \geq 0$, откуда следует неравенство

$$\int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial H(\psi, y^0, u^0)}{\partial u} \delta u dt \leq 0.$$

Но точка u^0 внутренняя, поэтому вариации δu и $-\delta u$ допустимы и необходимое условие для выполнения неравенства таково:

$$\frac{\partial H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_k]. \quad (19.8)$$

Это равенство представляет собой необходимое условие слабого локального минимума.

Покажем, что этот результат является частным случаем принципа максимума Понтрягина (ПМП), приведенной в лекции 17.

Напомним формулировку ПМП. Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k]\}$ — оптимальный процесс, то $\exists$ нетривиальная пара $\{\lambda_0 \geq 0, \psi(\cdot)\}$ такая, что

1. $\max_{u(t) \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \quad \forall t \in T \subset [t_0, t_k];$
2. $\psi(t_k) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y} \right)^\top \perp M$ в точке $y^0(t_k)$;
3. $\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0$ при $t \in [t_0, t_k]$.

Приведем наш случай к виду, о котором речь идет в общей формулировке, данной на лекции 17. Для этого перепишем систему (19.1) в виде

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), & y(t_0) = y^*, \\ \dot{y}_{n+1} = 1, & y_{n+1}(t_0) = t_0. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{y}^\top = (y^\top, y_{n+1})$ — расширенный вектор состояния.

Тогда можно записать $\dot{\tilde{y}} = \tilde{f}(\tilde{y}, u)$ и функция Понтрягина расширенной системы имеет вид $\tilde{H} = \tilde{\psi}^\top \tilde{f}(\tilde{y}, u) = \psi^\top f(y, u) + \psi_{n+1} = H(\psi, y, u) + \psi_{n+1}$.

Сопряженная система выписывается как

$$\dot{\tilde{\psi}} = - \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}} \right)^\top \tilde{\psi} \implies \begin{cases} \dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^\top \psi, \\ \dot{\psi}_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Докажем, что задача невырождена. Допустим противное, т.е. $\lambda_0 = 0$.

Терминальное множество ПМП задается следующими соотношениями $M = \{y_{n+1} - t_k = 0\}$, $M \subset R^{n+1}$ и представляет собой плоскость, параллельную $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Касательное подпространство $T_M(y)$ задается набором векторов $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, 0) = (\tilde{\gamma}, 0)$.

Тогда ортогональность вектора из левой части условия трансверсальности ПМП к многообразию M сводится к равенству нулю скалярного произведения

$$\left(\psi(t_k) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^\top \right)^\top \tilde{\gamma} + \psi_{n+1} \cdot 0 = 0.$$

Поскольку $\tilde{\gamma}$ произвольное, то $\psi(t_k) = -\lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^\top$. Если $\lambda_0 = 0$, то $\psi(t_k) = 0$.

Из условия $\tilde{\mathcal{H}}(t_k) = 0$ следует $\psi_{n+1}(t_k) = 0$, откуда в силу однородности сопряженной системы следует $\tilde{\psi} \equiv 0$, что противоречит условию ПМП о не нулевой паре $\{\lambda_0, \psi\}$.

Следовательно, $\lambda_0 > 0$ и можно нормировать $\lambda_0 = 1$. Тогда из условия 1 теоремы ПМП следует (19.8) как необходимое условие слабого локального минимума.

Лекция 20

Лагранжева форма необходимых условий оптимальности

1. Задача Больца в вариационном исчислении

Представим следующую задачу вариационного исчисления. Пусть кривая $y(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, $y(t_0) = y^*$ минимизирует функционал Больца

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, \dot{y}) dt + l(y(t_k)) = \int_{t_0}^{t_k} L(y, \dot{y}) dt + l(y(t_k)),$$

где лагранжиан $L(y, \dot{y})$ и терминант $l(y(t_k))$ — гладкие функции по всем переменным.

Представим исходную задачу как задачу оптимального управления с фиксированным временем и без ограничений на управление, для которой применим принцип максимума Понтрягина из предыдущей лекции

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = f_0(y, u), & y_0(t_0) = 0, \\ \dot{y} = u, & y(t_0) = y^*. \end{cases}$$

В расширенном пространстве состояний $\tilde{y}^\top = (y_0, y)^\top$ функционал Больца можно представить как терминальный

$$J(u) = \varphi_0(\tilde{y}(t_k)) = y_0(t_k) + l(y(t_k)).$$

Ограничения на область значений управления отсутствуют, т.е. $\Omega = R^n$.

Рассмотрим функцию Понтрягина $\tilde{H} = \tilde{\psi}^\top \tilde{f}(\tilde{y}, u) = \psi_0 f_0 + \psi^\top u$. Учитывая, что

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}} = \begin{pmatrix} 0 & \partial f_0 / \partial y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

выпишем сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi} = -\psi_0 \cdot \left(\frac{\partial f_0}{\partial y} \right)^\top. \end{cases} \quad (20.1)$$

Поскольку из условия трансверсальности следует

$$\tilde{\psi}^\top(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0(\tilde{y}(t_k))}{\partial \tilde{y}} = -\left(1, \frac{\partial l(y(t_k))}{\partial y}\right),$$

получим $\psi_0 = -1$, а $\psi^\top(t_k) = -\frac{\partial l(y(t_k))}{\partial y}$.

Тогда функцию Понтрягина можно записать в виде

$$\tilde{H} = -f_0(y, u) + \psi^\top u.$$

Согласно необходимому условию слабого минимума (19.8), доказанному на предыдущей лекции, на оптимальном решении выполнено равенство

$$\frac{\partial \tilde{H}(\tilde{\psi}(t), \tilde{y}^0(t), u^0(t))}{\partial u} = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_k].$$

Следовательно

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u} = -\frac{\partial f_0(y^0(t), u^0(t))}{\partial u} + \psi^\top(t) = 0,$$

откуда $\psi(t) = \left(\frac{\partial f_0(y^0(t), u^0(t))}{\partial u} \right)^\top$. Подставим полученное выражение для ψ в (20.1), заменим $f_0 = L$, $u = \dot{y}$ и транспонируем. В результате получим уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{y}} = L_y. \quad (20.2)$$

Из условий трансверсальности получим краевое условие для уравнения Эйлера

$$L_{\dot{y}}(t_k) = -\frac{\partial l(y^0(t_k))}{\partial y}. \quad (20.3)$$

Из условия стационарности гамильтониана на оптимальном решении $\tilde{H} = \text{const}$ следует интеграл энергии: функция $E(t) = L_{\dot{y}}\dot{y} - L \equiv \text{const}$ постоянна на оптимальном решении системы. Действительно, поскольку $f_0 = L$, а $u = \dot{y}$, из ПМП следует, что на оптимальной траектории гамильтониан

$$\tilde{H}(t) = \psi^\top(t)u(t) - f_0(y(t), u(t)) = L_{\dot{y}}\dot{y} - L = E(t) \equiv \text{const}.$$

2. О связи вариационных принципов механики с принципом максимума

Пусть дана система материальных точек с массами m_i и координатами $r_i = (y_1^i, y_2^i, y_3^i)$, $i = 1, \dots, n$. Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{r}_i^2,$$

а потенциальная — задана функцией $U(r_1, \dots, r_n)$. Из принципа Гамильтона–Остроградского следует, что движение системы происходит по экстремалиям функционала действия по Гамильтону

$$S = \int_{t_0}^{t_k} L(r, \dot{r}) dt. \quad (20.4)$$

Лагранжиан имеет вид $L(r, \dot{r}) = T(\dot{r}) - U(r)$, а моменты времени t_0, t_k , а также начальные и конечные условия фиксированы.

Следовательно, выполнено уравнение Эйлера (20.2) для функционала действия (20.4):

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{r}} = L_r,$$

которое представляет собой уравнения Лагранжа второго рода для системы материальных точек.

Таким образом, здесь уравнения движения получены из принципа максимума как необходимого условия слабого локального минимума для функционала действия по Гамильтону.

Получим теперь уравнения Гамильтона. Обозначим $\psi_i = L_{\dot{r}_i} = m_i \dot{r}_i$ — импульсы материальных точек системы.

Функция Понтрягина $H = \sum \psi_i \dot{r}_i - T + U = T + U$ представляет полную энергию системы и связана преобразованием Лежандра с функцией L .

Уравнения Эйлера в канонической (гамильтоновой) форме принимают вид

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i} = \frac{\psi_i}{m_i}, \quad \dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_i} \Rightarrow m_i \ddot{r}_i = F_i.$$

Первая группа уравнений представляет определение импульса, а вторая — второй закон Ньютона для системы материальных точек.

Таким образом, в случае потенциальных сил гамильтонову форму уравнений Лагранжа второго рода можно получить из принципа максимума Понтрягина.

3. Лагранжева форма условий оптимальности

Лагранжеву форму принципа максимума Понтрягина получим на примере задачи управления с интегральным функционалом качества и при фиксированных начальных и конечных условиях $t_0, t_k, y(t_0), y(t_k)$:

$$\dot{y} = f(y, u), \quad (20.5)$$

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in \text{PC}[t_0, t_k] \mid u(t) \in \Omega \subset R^s\}, \quad (20.6)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y(t), u(t)) dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \quad (20.7)$$

Подинтегральную функцию $f_0(y, u)$ и правые части системы $f(y, u)$ считаем непрерывно дифференцируемыми по всем переменным $f_i(y, u) \in C^1[t_0, t_k]$.

Поставленная задача является задачей на условный экстремум, поскольку дифференциальную связь (20.5) можно рассматривать как ограничение типа равенства

$$\dot{y} - f(y, u) = 0.$$

В соответствии с принципом Лагранжа [7] составим функционал Лагранжа

$$\mathcal{L}(y, u, \psi, \lambda_0) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, u) dt + \int_{t_0}^{t_k} \psi^\top (\dot{y} - f(y, u)) dt,$$

где $\lambda_0 \geq 0$ и $\psi(t)$ — множители Лагранжа. Согласно правилу Лагранжа, искать экстремум можно так, как будто все переменные задачи независимы:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, \psi, \lambda_0) &\rightarrow \min_{y(\cdot)}, \\ \mathcal{L}(y, u, \psi, \lambda_0) &\rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, \end{aligned} \quad (20.8)$$

считая здесь множители Лагранжа и остальные переменные фиксированными.

Пусть $\{y^0(t), u^0(t)\}$ — оптимальный процесс на $[t_0, t_k]$.

Рассмотрим Лагранжиан $L = \lambda_0 f_0(y, u) + \psi^\top (\dot{y} - f(y, u))$.

Ему соответствует расширенная функция Понтрягина $\bar{H} = \psi^\top f(y, u) - \lambda_0 f_0 = \psi^\top \dot{y} - L$.

Рассмотрим первое из условий (20.8) — условие минимума функционала $\mathcal{L}$ по $y(\cdot)$ при фиксированном $u^0(t)$. Приращение траектории может быть представлено в виде $\Delta y(t) = y(t) - y^0(t) = \varepsilon x(t)$, где $x(t)$ — вариация траектории $y^0(t)$. Вариацией траектории есть произвольная функция $x(t) \in C^1[t_0, t_k]$ с краевыми условиями $x(t_0) = x(t_k) = 0$.

Рассмотрим (при фиксированных u^0, ψ, λ_0) функцию

$$F(\varepsilon) = \mathcal{L}(y^0 + \varepsilon x(t), u^0, \psi, \lambda_0) = \int_{t_0}^{t_k} L(y^0 + \varepsilon x(t), \dot{y}^0 + \varepsilon \dot{x}(t)) dt.$$

Если лагранжиан $L(t, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируем по всем переменным, функцию F можно дифференцировать под знаком интеграла и необходимое условие минимума $\left. \frac{dF}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$ записывается в виде равенства нулю вариации по Лагранжу:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_{t_0}^{t_k} (L_{y^0} x + L_{\dot{y}^0} \dot{x}) dt = 0, \quad \Rightarrow \\ F'(0) &= \int_{t_0}^{t_k} \left[\lambda_0 \frac{\partial f_0(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} x(t) + \psi^\top(t) \cdot (\dot{x}(t) - \frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} x(t)) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Произведем замену линейного оператора $P = (\dot{x}(t) - A(t)x(t))$, где $A = \frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y}$ на сопряженный ему оператор P^* .

Покажем, что сопряженный оператор имеет вид

$$P^* = (-\dot{\psi}(t) - A^\top(t)\psi(t)).$$

В соответствии с определением сопряженного оператора $(g, Px) = (P^*g, x)$ (здесь скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ означает линейный функционал, а P^* — сопряженный оператор) должно быть выполнено равенство

$$\int_{t_0}^{t_k} \psi^\top(t) (\dot{x}(t) - Ax(t)) dt = \int_{t_0}^{t_k} (-\dot{\psi}(t) - A^\top(t)\psi(t))^\top x(t) dt.$$

Действительно,

$$\int_{t_0}^{t_k} (\psi^\top \dot{x} - \psi^\top Ax + \dot{\psi}^\top x + \psi^\top Ax) dt = \int_{t_0}^{t_k} \frac{d(\psi^\top x)}{dt} dt = \psi^\top(t_k)x(t_k) - \psi^\top(t_0)x(t_0) = 0.$$

Перепишем условие стационарности (20.9) в виде:

$$\int_{t_0}^{t_k} \left[\lambda_0 \frac{\partial f_0(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} - (\dot{\psi}(t) + A^\top(t)\psi(t))^\top \right] x(t) dt = 0. \quad (20.10)$$

Оно выполнено при любых $x(\cdot) \in C^1[t_0, t_k]$ с конечными условиями $x(t_0) = x(t_k) = 0$. Поэтому, учитывая, что $\psi(t)^\top = L_{\dot{y}}$, из (20.10) получим в лагранжевой форме

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right)^\top \psi + \lambda_0 \left(\frac{\partial f_0(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right)^\top \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(L_{\dot{y}}) = L_y, \quad (20.11)$$

что соответствует гамильтоновой форме

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial \tilde{H}(y^0(t), u^0(t), \psi(t))^\top}{\partial y}. \quad (20.12)$$

Поэтому в литературе по оптимальному управлению динамическими системами употребляются два названия для системы (20.11), (20.12):

- сопряженная система дифференциальных уравнений, что соответствует сопряженному оператору;
- уравнения Эйлера, что является расширением известных в теоретической механике уравнений Лагранжа второго рода для голономных консервативных систем.

Перейдем теперь к формулировке принципа максимума в лагранжевой форме для задачи оптимального управления, сформулированной в 17-ой лекции, т.е. оптимального прихода на гладкое многообразие $M = \{\varphi_i(y(t_k)) = 0, i = 1, \dots, m \text{ rank } \frac{\partial \varphi_i(y)}{\partial y_j} = m\}$ в смысле терминального функционала Майера $J = \varphi_0(y(t_k))$. В этой задаче лагранжиан имеет вид $L = \psi^\top(\dot{y} - f(y, u))$, а терминант $-l(y(t_k)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i$.

Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L}(\lambda_0, \dots, \lambda_m, t_k, \psi, y, u) = \int_{t_0}^{t_k} L dt + l(y(t_k)).$$

Без доказательства сформулируем необходимые условия оптимальности ПМП в форме Лагранжа (доказательство можно найти в [7]).

Теорема 23. Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ — оптимальный процесс, то существуют множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ и $\psi_1, \dots, \psi_n$ не все равные нулю, такие, что выполняются условия:

а) стационарности по $y(\cdot)$:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{y}} + L_y = 0, \quad \Leftrightarrow \dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y} \right)^\top \psi;$$

б) трансверсальности :

$$L_{\dot{y}}(t_k^0) = -l_y(t_k^0) \Rightarrow \psi^\top(t_k^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y(t_k^0))}{\partial y} = - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(y(t_k^0))}{\partial y};$$

в) стационарности по t_k :

$$\mathcal{L}_{t_k} = 0 \Rightarrow l_y \dot{y}^0(t_k^0) = 0 \Rightarrow -\psi^\top(t_k^0) f(y^0(t_k^0), u^0(t_k^0)) = \mathcal{H}(t_k^0) = 0;$$

г) минимума по u лагранжиана $L = \psi^\top \dot{y} - H$:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \Omega} L(\dot{y}^0(t), y^0(t), u) &= L(\dot{y}^0(t), y^0(t), u^0(t)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \max_{u \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), u) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)); \end{aligned}$$

д) неотрицательности множителя: $\lambda_0 \geq 0$.

Замечание 20. Поскольку лагранжиан L не зависит явно от времени, существует интеграл для решений уравнения Эйлера, т.е. на оптимальной траектории выполнено условие $E(t) = L_{\dot{y}} \dot{y} - L = \text{const}$. Поскольку на оптимальном решении $L(t) \equiv 0$, потому $E(t) = L_{\dot{y}} \dot{y} = \psi^\top f = \mathcal{H}(t) \equiv \text{const}$. Следовательно, учитывая условие в) изложенной выше теоремы, получим условие стационарности гамильтониана $\mathcal{H}(t) \equiv 0$.

Лекция 21

Оптимальная стабилизация при неограниченных ресурсах

1. Управление линейной системой с квадратичным функционалом качества на конечном интервале времени

Рассмотрим линеаризованные уравнения в отклонениях от программного движения $\dot{y}^n = f(y^n, u^n)$ управляемой системы $\dot{y} = f(y, u)$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, а $y(t_0) = y^*$:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\Delta u, \quad x(t_0) = x^* \neq 0, \quad u = u^n + \Delta u, \quad (21.1)$$

где $x(t) = y(t) - y^n(t)$ — отклонения; матрицы $A = \frac{\partial f(y, u)}{\partial y} \Big|_{y=y^n}$, и $B = \frac{\partial f(y, u)}{\partial u} \Big|_{u=u^n}$ вычислены вдоль программного движения. В дальнейшем для простоты будем считать $u^n = 0$.

Поставим задачу оптимальной стабилизации — сделать отклонения как можно меньше в смысле функционала следующего вида:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} (x^\top G x + u^\top N u) dt + x^\top(t_k) S x(t_k) \rightarrow \min_{u(\cdot)}. \quad (21.2)$$

Здесь $G(t) = G(t)^\top \geq 0$, $N(t) = N(t)^\top > 0$, $S = S^\top > 0$ — симметричные матрицы. Таким образом поставлена задача минимизации отклонений и ресурсов управления на отрезке времени $t \in [t_0, t_k]$, $t_0 < t_k \leq \infty$ — задача оптимального управления линейной системой на фиксированном отрезке времени со свободным правым концом траектории.

Обозначим оптимальное решение задачи через $u^0(\cdot) \in C^1[t_0, t_k]$.

Перепишем управляемую систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x^\top G x + u^\top N u, & x_0(t_0) &= 0, \\ \dot{x} &= A x + B u, & x(t_0) &= x^*. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Введем расширенный вектор состояния $\tilde{x} = (x_0, x)^\top$ и запишем функционал качества (21.2) в виде

$$J = \varphi_0(\tilde{x}(t_k)) = x_0(t_k) + x^\top(t_k) S x(t_k).$$

Рассмотрим функцию Понтрягина

$$\tilde{H} = \psi_0(x^\top G x + u^\top N u) + \psi^\top (A x + B u)$$

и сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0 \\ \dot{\psi} &= -A^\top \psi - 2(Gx)\psi_0. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Поскольку правый конец траектории свободен, краевые условия (трансверсальности) для сопряженной системы имеют вид

$$\tilde{\psi}(t_k) = -\lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0(\tilde{x}(t_k))}{\partial \tilde{x}} \right)^\top. \quad (21.5)$$

Но $\frac{\partial \varphi_0(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = (1, 2x^\top(t_k)S)$. На лекции 19 было доказано, что $\lambda_0 \neq 0$.

В силу однородности сопряженной системы (21.4) можно пронормировать $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, тогда получим $\psi_0 \equiv -\frac{1}{2}$, а $\psi(t_k) = -Sx(t_k)$.

Следовательно, сопряженную систему (21.4) можно записать как

$$\dot{\psi} = -A^\top \psi + Gx, \quad \psi(t_k) = -Sx(t_k). \quad (21.6)$$

Необходимое условие оптимальности (см. лекцию 19) имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{H}(\tilde{y}(t), u(t), \psi(t))}{\partial u} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_k].$$

Из условия оптимальности следует равенство $-u^\top N + \psi^\top B = 0$. Так как $N > 0$, то оптимальное управление имеет вид

$$u^0(t) = N^{-1}(t)B^\top(t)\psi(t).$$

Таким образом двухточечная краевая задача ПМП в нашем случае принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + BN^{-1}B^\top \psi, & x(t_0) &= x^*, \\ \dot{\psi} &= -A^\top \psi + Gx, & \psi(t_k) &= -Sx(t_k). \end{aligned} \quad (21.7)$$

Будем искать решение краевой задачи (21.7) в виде $\psi(t) = -\mathcal{L}(t)x$, где симметричная матрица $\mathcal{L} \in M_{n \times n}(R) \leq 0$. Тогда можно записать $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}(t)x$.

Вычислим

$$\dot{\psi} = -\dot{\mathcal{L}}x - \mathcal{L}\dot{x} = -\dot{\mathcal{L}}x - \mathcal{L}(Ax + Bu) = -\dot{\mathcal{L}}x - \mathcal{L}(Ax - BN^{-1}B^\top \mathcal{L}x).$$

С другой стороны, второе уравнение системы (21.9) можно записать в виде $\dot{\psi} = A^\top \mathcal{L}x + Gx$, поэтому выполнено равенство

$$(A^\top \mathcal{L} + G)x = (-\dot{\mathcal{L}} - \mathcal{L}A + \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L})x.$$

Поскольку $x(t)$ — вообще говоря, произвольное решение системы (21.3), получим дифференциальное матричное уравнение — уравнение Риккати для матрицы обратной связи $\mathcal{L}(t)$ оптимального управления u^0 :

$$\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^\top \mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L}(t_k) = S. \quad (21.8)$$

Заметим, что краевое условие этого уравнения для решения задачи Коши задано на правом конце $t = t_k$. Таким образом, проинтегрировав матричную систему уравнений (21.8) в обратном времени, получим оптимальное решение поставленной задачи (поскольку функционал качества является строго выпуклым, а управляемая система линейна) в виде линейного обратного синтеза $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}(t)x$.

Замкнутая оптимально стабилизируемая система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BN^{-1}B\mathcal{L})x, & x(t_0) &= x^*, \\ \dot{\mathcal{L}} &= -\mathcal{L}A - A^\top \mathcal{L} - G + \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L} = 0, & \mathcal{L}(t_k) &= S. \end{aligned} \quad (21.9)$$

2. Стационарные системы при бесконечном времени управления

Рассмотрим случай, когда система стационарна, а время управления бесконечно, т.е. $t_k = \infty$, $A, B, G, N = \text{const}$. Заметим, что в этом случае, вообще говоря, может быть $J(u) \rightarrow \infty$ и задача оптимизации теряет смысл.

Добавим условие полной управляемости (см. лекцию 3):

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n, \quad A, B = \text{const}.$$

Как было показано ранее, в этом случае управляемая система стабилизируема, поэтому существуют $\lambda > 0$ и управления $u = Kx$ такие, что $|x(t)| \leq Ce^{-\lambda t}$, где $\lambda > 0$ любое положительное число. Из приведенной оценки отклонений следует, что для таких u функционал $J(u)$ конечен, а его терминальная часть равна нулю и не зависит от матрицы S . Следовательно, в задаче с бесконечным временем можно положить $S = 0$.

Представим матрицу G в виде разложения Холецкого $G = D \cdot D^\top$, матрица D — квадратный корень из матрицы D . Пусть пара матриц (A, D) является полностью наблюдаемой, т.е.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} D \\ DA \\ \dots \\ DA^{n-1} \end{bmatrix} = n.$$

Заметим, что если $G > 0$, то условие управляемости выполняется автоматически.

При сделанных предположениях поставленная задача оптимизации имеет смысл и верна следующая теорема [17].

Теорема 24 (Калман, 1962). *Если пара матриц (A, B) полностью управляемая, а пара (A, D) полностью наблюдаемая, то при фиксированном t_k и любой матрице S существует предел решения уравнения Риккати (21.8)*

$$\lim_{t_k - t_0 \rightarrow \infty} \mathcal{L}(t_0) = \mathcal{L}_0 \geq 0,$$

где $\mathcal{L}_0$ — единственное решение алгебраического уравнения Риккати

$$\mathcal{L}_0 A + A^\top \mathcal{L}_0 + G - \mathcal{L}_0 B N^{-1} B^\top \mathcal{L}_0 = 0. \quad (21.10)$$

Матрица $A - BN^{-1}B^\top \mathcal{L}_0$ гурвицева.

Управление $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}_0 x$ является оптимальным, а оптимальное значение функционала равно $J(u^0) = V(t_0) = x(t_0)^\top \mathcal{L}_0 x(t_0)$.

Покажем, что при $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}_0 x = Kx$ замкнутая система (21.9) экспоненциально устойчива. Рассмотрим функцию Ляпунова $V = x^\top \mathcal{L}_0 x$. Производная в силу системы равна

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{x}^\top \mathcal{L}_0 x + x^\top \mathcal{L}_0 \dot{x} = (x^\top A^\top - x^\top \mathcal{L}_0 B N^{-1} B^\top) \mathcal{L}_0 x + \\ &\quad + x^\top \mathcal{L}_0 (Ax - B N^{-1} B^\top \mathcal{L}_0 x) = \\ &= x^\top (A^\top \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_0 A - 2\mathcal{L}_0 B N^{-1} B^\top \mathcal{L}_0) x = \\ &= x^\top (-\mathcal{L}_0 B N^{-1} B^\top \mathcal{L}_0 - G) x = \\ &= -x^\top G x - u^{0\top} N u^0 < 0, \end{aligned} \quad (21.11)$$

так как по условию $G \geq 0$, $N > 0$. Таким образом, производная функции Ляпунова в силу системы отрицательно определена, откуда имеет место асимптотическая устойчивость замкнутой системы.

Вычислим оптимальное значение функционала. Поскольку $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}_0 x$, из (21.11) следует

$$\begin{aligned} J(u^0) &= \int_{t_0}^{\infty} (x^\top G x + u^{0\top} N u^0) dt = \int_{t_0}^{\infty} (x^\top G x + \\ &\quad + x^\top \mathcal{L}_0 B N^{-1} B^\top \mathcal{L}_0 x) dt = \int_{t_0}^{\infty} -\frac{dV}{dt} dt = V(t_0) - V(\infty) = V(t_0). \end{aligned}$$

Следовательно, $J(u^0) = V(t_0) = x(t_0)^\top \mathcal{L}_0 x(t_0)$ и получена явная зависимость оптимальной величины функционала от начальных условий.

Теперь найдем оценку сверху для самих отклонений, ограничившись случаем $G > 0$. Из (21.11) следует

$$\frac{dV}{dt} = -x^\top G x - u^{0\top} N u^0 \leq -x^\top G x < 0,$$

т.к. матрицы $G > 0$, $N > 0$ по условию.

Известно, что существует ортогональное преобразование $x = S\xi$, приводящее положительно определенную квадратичную форму к диагональному виду,

$$x^\top G x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2,$$

где $\lambda_i > 0$ — собственные значения матрицы G . Тогда получим оценку

$$\lambda_{\min} |x|^2 \leq x^\top G x \leq \lambda_{\max} |x|^2.$$

Аналогично для квадратичной формы $x^\top \mathcal{L}_0 x$

$$\mu_{\min} |x|^2 \leq x^\top \mathcal{L}_0 x \leq \mu_{\max} |x|^2.$$

Используя эти неравенства, получим

$$\frac{dV}{dt} \leq -x^\top G x \leq -\lambda_{\min} |x|^2 \leq -\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}} V,$$

откуда следует

$$V(t) \leq V(t_0) \exp \left(-\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}} (t - t_0) \right).$$

Но

$$|x(t)|^2 \leq \frac{1}{\mu_{\min}} V \leq \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} |x(t_0)|^2 e^{-\frac{\lambda_{\min}}{\mu_{\max}} (t - t_0)},$$

потому верно неравенство

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}} |x(t_0)| e^{-\frac{\lambda_{\min}}{2\mu_{\max}} (t - t_0)},$$

откуда следует экспоненциальная устойчивость нулевого решения замкнутой системы.

Замечание 21. Следует отметить, вернувшись к случаю конечного времени $t_k < \infty$, что при выборе $S = \mathcal{L}_0$, где $\mathcal{L}_0$ — решение алгебраического уравнения Риккати (21.10), оптимальное управление будет иметь вид

$$u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}_0 x,$$

таким образом коэффициенты обратной связи в задаче оптимальной стабилизации стационарной системы на конечном отрезке времени постоянны.

Лекция 22

Квадратичная стабилизация и линейные матричные неравенства

Рассмотрим теперь другой подход к решению поставленной в предыдущей лекции задаче. Мы получили, что для линейной стационарной управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (22.1)$$

и критерия качества

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x^T G x + u^T N u) dt, \quad G = G^T \geq 0, \quad N = N^T > 0. \quad (22.2)$$

Управление в виде обратной связи $u = -N^{-1}B^T \mathcal{L}_0 x$, где $\mathcal{L}_0$ — решение алгебраического уравнения Риккати (21.10), стабилизирует замкнутую систему (22.1), а функция $V(x) = x^T \mathcal{L}_0 x$ является для нее функцией Ляпунова, и вдоль траекторий системы функция

$$V(t) = \int_t^{\infty} (x^T G x + u^T N u) dt$$

убывает.

Теперь попытаемся, не связываясь с уравнением Риккати, найти постоянную матрицу $\mathcal{L} = \mathcal{L}^T > 0$ такую, чтобы квадратичная форма $V = x^T \mathcal{L} x$ была функцией Ляпунова для замкнутой системы (22.1) с управлением $u = -N^{-1}B^T \mathcal{L} x$. Тогда уравнения замкнутой системы примут вид

$$\dot{x} = (A - BN^{-1}B^T \mathcal{L})x = A_k x, \quad (22.3)$$

где матрица $A_k = A - BN^{-1}B^T \mathcal{L}$. Производная функции Ляпунова в силу системы должна удовлетворять условию

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V(x) = x^T (\mathcal{L} A_k + A_k^T \mathcal{L}) x < 0,$$

что эквивалентно выполнению следующих матричных неравенств

$$\mathcal{L} A_k + A_k^T \mathcal{L} < 0, \quad \mathcal{L} > 0. \quad (22.4)$$

Подставляя в неравенство (22.4), выражение для матрицы A_k , получим неравенство

$$\mathcal{L} A + A^T \mathcal{L} - 2\mathcal{L} B N^{-1} B^T \mathcal{L} < 0. \quad (22.5)$$

Обозначим обратную матрицу $S = \mathcal{L}^{-1}$ и умножим (22.5) слева и справа на S . Тогда верно неравенство

$$AS + SA^T - 2BN^{-1}B^T < 0, \quad S > 0. \quad (22.6)$$

Следовательно, надо разрешить относительно S матричное неравенство (22.6), которое является **линейным матричным неравенством (ЛМИ)**.

По определению линейным матричным неравенством называется неравенство относительно неизвестных переменных $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ следующего вида

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m > 0, \quad (22.7)$$

где F_i — действительные симметричные матрицы размера $n \times n$, т.е. $F_i = F_i^T$, $i = 0, \dots, m$.

Решение x неравенства (22.7) понимается в том смысле, что при фиксированном x квадратичная форма

$$z^T F(x) z > 0, \quad \forall z \in R^n, \quad z \neq 0,$$

является положительно определенной.

Рассмотрим более общее, чем (22.6), неравенство

$$AX + XA^T + W > 0, \quad \text{где } W = W^T > 0, \quad (22.8)$$

где A, W — заданные матрицы, а X — неизвестная симметричная матрица размерности $(n \times n)$. Тогда, выбрав базис $\{E_1, \dots, E_m\}$, $m = n(n+1)/2$ в пространстве симметричных матриц (или

в изоморфном ему евклидовом пространстве R^m), матрицу X можно представить в виде $X = \sum_{j=1}^m x_j E_j$, а неравенство (22.8) соответственно в виде

$$\sum_{j=1}^m x_j (AE_j + E_j A^\top) + W > 0,$$

который аналогичен ЛМІ неравенству (22.7).

Покажем, что линейное матричное неравенство (22.7) определяет выпуклое ограничение на вектор x , т.е. множество $\mathcal{F} = \{x \mid F(x) > 0\}$ выпукло. Действительно, если $x_1, x_2 \in \mathcal{F}$ и $\alpha \in [0, 1]$, то

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) > 0.$$

Понятно, что система линейных матричных неравенств

$$F_1(x) > 0, \dots, F_k(x) > 0$$

может быть записана как одно неравенство

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k(x) \end{pmatrix} > 0.$$

Для решения линейных матричных неравенств разработаны эффективные методы численного решения, основанные на идеях выпуклой оптимизации.

Вернемся к неравенству (22.6) и посмотрим, как меняется функционал J при различных решениях S (соответственно $\mathcal{L} = S^{-1}$).

Введем параметр $\gamma > 0$ и усилим неравенство (22.6), добавив слагаемое

$$AS + SA^\top - 2BN^{-1}B^\top + \gamma(BN^{-1}B^\top + SGS) \leq 0, \quad S > 0, \quad (22.9)$$

где матрица $G \geq 0$. Попытаемся найти решение этого квадратичного матричного неравенства.

Нам понадобится следующая лемма, доказательство которой можно найти в [29]:

Лемма 1. *Матричное уравнение Ляпунова*

$$AP + PA^\top + W = 0$$

при $W = W^\top$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(\lambda_i + \lambda_j) \neq 0$ для всех собственных значений λ_i матрицы A . При этом

$$P = \int_{t_0}^{\infty} e^{A(t-t_0)} W e^{A^\top(t-t_0)} dt.$$

Матрица $P > 0$ тогда и только тогда, когда A гурвицева и:

- 1) либо $W > 0$;
- 2) либо $W = CC^\top$ и пара (A, C) управляемая.

Следовательно, если существует положительно определенное решение уравнения Ляпунова, то матрица A гурвицева.

Следствие 1. *Если матрица A гурвицева и $W > 0$, $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0$, то значение функционала J следующего вида*

$$J = \int_{t_0}^{\infty} x^\top W x dt \quad (22.10)$$

можно вычислить по формуле $J = x_0^\top P x_0$, где P — решение уравнения, сопряженного к рассмотренному выше уравнению Ляпунова

$$PA + A^\top P + W = 0. \quad (22.11)$$

Докажем это.

Пусть $W = D^\top D$ и пара (A, D) наблюдаема. Тогда P , как решение уравнения Ляпунова (22.11) можно представить в виде

$$P = \int_{t_0}^{\infty} e^{A^\top(t-t_0)} D^\top D e^{A(t-t_0)} dt > 0.$$

Поскольку решение системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ есть $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$, то для значения функционала J можно записать

$$J = \int_{t_0}^{\infty} x^{\top} D^{\top} D x dt = \int_{t_0}^{\infty} x_0^{\top} e^{A^{\top}(t-t_0)} D^{\top} D e^{A(t-t_0)} x_0 / dt = x_0^{\top} P x_0,$$

что доказывает (22.10).

Следствие 2 (неравенство Ляпунова). Пусть матрица A гурвицева и $P_0 \geq 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$AP_0 + P_0 A^{\top} + BB^{\top} = 0.$$

Неравенство Ляпунова

$$AP + PA^{\top} \leq -BB^{\top}$$

разрешимо, причем для любого решения P справедливо неравенство $P \geq P_0$.

Заметим, что в случае, когда пара матриц (A, B) управляемая, по лемме Ляпунова следует строгое неравенство $P_0 > 0$.

Применим **следствие 1 леммы 1** для системы с гурвицевой матрицей $A_k = A - BN^{-1}B^{\top}\mathcal{L}$ и матрицей $W = G + \mathcal{L}BN^{-1}B^{\top}\mathcal{L}$ функционала J . Напомним, что $u = -N^{-1}B^{\top}\mathcal{L}x$, где $\mathcal{L} = S^{-1}$, а S — некоторая матрица, являющаяся решением неравенства (22.9).

Соответствующее выбранным матрицам уравнение Ляпунова запишется так:

$$A_k^{\top}\mathcal{L}_k + \mathcal{L}_k A_k = -(G + \mathcal{L}BN^{-1}B^{\top}\mathcal{L}). \quad (22.12)$$

Получив решение $\mathcal{L}_k > 0$ уравнения (22.12), значение функционала J можно вычислить по формуле (22.10): $J = x_0^{\top}\mathcal{L}_k x_0$. Заметим, что в уравнении Ляпунова (22.12) матрица $\mathcal{L}$ должна удовлетворять неравенству (22.6) или усиленному неравенству (22.9).

Умножив левую часть неравенства (22.9) слева и справа на S^{-1} , получим

$$\mathcal{L}A + A^{\top}\mathcal{L} - 2\mathcal{L}BN^{-1}B^{\top}\mathcal{L} \leq -\gamma(G + \mathcal{L}BN^{-1}B^{\top}\mathcal{L}). \quad (22.13)$$

Перепишем (22.13) в виде

$$A_k^{\top}\left(\frac{1}{\gamma}\mathcal{L}\right) + \left(\frac{1}{\gamma}\mathcal{L}\right)A_k \leq -(G + \mathcal{L}BN^{-1}B^{\top}\mathcal{L}).$$

Вычтем из этого неравенства равенство (22.12) и получим неравенство

$$A_k^{\top}\left(\frac{1}{\gamma}\mathcal{L} - \mathcal{L}_k\right) + \left(\frac{1}{\gamma}\mathcal{L} - \mathcal{L}_k\right)A_k \leq 0. \quad (22.14)$$

Как уже говорилось, матрица A_k гурвицева, и существует положительно определенное решение уравнения Ляпунова (22.12): $\mathcal{L}_k > 0$.

В свою очередь матрица $P = \frac{1}{\gamma}\mathcal{L} - \mathcal{L}_k$ удовлетворяет неравенству Ляпунова (22.14), следовательно $P \geq 0$ и значит $\gamma\mathcal{L}_k \leq \mathcal{L}$.

Таким образом, выполнены неравенства

$$J = x_0^{\top}\mathcal{L}_k x_0 \leq \frac{1}{\gamma}x_0^{\top}\mathcal{L}x_0 = \frac{1}{\gamma}x_0^{\top}S^{-1}x_0,$$

где $S > 0$ — решение квадратичного неравенства (22.9). Это квадратичное неравенство можно заменить на линейное, используя следующую лемму [14]:

Лемма 2. Дана блочная матрица

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

где X_{11}, X_{22} — квадратные матрицы.

Если $\det|X_{22}| \neq 0$, то X невырождена тогда и только тогда, когда матрица $Q = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21}$ (дополнение по Шуру) невырождена и

$$\det|X| = \det|X_{22}|\det|Q|.$$

Действительно, если вычесть из первой строки матрицы X вторую, умноженную слева на $X_{12}X_{22}^{-1}$, получим

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

откуда следует требуемый результат.

Следствие. Если $X_{11} = X_{11}^\top$, $X_{22} = X_{22}^\top$, $X_{21} = X_{12}^\top$, то

$$X > 0 \iff X_{22} > 0, \quad Q > 0.$$

Отметим, что если $X_{12} \neq 0$, а $X_{22} = \beta E_m$, не строгое неравенство $X \geq 0$ выполняется, если и только если $\beta > 0$, $Q \geq 0$.

Воспользуемся **леммой 2**, чтобы представить квадратичное неравенство (22.9) в линейном виде.

Представим матрицу G в виде квадратного корня $G = DD^\top$. Тогда система

$$\begin{pmatrix} AS + SA^\top + (\gamma - 2)BN^{-1}B^\top & \sqrt{\gamma}SD \\ \sqrt{\gamma}D^\top S & -E \end{pmatrix} \leq 0, \quad S > 0 \quad (22.15)$$

эквивалентна (22.9). Действительно, по следствию **леммы 2** неравенство (22.15) выполнено, если и только если дополнение по Шуру [14]

$$Q = AS + SA^\top + (\gamma - 2)BN^{-1}B^\top + \gamma SGS \leq 0,$$

что совпадает с левой частью неравенства (22.9).

Попутно мы получили такой результат: множество решений квадратичного неравенства (22.9) выпукло.

Теперь можно получить оценку сверху для функционала. Если для данного $\gamma > 0$ существует решение системы (22.15), то применив обратную связь

$$u = -N^{-1}B^\top S^{-1}x,$$

можно обеспечить значение функционала, ограниченное сверху величиной

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x^\top Gx + u^\top Nu)dt \leq \gamma^{-1}x_0^\top S^{-1}x_0. \quad (22.16)$$

Для того, чтобы найти минимум функционала, надо решить задачу одномерной минимизации правой части неравенства по параметру γ на интервале $\gamma \in (0, \infty)$.

Как видим, на первый взгляд задача стабилизации с использованием линейных матричных неравенств решается сложнее, чем линейно-квадратичная оптимальная задача (через уравнения Риккати). Но, как покажем ниже, решение с использованием LMI обобщается на случай, когда в линейной системе присутствуют мультипликативные неопределенности, например, некоторые элементы матрицы A известны не точно.

Лекция 23

Стабилизация линейной системы при наличии возмущений

Результаты предыдущей лекции распространяются на случай, когда в управляемой системе присутствуют неизвестные возмущения и (или) неопределенности.

1. Робастная квадратичная стабилизация линейной системы

Рассмотрим частный случай, когда матрица управляемой системы содержит неопределенности

$$\dot{x} = A(q)x + Bu, \quad q \in Q \subset R^m, \quad (23.1)$$

где Q — выпуклое множество (множество выпукло, если для любых $q_1, q_2 \in Q$, следует $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \in Q$, при $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_i \geq 0$).

Можно рассматривать разные виды неопределенностей:

а) интервальная неопределенность

$$q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

б) сферическая неопределенность

$$q \in Q = \{(q - q_0)^\top W^{-1}(q - q_0) \leq 1\},$$

где W — симметричная положительно определенная матрица. Множество Q — эллипсоид с центром в точке q_0 .

в) аффинная матричная неопределенность

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^m q_i A_i, \quad q \in Q,$$

где A_0, A_i — заданные матрицы, а множество Q — выпуклый многогранник в R^m .

Поставим задачу **робастной** стабилизации [29]: найти управление $u = Kx$ такое, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A(q) + BK)x, \quad x(0) = x_0,$$

при любом $q \in Q$ была асимптотически устойчива.

Рассмотрим решение для случая в) — аффинной неопределенности. Попытаемся найти $u = Kx$ так, чтобы для всех $q \in Q$ гарантировать некоторый заданный уровень μ для квадратичного критерия качества

$$J = \int_0^\infty (x^\top Gx + u^\top Nu) dt \leq \mu.$$

Для простоты будем считать, что матрицы $B, G = G^\top \geq 0, N = N^\top > 0$ известны точно.

Чтобы сформулировать результат для случая матричной аффинной неопределенности, воспользуемся материалом прошлой лекции. Кроме того нам понадобится необходимое и достаточное условие выполнения линейного матричного неравенства

$$F(x, q) \geq 0, \quad q \in Q,$$

где Q — выпуклый многогранник, а именно выполнение конечного числа неравенств

$$F(x, q^j) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (23.2)$$

в вершинах q^j многогранника Q .

Надо отметить, что число этих неравенств может получиться очень большим, например, для куба или параллелепипеда $l = 2^m$, а если интервально ограничен каждый элемент матрицы A , то $l = 2^{n^2}$.

Нам известно решение задачи квадратичной стабилизации при фиксированных $q^j, j = 1, 2, \dots, l$, являющихся вершинами многогранника Q . В силу выпуклости множества Q верна оценка

$$J \leq \gamma^{-1} x_0^\top S^{-1} x_0,$$

где симметричная матрица $S > 0$ является решением системы линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} A(q^j)S + SA(q^j)^\top + (\gamma - 2)BN^{-1}B^\top & \sqrt{\gamma}SD \\ \sqrt{\gamma}D^\top S & -E \end{pmatrix} \leq 0, \\ G = DD^\top, \quad j = 1, 2, \dots, l.$$

Эту систему линейных неравенств можно представить в виде одного неравенства высокой размерности. Для вычисления матрицы S в этом случае необходимо использовать хорошо развитые методы решения системы линейных неравенств большой размерности.

2. Стабилизация при наличии аддитивных возмущений

Постановка задачи об устойчивости системы при наличии постоянно-действующих возмущений дана в работе [26].

Рассмотрим частный случай этой задачи. Пусть дана возмущаемая система

$$\dot{y} = Y(t, y) + r(t). \quad (23.3)$$

Известно лишь, что постоянно действующие возмущения $r^\top(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ являются функциями, ограниченными по норме $\|r(t)\|_{L_p} \leq \eta_0$, а решения системы (23.3) существуют в окрестности невозмущенного (при $y(t_0) = 0$ и $r(t) \equiv 0$) движения $y^*(t) \equiv 0$.

Определение 20. [26] *Невозмущенное движение $y^*(t)$ устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\eta_1(\varepsilon)$ и $\eta_2(\varepsilon)$ такие, что всякие решения $y(t)$ системы (23.3), удовлетворяющие при $t = t_0$ неравенствам $|y(t_0) - y^*(t_0)| < \eta_1(\varepsilon)$, удовлетворяют при $t > t_0$ неравенствам*

$$|y_i(t) - y_i^*(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

для всех рассматриваемых функций $r(t)$, удовлетворяющих неравенству $\|r(t)\|_{L_p} < \eta_2(\varepsilon)$.

Теперь рассмотрим управляемую систему для частного случая аддитивных возмущений, которые ограничены по L_2 норме:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cw, \quad \|w\|_{L_2} \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad (23.4)$$

где пара матриц (A, B) является полностью управляемой, а норма возмущений определяется соотношением

$$\|w\|_{L_2}^2 = \int_0^\infty w^\top(t)w(t)dt.$$

Будем искать управление в виде обратной связи $u = Kx$. Управление должно минимизировать функционал

$$J = \sup_{\|w\|_{L_2}^2 \leq 1} \int_0^\infty (x^\top Gx + u^\top Nu)dt \rightarrow \min_K \quad (23.5)$$

Обозначим матрицу замкнутой системы $A_k = A + BK$. Тогда задачу можно переписать так:

$$\dot{x} = A_k x + Cw, \quad \|w\|_{L_2}^2 \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad (23.6)$$

$$J = \sup_{\|w\|_{L_2}^2 \leq 1} \int_0^\infty x^\top (G + K^\top N K) x dt \quad (23.7)$$

Определим множество достижимости системы (23.6) в момент времени T как

$$\mathcal{D}(T) = \{x(T) \mid x(t) - \text{решения (23.6)} \quad \forall w, \|w\|_{L_2}^2 \leq 1\}.$$

Объединение множеств достижимости для $T \geq 0$ называется просто **множеством достижимости**

$$\mathcal{D} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{D}(T).$$

Теорема 25. *Если пара (A_k, C) полностью управляемая, то множество достижимости системы (23.6) представляет собой эллипсоид*

$$\mathcal{D}(T) = \{x : x^\top W^{-1}(T)x \leq 1\},$$

где симметричная матрица $W(T)$ имеет вид

$$W(T) = \int_0^T e^{A_k t} C C^\top e^{A_k^\top t} dt. \quad (23.8)$$

Доказательство базируется на том, что решение системы (23.6) можно представить в виде

$$x(T) = \int_0^T e^{A_k(T-t)} C w(t) dt, \quad (23.9)$$

а матрица $W(T)$ в (23.8) является грамианом управляемости системы (23.6) и в силу полной управляемости $W(T) > 0$.

Убедимся, что «управление» $w(t) = C^\top e^{A_k^\top(T-t)} W^{-1}(T) x(T)$ переводит систему из начала координат в точку $x(T)$. Действительно, из (23.9) следует

$$\begin{aligned} x(T) &= \int_0^T e^{A_k(T-t)} C C^\top e^{A_k^\top(T-t)} W^{-1}(T) x(T) dt = \\ &= \left[\int_0^T e^{A_k(T-t)} C C^\top e^{A_k^\top(T-t)} dt \right] W^{-1}(T) x(T) = x(T), \end{aligned}$$

поскольку выражение в квадратных скобках есть грамиан управляемости $W(T)$. Поэтому верно неравенство

$$\int_0^T w^\top(t) w(t) dt = x^\top(T) W^{-1}(T) x(T) \leq 1,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Если матрица A_k гурвицева, то множество достижимости $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \{x : x^\top W^{-1} x \leq 1\},$$

где $W > 0$ — грамиан управляемости (относительно возмущений w):

$$W = \int_0^\infty e^{A_k t} C C^\top e^{A_k^\top t} dt.$$

Заметим, что матрица W является решением уравнения Ляпунова $A_k W + W A_k^\top = -C C^\top$.

Оценку для функционала (23.5) можно получить, используя следующую теорему.

Теорема 26. Если матрица A_k гурвицева, а пара (A_k, C) — управляема, и при некотором $\gamma > 0$ уравнение Риккати

$$P A_k + A_k^\top P + \frac{1}{\gamma^2} P C C^\top P + G + K^\top N K = 0 \quad (23.10)$$

имеет решение $P > 0$, то выполнено неравенство

$$J(w) \leq \gamma^2.$$

Доказательство.

Рассмотрим квадратичную форму $V(x) = x^\top P x$. Тогда производная в силу системы

$$\dot{V} = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = (A_k x + C w)^\top P x + x^\top P (A_k x + C w).$$

Допустим, что выполнено неравенство

$$\dot{V} \leq -x^\top (G + K^\top N K) x + \gamma^2 w^\top w. \quad (23.11)$$

Учитывая, что $V(x(0)) = 0$, проинтегрируем неравенство (23.11) и перейдем к пределу при $T \rightarrow \infty$ (это возможно, т.к. матрица A_k гурвицева):

$$0 \leq - \int_0^\infty x^\top (G + K^\top N K) x dt + \gamma^2 \int_0^\infty w^\top w dt,$$

откуда следует

$$J(w) \leq \gamma^2. \quad (23.12)$$

Неравенство (23.11) выполнено, если для любых пар x, w (включая и решения системы) справедливо неравенство

$$x^\top (P A_k + A_k^\top P + G + K^\top N K) x + x^\top P C w + w^\top C^\top P x - \gamma^2 w^\top w \leq 0.$$

Это верно, если матрица квадратичной формы отрицательно определена, т.е.

$$\begin{pmatrix} PA_k + A_k^\top P + G + K^\top NK & PC \\ C^\top P & -\gamma^2 E_m \end{pmatrix} \leq 0. \quad (23.13)$$

Последнее неравенство на основании леммы 2 лекции 21 эквивалентно квадратичному матричному неравенству (дополнение по Шуру для (23.13) $Q = X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} \leq 0$ есть)

$$PA_k + A_k^\top P + \frac{1}{\gamma^2} PCC^\top P + G + K^\top NK \leq 0,$$

что совпадает с левой частью (23.10). Таким образом, если существует решение $P > 0$ уравнения Риккати (23.10), то в силу неравенства Ляпунова выполнено неравенство $Q \leq 0$, а также эквивалентное ему неравенство (23.13) и, следовательно, справедлива оценка (23.12).

Замечание 22. Можно показать, что оценка сверху для функционала J достигается, если (при фиксированном K) существует решение задачи одномерной минимизации по параметру γ : найти $\gamma_{\min} = \min\{\gamma, \text{ для которых существует решение } P > 0 \text{ уравнения (23.10)}\}$.

В этом случае

$$\max_{\|w\|_{L_2}^2 \leq 1} J(w) = \gamma_{\min}^2.$$

3. Стабилизация линейной стохастической системы

Рассмотрим теперь случай, когда в управляемой системе аддитивные постоянно действующие возмущения представляют собой случайный процесс

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cw, \quad (23.14)$$

где w — белый шум единичной интенсивности, т.е. $M[w(t)] = 0$, а $M[w(t)w^\top(\tau)] = E_m \delta(t - \tau)$. Введем обозначения: вектор $q = Cw$ и $Q = CC^\top$ — симметричная матрица. Пусть известны $M[\overset{\circ}{x}(0)\overset{\circ}{x}^\top(0)] = P^0$ — матрица ковариаций и среднее значение $\mu_x(0) = M[x(0)]$ в начальный момент времени.

Сначала примем предположение, что в нашем распоряжении полная информация о реализациях случайных отклонений $x(t)$.

Рассмотрим задачу выбора управления $u(\cdot)$, минимизирующего функционал

$$J = M[x^\top(t_k)Sx(t_k) + \int_0^{t_k} (x^\top Gx + u^\top Nu) dt] \rightarrow \min_{u(\cdot)}, \quad (23.15)$$

где S, N, G — симметричные положительно определенные матрицы, а $t_k < \infty$ фиксировано.

Постановка задачи похожа на детерминированный случай $q \equiv 0$. В детерминированном случае решение находится в виде линейной обратной связи $u^0 = -Kx$, где $K = N^{-1}B^\top \mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ — симметричная матрица, являющаяся решением уравнения Риккати:

$$\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^\top \mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L}(t_k) = S. \quad (23.16)$$

Наводящие рассуждения: поскольку $M[q(t)] = 0$, то в среднем траектории ведут себя так же как при $q \equiv 0$. Отсюда решение стохастической задачи предположительно должно быть таким же, как и детерминированной, рассмотренной на лекции 21.

А можно ли сделать вывод, что вообще не нужно рассматривать стохастическую систему, а ограничиться детерминированным случаем? Этот вывод сделать нельзя, поскольку в детерминированном случае управление в виде обратной связи и программное дают одно и то же значение критерия качества. Действительно, проинтегрировав систему с $u = Kx$, получим зависимость $x(t)$ и, следовательно, и $u^0(t)$, которое дает то же значение функционала качества. В стохастическом случае это не так, что показывает следующий пример.

Пример 23.1. Рассмотрим случайный процесс с двумя состояниями. Начальное x_0 — дискретная случайная величина, принимающая значения 0 или 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 0 & 1 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Динамика процесса описывается уравнением $x_1 = x_0 + u_0$. Необходимо минимизировать функционал $J(u_0) = M[x_1^2] \rightarrow \min$.

Программное управление $u_0 = -\frac{1}{2} + c = \text{const}$. Поскольку $M[x_0] = \frac{1}{2}$ и $M[x_0^2] = \frac{1}{2}$, то

$$\begin{aligned} M[x_1^2] &= M[(x_0 + c - \frac{1}{2})^2] = M[(x_0 + c)^2] - M[x_0 + c] + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + c^2 \implies \\ \implies J^0 &= \frac{1}{4} \quad \text{при } c = 0, \quad u_0^0 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Управление с обратной связью дает

$$u_0^0 = -x_0 \implies J^0 = 0.$$

Как видим, в стохастическом случае управление с обратной связью строго лучше программного.

Вернемся к задаче о линейном регуляторе с квадратичным критерием. Действительно, можно показать, что в этом случае оптимальное решение есть $u^0 = Kx$ и оно полностью совпадает с детерминированным оптимальным стабилизатором. Этот результат есть следствие линейной обратной связи и квадратичного критерия качества. Он выражает «робастность» оптимального детерминированного решения к действию постоянно действующих возмущений. Разница только в величине функционала качества. В стохастической задаче функционал всегда больше, чем в детерминированном случае. Покажем это.

Критерий качества (23.15) можно переписать в виде

$$J = \text{Tr}[SP_x(t_k) + \int_0^{t_k} (G + K^\top NK)P_x(t)dt], \quad (23.17)$$

где $P_x(t)$ — матрица вторых моментов $P_x = M[xx^\top]$, а Tr — операция взятия следа матрицы: $\text{Tr} \|a_{ij}\| = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ — сумма диагональных элементов. При выводе (23.17) использовалось свойство операции Tr : для векторов a, b справедливы равенства $a^\top b = \text{Tr}[ab^\top] = \text{Tr}[ba^\top]$.

Можно показать [2], что оптимальное значение критерия качества вычисляется по формуле

$$J^0 = \text{Tr}[\mathcal{L}(0)P_x(0)] + \text{Tr}\left[\int_0^{t_k} Q\mathcal{L}(t)dt\right]. \quad (23.18)$$

Первое слагаемое можно представить в виде $\text{Tr}[\mathcal{L}(0)P_x(0)] = M[x^\top(0)\mathcal{L}(0)x(0)]$, что совпадает со значением функционала в детерминированном случае. В стохастическом варианте добавляется второе слагаемое. Поскольку $Q \geq 0$, а $\mathcal{L}(t) > 0$, то второе слагаемое не отрицательно, и оно тем больше, чем больше величина Q .

Замечание 23. В случае стационарной системы при бесконечном времени стабилизации, вообще говоря, оптимальное значение функционала (23.18) бесконечно, т.е. $J(u) \rightarrow \infty$ при $t_k \rightarrow \infty$. Поэтому в данной задаче можно минимизировать среднее значение функционала за единицу времени, т.е.

$$J(u) = M[x^\top Gx + u^\top Nu] =$$

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} M\left[\int_0^{t_k} (x^\top Gx + u^\top Nu)dt\right] \rightarrow \min_{u(\cdot)}. \quad (23.19)$$

4. Совместная задача оценивания и управления стохастической системой

Рассмотрим теперь случай, когда нет полной информации о состоянии стохастической системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + q, \\ z &= Hx + r. \end{aligned} \quad (23.20)$$

Здесь q — белый шум $M[q(t)q^\top(\tau)] = Q\delta(t - \tau)$; r — белый шум $M[r(t)r^\top(\tau)] = R\delta(t - \tau)$.

Кроме того, выполнены условия некоррелированности: $M[x(0)r^\top(s)] = 0$, $M[q(t)r^\top(s)] = 0$, $M[x(0)q^\top(s)] = 0$.

В рассматриваемом случае управление надо формировать по оценке $u = K\tilde{x}$, где коэффициенты обратной связи выбираются таким образом, чтобы минимизировать функционал (23.17).

Итак, оценка и управление в рассматриваемой задаче связаны. Управление влияет на оценку и наоборот. Тот факт, что эти задачи можно разделить указанным выше способом, составляет содержание теоремы разделения.

Пусть $\tilde{x}$ — оптимальная оценка координат x , доставляемая линейным оценивателем вида

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + \tilde{K}(z - H\tilde{x}), \\ \tilde{K} &= PH^\top R^{-1}, \\ \dot{P} &= AP + PA^\top + Q - \tilde{K}R\tilde{K}^\top, \quad P(0) = P^0.\end{aligned}\tag{23.21}$$

Здесь $P = M[\Delta x(t)\Delta x(t)^\top]$, где $\Delta x = x - \tilde{x}$ — ошибка оценки.

Теорема 27 (Разделения). *Для задачи о стохастическом регуляторе с неполными наблюдениями оптимальным является управление $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}\tilde{x}$, где $\mathcal{L}$ — решение уравнения Риккати (23.16), а $\tilde{x}$ — линейная оценка по измерению $z(\tau)$, $\tau \in [0, t]$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой, определяемая фильтром Калмана (23.21).*

Замечание 24. Теорема содержит два утверждения. Первое заключается в том, что оптимальное управление можно строить как функцию оптимальной оценки $\tilde{x}$, т.е. задачи оценивания и управления можно разделить. Это следует из линейности динамической системы и гауссовости распределений $x, \tilde{x}$.

Второе утверждение заключается в том, что оптимальные коэффициенты обратной связи в управлении по неполным данным совпадают с коэффициентами в управлении по полным данным для этой же системы, а именно $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}\tilde{x}$ (как будто $\tilde{x}$ есть точное значение x). Это так называемый принцип стохастической эквивалентности. Это следствие квадратичности функционала качества. Для линейных систем с не квадратичным критерием принцип разделения может выполняться, а принцип стохастической эквивалентности — нет, т.е. оптимальное управление будет отличаться от решения по полным данным.

Лекция 24

Игольчатая вариация и необходимое условие сильного локального минимума

1. Доказательство принципа максимума Понтрягина

Рассмотрим частный случай задачи оптимального управления, сформулированной на лекции 17 — задачу с фиксированным временем движения и свободным правым концом траектории

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), & y(t_0) = y^*, & t \in [t_0, t_k], \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC \mid u(t) \in \Omega \subset R^s\}. \end{cases} \quad (24.1)$$

Функционал качества управления возьмем терминальный:

$$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Пусть $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$ — оптимальный процесс.

На лекции 19 была доказана формула приращения функционала в случае, когда управления кусочно-гладкие $u^0(\cdot) \in C^1[t_0, t_k]$ и оптимальное управление принимает значения внутри допустимого множества $u^0(t) \in \text{int } \Omega$:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) = & - \int_{t_0}^{t_k} \left(\frac{\partial \Delta_u H(u^0)}{\partial y} \Delta y + \Delta_u H(u^0) \right) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_k} \bar{o}_2(|\Delta y(t)|) dt + \bar{o}_1(|\Delta y(t_k)|). \end{aligned}$$

При этом оптимальная траектория получается гладкой $y(\cdot) \in C^1[t_0, t_k]$. Напомним, что норма в пространстве C^1 вводится следующим образом

$$\|y\|_{C^1} = \max\{\|y\|_C, \|\dot{y}\|_C\},$$

где $\|y\|_C = \max_{t \in [t_0, t_k]} |y(t)|$.

Сейчас мы будем считать, что управления принадлежат классу кусочно-непрерывных функций $u(\cdot) \in PC[t_0, t_k]$, и будем рассматривать вариации траектории $(\tilde{y}(\cdot) - y^0(\cdot))$ малые по норме в пространстве C .

Определение 21. Процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$ — сильный локально-оптимальный процесс, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнено неравенство $J(u^0) \leq J(\tilde{u})$ для всех $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ таких, что $\|\tilde{y}(\cdot) - y^0(\cdot)\|_C < \varepsilon$.

Теперь, в отличие от предыдущего, классического случая, возможна ситуация, когда оптимальное управление $u^0(t)$ на определенных отрезках времени лежит на границе допустимой области Ω . Поэтому варьировать управление «в обе стороны по вертикали» нельзя, и для получения условий минимума построим специальную «игольчатую вариацию» (малую по горизонтали).

Пусть τ — некоторая точка непрерывности $u^0(\tau - 0) = u^0(\tau + 0)$. Построим управление

$$u^\alpha = \begin{cases} u^0(t) & \forall t \in [t_0, \tau - \alpha] \cup [\tau, t_k], \\ v \in \Omega & \forall t \in [\tau - \alpha, \tau], \end{cases}$$

где параметры $v \in \Omega$, $\alpha > 0$ произвольны.

Рассмотрим условие минимума $\Delta J(u^0) \geq 0$.

Проварьируем траекторию в соответствии с вариацией управления u^α . Тогда на отрезке $t \in [t_0, \tau - \alpha]$ выполнено равенство

$$y^\alpha(t) = y^0(t) \quad \forall t \in [t_0, \tau - \alpha].$$

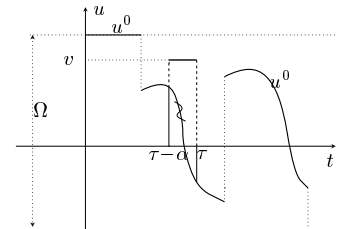


Рис. 24.1. Игольчатая вариация

В точке τ приращение траектории обозначим

$$\Delta y(\tau) = y^\alpha(\tau) - y^0(\tau).$$

Разложим решения на малом интервале $(\tau - \alpha, \tau)$ по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} y^0(\tau) &= y^0(\tau - \alpha) + \alpha \dot{y}^0(\tau - \alpha) + \bar{o}(\alpha) = y^0(\tau - \alpha) + \\ &+ \alpha f(y^0(\tau - \alpha), u^0(\tau - \alpha)) + \bar{o}(\alpha) \end{aligned}$$

и

$$y^\alpha(\tau) = y^\alpha(\tau - \alpha) + \alpha \dot{y}^\alpha(\tau - \alpha) + \check{o}(\alpha) = y^0(\tau - \alpha) + \alpha f(y^0(\tau - \alpha), v) + \check{o}(\alpha).$$

Следовательно,

$$\Delta y(\tau) = \alpha [f(y^0(\tau - \alpha), v) - f(y^0(\tau - \alpha), u^0(\tau - \alpha))] + o(\alpha).$$

Поскольку τ — точка непрерывности u^0 и f — гладкая функция, то при малых α выполнено

$$\begin{aligned} \Delta y(\tau) &= \alpha [f(y^0(\tau), v) - f(y^0(\tau), u^0(\tau))] + o(\alpha) = \\ &= \alpha \Delta f(\tau, v) + o(\alpha). \end{aligned} \quad (24.2)$$

На промежутке $[\tau, t_k]$ используем следующую теорему о дифференцируемости решений системы ОДУ по начальным условиям.

Теорема. Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{y} = f(t, y) \quad (24.3)$$

с начальными условиями $y(\tau) = \xi$ на отрезке времени $t \in [\tau, t_k]$, где $y \in Y \subset R^n$, $f \in C^2[R \times Y]$.

Тогда решение $y(t, \xi)$ системы (24.3) допускает непрерывные частные производные по начальным данным $\frac{\partial y(t, \xi)}{\partial \xi}$.

Решение $y(t, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, \xi) = f(t, y(t, \xi)). \quad (24.4)$$

Дифференцируя (24.4) по ξ и пользуясь тем, что для $y(t, \xi) \in C^2$ смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y(t, \xi)}{\partial \xi} \right) = \left(\frac{\partial f(t, y(t, \xi))}{\partial y} \right) \frac{\partial y(t, \xi)}{\partial \xi}. \quad (24.5)$$

При фиксированном ξ это уравнение представляет собой линейную систему ОДУ относительно неизвестной матрицы $\Phi(t) = \left(\frac{\partial y(t, \xi)}{\partial \xi} \right)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d}{dt} \Phi = \left(\frac{\partial f(t, y(t, \xi))}{\partial y} \right) \Phi(t),$$

а начальные условия получаются из дифференцирования тождества $y(\tau, \xi) = \xi$ и равны $\Phi(\tau) = E_n$.

Следовательно, матрица $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения в вариациях (по начальным данным) относительно решения $y(t, \xi)$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right) x. \quad (24.6)$$

Изменим начальные условия $y(\tau) = \xi + \Delta \xi$. Разлагая в ряд Тейлора, получим

$$y(t, \xi + \Delta \xi) = y(t, \xi) + \frac{\partial y(t, \xi)}{\partial \xi} \Delta \xi + o(|\Delta \xi|).$$

В нашем случае $\Delta \xi = \alpha x(\tau) = \alpha \Delta f(\tau, v)$ в силу (24.2), и можно записать

$$y(t, \xi + \Delta \xi) = y(t, \xi) + \alpha \frac{\partial y(t, \xi)}{\partial \xi} \Delta f(\tau, v) + o(\alpha) = y(t, \xi) + \alpha x(t) + o(\alpha),$$

где $x(t)$ — решение уравнений в вариациях (24.6) с начальным условием $x(\tau) = \Delta f(\tau, v)$. Тогда для приращения траектории выполнено соотношение

$$\Delta y(t) = \alpha x(t) + o(\alpha) \quad \text{при} \quad t \in [\tau, t_k].$$

Запишем сопряженную к (24.6) систему

$$\frac{d\psi}{dt} = - \left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \right)^\top \psi. \quad (24.7)$$

Для решений прямой и сопряженной систем выполнено условие

$$\frac{d}{dt}(\psi^\top x) \equiv 0 \implies \psi^\top(t)x(t) = \text{const}.$$

На лекции 19 доказано, что в рассматриваемом случае условие трансверсальности принципа максимума Понтрягина фигурирует, как следующее краевое условие для сопряженной системы

$$\psi^\top(t_k) = - \left(\frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k))}{\partial y} \right). \quad (24.8)$$

Рассмотрим приращение функционала

$$\Delta J = \frac{\partial \varphi_0(y(t_k))}{\partial y} \Delta y(t_k) + o(|\Delta y(t_k)|).$$

Перепишем его в оптимальной точке следующим образом

$$\Delta J(u^0) = -\alpha \psi^\top(t_k)x(t_k) + o(\alpha) \geq 0.$$

Поскольку $\alpha > 0$ произвольно, то $\psi^\top(t_k)x(t_k) \leq 0$. Мы показали, что $\psi^\top(t)x(t) = \text{const}$, тогда для всех $t \in [\tau, t_k]$ выполнено неравенство

$$\psi^\top(t)x(t) \leq 0 \implies \psi^\top(\tau)f(y^0(\tau), v) - \psi^\top(\tau)f(y^0(\tau), u^0(\tau)) \leq 0,$$

но $x(\tau) = \Delta f(\tau, v)$, откуда следует неравенство

$$[H(\psi(\tau), y^0(\tau), v) - H(\psi(\tau), y^0(\tau), u^0(\tau))] \leq 0 \quad \forall v \in \Omega, \tau \in T,$$

где множество $T = \{\tau \in [t_0, t_k] \mid \text{таких, что } u^0(\tau - 0) = u^0(\tau + 0)\}$.

Значит, выполнено условие максимума функции Понтрягина

$$\max_{v \in \Omega} H(\psi(\tau), y^0(\tau), v) = H(\psi(\tau), y^0(\tau), u^0(\tau)). \quad (24.9)$$

Осталось показать стационарность гамильтониана вдоль оптимальной траектории $\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(y^0(t_0), t))$.

Функции ψ и y^0 непрерывны, а u^0 может быть разрывна, но на оптимальной траектории функция $\mathcal{H}$ непрерывна. Докажем это.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t + \Delta t) - \mathcal{H}(t - \Delta t) &= H(\psi(t + \Delta t), y^0(t + \Delta t), u^0(t + \Delta t)) - \\ &\quad - H(\psi(t - \Delta t), y^0(t - \Delta t), u^0(t - \Delta t)). \end{aligned}$$

Заменив сначала в первом слагаемом оптимальное значение управления $u^0(t + \Delta t)$ на $u^0(t - \Delta t)$, а далее проделав в обратном порядке во втором слагаемом, получим неравенства, выполненные в силу условия (24.9):

$$\begin{aligned} &H(\psi(t + \Delta t), y^0(t + \Delta t), u^0(t - \Delta t)) - \\ &\quad - H(\psi(t - \Delta t), y^0(t - \Delta t), u^0(t - \Delta t)) \leq \\ &\quad \leq \mathcal{H}(t + \Delta t) - \mathcal{H}(t - \Delta t) \leq \\ &\quad \leq H(\psi(t + \Delta t), y^0(t + \Delta t), u^0(t + \Delta t)) - \\ &\quad \quad - H(\psi(t - \Delta t), y^0(t - \Delta t), u^0(t + \Delta t)). \end{aligned}$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим, что $\mathcal{H}(t + 0) - \mathcal{H}(t - 0) \rightarrow 0$, откуда следует непрерывность $\mathcal{H}$.

Рассмотрим теперь разность

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}(t') - \mathcal{H}(t)}{t' - t} \pm \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t))}{t' - t} &= \\ &= \frac{\mathcal{H}(t') - \mathcal{H}(t)}{t' - t} \pm \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t'))}{t' - t}. \end{aligned}$$

Проделав аналогичную операцию, получим оценки

$$\begin{aligned}
& \frac{H(\psi(t'), y^0(t'), u^0(t')) - H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t))}{t' - t} + \\
& + \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t)) - H(\psi(t), y^0(t), u^0(t))}{t' - t} \leq \\
& \leq \frac{\mathcal{H}(t') - \mathcal{H}(t)}{t' - t} \leq \\
& \leq \frac{H(\psi(t'), y^0(t'), u^0(t')) - H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t'))}{t' - t} + \\
& + \frac{H(\psi(t'), y^0(t), u^0(t')) - H(\psi(t), y^0(t), u^0(t'))}{t' - t}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует (при $t' \rightarrow t$)

$$\frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \leq \frac{d\mathcal{H}}{dt} \leq \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt}.$$

Системы уравнений, как прямая (24.1), так и сопряженная (24.7) представлены в форме

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^\top, \quad \dot{y} = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi}\right)^\top, \quad (24.10)$$

поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Следовательно, $\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0$ и $\mathcal{H} = \text{const}$.

Следует отметить, что функция Понтрягина $H(\psi, y, u)$ не является функцией Гамильтона (как ее иногда ошибочно называют) с точки зрения классической механики. Она превращается в функцию Гамильтона, если из условия принципа максимума (24.9) найти неявную функцию $u^0(t, y, \psi)$ и подставить в функцию Понтрягина. При этом уравнения (24.10) принимают вид канонической гамильтоновой системы. Сопряженные переменные ψ аналогичны импульсам фазовых переменных в классической механике (см. лекцию 20).

Следовательно, вдоль оптимальной траектории термин гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ корректен.

Следствие 3. Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ — оптимальный процесс, то существует $\psi(t)$ — решение сопряженной системы (24.7) с краевым условием (24.8) такое, что

$$\max_{v \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), v) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) = \mathcal{H}(t) = \text{const}, \quad t \in [t_0, t_k^0].$$

2. Задача быстрогодействия

Рассмотрим задачу быстрого перехода фазовой точки в начало координат

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), & y(t_0) \neq 0, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}, & y(t_k) = 0. \end{cases} \quad (24.11)$$

Функционал представляет собой время движения

$$J(u) = t_k - t_0 \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}.$$

Цель — попасть в начало координат, т.е. конечное многообразие имеет вид $M = \{y(t_k) = 0\}$. Чтобы свести задачу к постановке, сформулированной на лекции 17, введем дополнительную координату y_0

$$\begin{cases} \dot{y}_0 = 1, \\ \dot{y} = f(y, u), \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}. \end{cases} \quad (24.12)$$

Функционал

$$J(u) = \varphi_0(\tilde{y}(t_k)) = y_0(t_k) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}},$$

где $\tilde{y}$ — расширенный вектор состояния $\tilde{y} = (y_0, y^\top)^\top$.

Конечное многообразие примет вид

$$\tilde{M} = \{(\gamma_0, 0, \dots, 0), \quad \gamma_0 \in R^+\}.$$

Из условия трансверсальности принципа максимума следует

$$\tilde{\psi}(t_k^0) + \lambda_0 \left(\frac{\partial \varphi_0(\tilde{y}(t_k^0))}{\partial \tilde{y}} \right)^\top \perp \tilde{M}, \quad (24.13)$$

где сопряженные переменные удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y, u)}{\partial y} \right)^\top \psi. \end{cases}$$

Тогда условие ортогональности в (24.13) выглядит как равенство нулю скалярного произведения

$$(\psi_0 + \lambda_0)\gamma_0 + \psi^\top(t_k^0) \cdot \vec{0} = 0 \Rightarrow \psi_0 = -\lambda_0 = \text{const} \leq 0.$$

Если $\psi \equiv 0$, то из условия ПМП равенства нулю гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}(t) \equiv 0$ следует, что $\psi_0 = 0$, $\lambda_0 = 0$ — нулевая пара, что противоречит ПМП.

Следствие 4. Если $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ — оптимальный по быстрдействию процесс, то существует не тривиальное решение сопряженной системы $\psi \not\equiv 0$ такое, что

$$\max_{v \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), v) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) = \text{const} \geq 0.$$

Лекция 25

Достаточные условия оптимальности управляемой системы

1. Достаточность принципа максимума для линейных систем

Для линейной задачи быстрогодействия принцип максимума Понтрягина является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности. Ограничимся для простоты системами с одним управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (25.1)$$

где начальные условия $x(0) = c \neq 0$, ограничения на управляющие воздействия удовлетворяют условиям $u(t) \in [\mu, \nu] \subset R^1$, причем $\mu < 0$, $\nu > 0$, и терминальное условие $x(t_k) = 0$ — приход в начало координат. Рассмотрим задачу быстрогодействия

$$t_k \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Предположим, что система является полностью управляемой, т.е. выполнено условие $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0$.

Пусть $\{x^0(\cdot), u^0(\cdot), [0, t_k^0]\}$ — управляемый процесс, удовлетворяющий принципу максимума. Следовательно, существует не тривиальное $\psi(t) \not\equiv 0$ решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^\top \psi. \quad (25.2)$$

Функция Понтрягина имеет вид $H = \psi^\top Ax + \psi^\top bu$. Следовательно, решение (25.2) удовлетворяет условию

$$\psi^\top(t)bu^0(t) = \max_{\mu \leq u \leq \nu} \psi^\top(t)bu \geq 0.$$

Неравенство следует из условия максимума функции Понтрягина H и включения $0 \in (\mu, \nu)$.

Предположим теперь, что существует управляемый процесс $\{\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), [0, \tilde{t}_k]\}$, позволяющий привести систему (25.1) из начальной точки $\tilde{x}(0) = x^0(0) = c$ в начало координат $\tilde{x}(\tilde{t}_k) = 0$ за меньшее время $\tilde{t}_k < t_k^0$, чем управление u^0 . Напомним, что $x^0(t_k^0) = 0$.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) &= \psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) - \psi^\top(\tilde{t}_k)\tilde{x}(\tilde{t}_k) = \\ &= (\psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) - \psi^\top(0)x^0(0)) - (\psi^\top(\tilde{t}_k)\tilde{x}(\tilde{t}_k) - \psi^\top(0)\tilde{x}(0)). \end{aligned}$$

Поскольку $\psi(t)$ и $x(t)$ дифференцируемы, получим

$$\psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) = \int_0^{\tilde{t}_k} \frac{d}{dt}(\psi^\top x^0) dt - \int_0^{\tilde{t}_k} \frac{d}{dt}(\psi^\top \tilde{x}) dt.$$

Рассмотрим первое слагаемое. Подинтегральное выражение

$$\frac{d}{dt}(\psi^\top x^0) = \dot{\psi}^\top x^0 + \psi^\top \dot{x}^0 = -\psi^\top Ax^0 + \psi^\top (Ax^0 + bu_1^0) = \psi^\top bu_1^0,$$

аналогично для второго слагаемого получим $\frac{d}{dt}(\psi^\top \tilde{x}) = \psi^\top b\tilde{u}$, откуда следует

$$\begin{aligned} \psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) &= \int_0^{\tilde{t}_k} \psi^\top(t)bu^0(t) dt - \int_0^{\tilde{t}_k} \psi^\top(t)b\tilde{u}(t) dt = \\ &= \int_0^{\tilde{t}_k} [\psi^\top(t)bu^0(t) - \psi^\top(t)b\tilde{u}_1(t)] dt \geq 0, \end{aligned}$$

так как в силу принципа максимума $H(\psi, x^0, \tilde{u}) \leq H(\psi, x^0, u^0)$.

С другой стороны

$$\psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) = \psi^\top(\tilde{t}_k)x^0(\tilde{t}_k) - \psi^\top(t_k^0)x^0(t_k^0) =$$

$$= - \int_{\tilde{t}_k}^{t_k^0} \psi^\top(t) b u^0(t) dt \leq 0,$$

поскольку подинтегральное выражение неотрицательно при всех t .

Из последних двух неравенств следует, что $\psi^\top(\tilde{t}_k) x^0(\tilde{t}_k) = 0$.

Так как подинтегральная функция неотрицательна, получим

$$\psi^\top(t) b u^0(t) = \max_{\mu \leq u \leq \nu} \psi^\top(t) b u \equiv 0 \quad \forall t \in (\tilde{t}_k, t_k^0).$$

Поскольку $\psi^\top b u$ линейна по u , максимум функции Понтрягина достигается на концах отрезка $[\mu, \nu]$. Так как по условию $\mu < 0$, $\nu > 0$, полученное тождество возможно лишь в случае, когда

$$\psi^\top(t) b \equiv 0 \quad \forall t \in (\tilde{t}_k, t_k^0).$$

Продифференцировав последнее тождество $(n-1)$ раз, получим однородную систему алгебраических линейных уравнений относительно $\psi(t)$

$$\psi^\top(t) b = 0, \quad -\psi^\top(t) A b = 0, \dots, \quad \psi^\top(t) A^{n-1} b = 0. \quad (25.3)$$

Так как $\psi(t)$ могут быть произвольными, в силу не тривиальности решения системы (25.2), то для совместности алгебраической системы уравнений (25.3) ее основной определитель должен равняться нулю, т.е. выполнено равенство $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = 0$, что противоречит условию полной управляемости динамической системы (25.1). Получили противоречие предположению, что $\tilde{t}_k < t_k^0$.

Следовательно, управляемый процесс, удовлетворяющий принципу максимума, является оптимальным по быстродействию. Достаточность доказана.

Теорема 28. Для задачи линейного быстродействия в случае полностью управляемой системы принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности (глобального минимума функционала).

Пример 25.1. Применим теорему 28 для решения задачи стабилизации вертикального положения перевернутого маятника, установленного на движущемся основании.

При этом предположим, что ускорение тележки ограничено: $|u(t)| \leq u_+$, и имеются датчики, поставляющие точную информацию о положении $y_1 = \varphi$ и скорости $y_2 = \dot{\varphi}$. Тогда можно решить задачу для любого начального положения, принадлежащего некоторому множеству, т.е. построить оптимальный синтез системы управления данной механической системой.

Примем для простоты изложения $\omega^2 = 1$, $u_+ = 1$. Тогда линеаризованные уравнения в отклонениях примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u, \quad |u(t)| \leq 1. \end{aligned} \quad (25.4)$$

Поскольку $H = \psi_1 x_2 + \psi_2(x_1 + u)$, получим $u^0 = \text{sign } \psi_2$, где функция ψ_2 определяется системой

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1. \end{aligned}$$

Так как характеристическое уравнение для сопряженной системы имеет действительные корни ± 1 , то решение $\psi_2(t)$ есть линейная комбинация двух экспонент, и, следовательно, оптимальное по быстродействию управление $u_1^0(t)$ может иметь не более одного переключения. Полученный качественный вид оптимального управления позволяет осуществить оптимальный синтез на фазовой плоскости. Для этого построим сначала траектории системы (25.4) при $u_1 \equiv 1$ и при $u_1 \equiv -1$.

Эти траектории являются либо прямыми, приходящими асимптотически в особые точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, либо гиперболами, описываемыми уравнениями

$$x_2^2 = (x_1 \pm 1)^2 + c_1.$$

Среди траекторий выделим две полугиперболы, приводящие изображающую точку в начало координат.

Очевидно, что для любой точки, расположенной на линии Γ_0 , описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{x_1^2 - 2x_1} \quad \text{при } x_1 < 0, \\ x_2 &= -\sqrt{x_1^2 + 2x_1} \quad \text{при } x_1 > 0, \end{aligned}$$

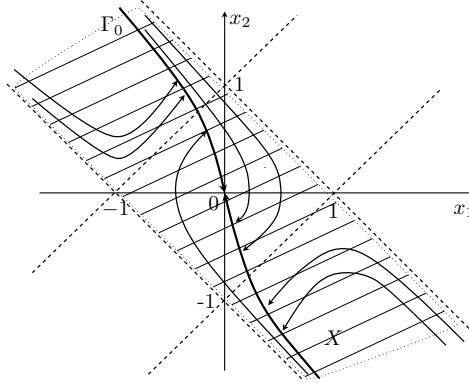


Рис. 25.1. Синтез оптимального быстрого действия.

задача оптимального синтеза решена, так как построено управление, приводящее систему из этой точки в начало координат. Как легко показать, любое другое управление, приводящее систему из этой же точки в начало координат, не удовлетворяет принципу максимума, так как имеет более одного переключения. Аналогично строятся траектории, приводящие в начало координат изображающую точку, если она расположена в открытой полосе X . При этом оптимальное управление будет иметь одно переключение.

Таким образом, при наличии ограничения на управление оптимальный синтез осуществим только на открытой полосе X . Легко показать, что из любой точки $(x_k, x_2) \notin X$ вообще невозможно попасть в начало координат, т.е. X — область управляемости системы (25.4) при ограничениях на управление. Здесь следует отметить, что при отсутствии ограничений на управление областью управляемости является вся фазовая плоскость, так как эта система полностью управляема (см. лекцию 3).

Отметим вторую особенность построенного оптимального синтеза — нелинейную зависимость оптимального управления от отклонений в области X :

$$u^0(x_1, x_2) = \begin{cases} +1, & \text{если } x_2 \leq -\sqrt{x_1^2 + 2x_1} \text{ и } x_1 > 0 \\ & \text{или } x_2 < \sqrt{x_1^2 - 2x_1} \text{ и } x_1 < 0 \\ -1, & \text{если } x_2 > -\sqrt{x_1^2 + 2x_1} \text{ и } x_1 > 0 \\ & \text{или } x_2 \geq \sqrt{x_1^2 - 2x_1} \text{ и } x_1 < 0. \end{cases} \quad (25.5)$$

Для того чтобы на практике осуществить построенный оптимальный синтез $u_1^0(x_1, x_2)$, необходимо иметь датчики положения и скорости, которые в течение всего времени управления $[0, t_k^0]$ давали бы точную информацию об отклонениях $x_1(t), x_2(t)$.

Известны ли еще задачи кроме только что представленной, для которых можно сформулировать достаточные условия оптимальности? Ответ положителен.

Ниже мы рассмотрим задачу оптимизации с фиксированным временем и интегральным функционалом, для которой справедлив принцип оптимальности Р. Беллмана, из которого выводятся достаточные условия оптимальности.

Кроме этого в дополнении 1 к лекции 24 приведена формулировка регулярного синтеза оптимального управления по В.Г. Болтянскому, где на основе принципа максимума сформулированы достаточные условия оптимальности задачи управления с функционалом Больца.

В дополнении 2 к лекции 24 приведена теорема А.В. Арутюнова о ПМП как необходимом и достаточном условии оптимальности.

2. Метод динамического программирования Беллмана как достаточное условие оптимальности

Метод динамического программирования основан на принципе оптимальности, который заключается в следующем: *каковы бы ни были состояние системы и управление в начальный момент времени, последующее управление должно быть оптимальным относительно состояния, в котором будет находиться система в результате предшествовавшего управления.* Другими

словами, оптимальное управление не зависит от предыстории системы и определяется состоянием системы в данный момент и целью управления — интегральным функционалом.

Применительно к задаче оптимального управления, сформулированной на лекции 16, принцип оптимальности означает, что для любого момента времени $\tilde{t} \in [t_0, t_k]$ на оптимальной фазовой траектории второй ее отрезок — также оптимальная траектория. Справедливость этого утверждения доказывается методом от противного. Учитывается единственность оптимальной траектории для задачи оптимального управления со свободным концом траектории, фиксированным временем управления и функционалом вида

$$J = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, u, t) dt. \quad (25.6)$$

Управляемая система задана соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, u), \quad y(t_0) = y^*, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k], \quad u(t) \in \Omega \subset R^s\}. \end{aligned} \quad (25.7)$$

С помощью принципа оптимальности получим критерий оптимальности синтеза управления для задачи с фиксированным временем и свободным концом траектории. Введем функцию, называемую **функцией Беллмана**

$$S(t, y) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ \int_t^{t_k} f_0(y(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\}, \quad (25.8)$$

где $\dot{y} = f(y(\tau), u(\tau))$, а $y(t) = y$ — начальное условие. Используя принцип оптимальности, можно вывести уравнение, которому удовлетворяет эта функция.

Предположим, что функция $S(t, y)$ существует и непрерывно дифференцируема по t и y .

Рассмотрим два состояния (t, y) и $(t + \Delta t, y + \Delta y)$. По определению функции Беллмана

$$S(t, y) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(y(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_k} f_0(y(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\}.$$

В силу принципа оптимальности последнее соотношение можно переписать в виде

$$S(t, y) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, t+\Delta t]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(y, u, \tau) d\tau + \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[t+\Delta t, t_k]} \int_{t+\Delta t}^{t_k} f_0(y, u, \tau) d\tau \right\},$$

или

$$S(t, y) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}[t, t+\Delta t]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} f_0(y, u, \tau) d\tau + S(t + \Delta t, y + \Delta y) \right\}, \quad (25.9)$$

причем Δy зависит от управления u на интервале $[t, t + \Delta t]$. При малом Δt можно записать

$$S(t + \Delta t, y + \Delta y) = S(t, y) + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial S}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta t|, |\Delta y|). \quad (25.10)$$

Подставив (25.9) в (25.10), получим при $\Delta t \rightarrow 0$ уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in \Omega} \{f_0(y, u, t) + \frac{\partial S}{\partial y} f(y, u)\} = 0 \quad (25.11)$$

с очевидным граничным условием $S(t_k, y(t_k)) = 0$. Функциональное уравнение (25.11) называется **уравнением Беллмана**. Его смысл состоит в том, что исходная задача о минимизации функционала по множеству всех допустимых стратегий $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ заменяется минимизацией по множеству Ω .

Поскольку заранее о существовании функции $S(t, y)$, а также о ее дифференцируемости ничего не известно, предыдущие рассуждения можно рассматривать как наводящие, позволяющие сформулировать теорему о достаточных условиях оптимальности.

Теорема 29. Пусть существуют непрерывно дифференцируемая функция $S(t, y)$, удовлетворяющая уравнению Беллмана (25.11), и управление $u^0(t)$, минимизирующее соответствующую часть этого уравнения. Тогда управление $u^0(t)$ оптимально, т.е. минимизирует функционал J .

Доказательство. Пусть $S(t, y)$ — решение уравнения Беллмана с граничным условием $S(t_k, y(t_k)) = 0$, $u(t)$ — некоторое управление из $\mathcal{U}$, тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y} f(y, u) + f_0(y, u, t) \geq 0.$$

В качестве аргумента y примем решение уравнения $\dot{y} = f(y, u)$ с выбранным управлением и заданным начальным условием y^* , тогда

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} + f_0(y, u, t) \geq 0 \text{ или } \frac{dS}{dt} \geq -f_0(y, u, t).$$

Проинтегрируем последнее соотношение в интервале $[t_0, t_k]$:

$$S(t_k, y(t_k)) - S(t_0, y(t_0)) \geq - \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, u, \tau) d\tau.$$

Отсюда с учетом граничного условия следует

$$J(u) \geq S(t_0, y(t_0)).$$

Пусть u^0 — управление, на котором достигается минимум выражения $\frac{\partial S}{\partial y} + f_0(y, u, t)$ на множестве Ω . Тогда из (25.11) следует

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y} f(y, u^0) + f_0(y, u^0, t) = 0.$$

Повторяя предыдущие преобразования в этом случае, получим $J(u^0) = S(t_0, y^0)$, т.е. $J(u) \geq J(u^0)$, что и доказывает теорему.

2.1. Линейная задача с квадратичным критерием качества Рассматривается задача минимизации функционала

$$J = \int_0^{t_k} (x^\top G x + u^\top N u) dt$$

при условии

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (25.12)$$

где t_k — фиксированный момент времени, N, G — симметричные положительно-определенные матрицы;

Решим эту задачу, применяя достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \min_{u \in R^s} \{x^\top G x + u^\top N u + \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + Bu)\} = 0 \quad (25.13)$$

с граничным условием

$$S(t_k, y(t_k)) = 0. \quad (25.14)$$

Необходимое условие минимума выражения в фигурных скобках имеет вид

$$2u^\top N + \frac{\partial S}{\partial x} B = 0,$$

откуда

$$u^0 = -\frac{1}{2} N^{-1} B^\top \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^\top. \quad (25.15)$$

Подставим полученное решение в уравнение Беллмана (25.13) и, учитывая (25.12), получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + x^\top G x + u^{0\top} N u^0 + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dS(t, x)}{dt} + x^\top G x + u^{0\top} N u^0 = 0. \quad (25.16)$$

Ищем решение уравнения Беллмана в виде квадратичной формы $S = x^\top \mathcal{L}(t)x$, где $\mathcal{L}(t) \geq 0$ — симметричная матрица.

Тогда $\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^\top = 2\mathcal{L}x$, а полная производная в силу системы (25.12) будет равна $\frac{dS(t, x)}{dt} = \dot{x}^\top \mathcal{L}x + x^\top \dot{\mathcal{L}}x$. Подставляя в уравнение (25.16) и используя $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}x$, получим

$$x^\top (\dot{\mathcal{L}} + G + \mathcal{L}A + A^\top \mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L})x = 0,$$

откуда следует уже полученное нами в лекции 20 уравнение Риккати.

3. Связь метода динамического программирования с принципом максимума

Предположим, что в задаче (25.6), (25.7) решение $S(t, y)$ уравнения Беллмана (25.11) существует и имеет непрерывные вторые частные производные по всем аргументам, а функции f_0 и f — непрерывные частные производные по всем аргументам. Рассмотрим функцию

$$R(t, y, u) = \frac{\partial S(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial S(t, y)}{\partial y} f(y, u) + f_0(y, u, t).$$

Пусть $\{y^0(t), u^0(t), t \in [t_0, t_k]\}$ — оптимальный процесс.

Из уравнения Беллмана следует, что на оптимальной траектории функция $R(t, u^0, y^0) \equiv 0$, а для произвольной траектории в окрестности (y^0, u^0) выполнено $R(t, u, y) \geq 0$. Необходимым условием минимума функции R на оптимальной траектории $y^0(t)$ является условие

$$\frac{\partial R(t, y^0, u^0)}{\partial y} = 0.$$

Следовательно выполнено равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S(t, y^0)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 S(t, y^0)}{\partial y^2} \right) f(y^0, u^0) + \frac{\partial S(t, y^0)}{\partial y} \frac{\partial f(y^0, u^0)}{\partial y} + \frac{\partial f_0(y^0, u^0)}{\partial y} = 0, \quad (25.17)$$

поскольку при наших предположениях результат не зависит от порядка дифференцирования. В силу уравнений движения первые два слагаемых в (25.17) равны

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S(t, y^0)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 S(t, y^0)}{\partial y^2} \right) f(y^0, u^0) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S(t, y^0)}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 S(t, y^0)}{\partial y^2} \right) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S(t, y^0)}{\partial y} \right).$$

Обозначив

$$\psi^\top(t) = - \left(\frac{\partial S(t, y^0)}{\partial y} \right),$$

из уравнения (25.17) получим

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f(y, u)}{\partial y} \right)^\top \psi + \left(\frac{\partial f_0(y, u)}{\partial y} \right)^\top. \quad (25.18)$$

Из граничного условия для функции Беллмана $S(t_k, y(t_k)) \equiv 0$ следует $\psi(t_k) = 0$. Из уравнения Беллмана следует, что для всех $t \in [t_0, t_k]$ функция $R(t, y, u)$ удовлетворяет условию

$$\min_{u(t) \in \Omega} R(t, y, u) = R(t, u^0(t), y^0(t)),$$

откуда получим условие максимума

$$\max_{u(t) \in \Omega} \tilde{H}(\psi, y, u) = \tilde{H}(\psi(t), y^0(t), u^0(t)),$$

где $\tilde{H} = -f_0(t, y, u) + \psi^\top f(y, u)$ — расширенная функция Понтрягина в задаче (25.6), (25.7), а $\psi(t)$ — решение сопряженной системы (25.18).

Лекция 26

Особые оптимальные управления

1. Вариация Келли и необходимые условия оптимальности второго порядка

Рассмотрим задачу оптимального управления, где управление скалярно и правые части линейны по управлению.

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) + g(y)u, & y(t_0) = y^*, \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] \mid |u(t)| \leq \mu\} \\ y(t_k) \in M \subset R^n. \end{cases} \quad (26.1)$$

Функционал задачи терминальный

$$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Считаем, что все функции φ_0, g, f гладкие.

Функцию Понтрягина запишем в виде

$$H = \psi^\top f + \psi^\top g u = H_0(\psi, y) + H_1(\psi, y)u.$$

Рассмотрим оптимальный процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$. Из ПМП следует, что необходимым условием оптимальности является максимум функции Понтрягина на оптимальном решении

$$\max_{|u(t)| \leq \mu} H_1(\psi(t), y^0(t)) \cdot u(t) = H_1(\psi(t), y^0(t)) \cdot u^0(t).$$

Ситуации, в которых решение этой задачи достигается в единственной точке $u^0(t)$ называются регулярными.

Будем говорить, что оптимальный процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ содержит **особые участки**, если существует интервал $(\tilde{t}, \tilde{t}) \subset [t_0, t_k^0]$, на котором $H_1(t) \equiv 0$.

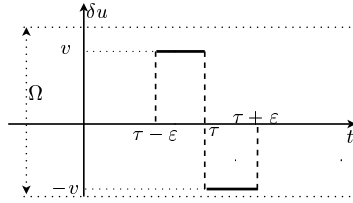


Рис. 26.1. Вариация Келли

На особом участке условие максимума ПМП становится тривиальным и не работает.

Для того, чтобы получить необходимые условия экстремума, Дж.Келли в 1967 г. предложил новый тип вариации управления («комбинацию» классической и игольчатой вариации), где приращение управления имеет вид $\Delta u = \varepsilon \delta u$, но в отличие от классической вариации здесь δu — не любая гладкая функция, а формируемая как специальная игольчатая в окрестности момента времени τ (см. рис. 26.1).

Таким образом, появляется второй порядок малости по ε .

сти по ε .

Приращение функционала с точностью до малых второго порядка по ε запишем в виде

$$\Delta J(u^0) = \varepsilon \delta J(u^0) + \delta^2 J(u^0) \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

где $\delta J(u^0)$ — вариация функционала первого порядка, а $\delta^2 J(u^0)$ — вариация второго порядка.

Допустим, что на особом участке $\tau \in [\tilde{t}, \tilde{t}]$ выполнено $u^0(t) \in \text{int } \Omega$, тогда в силу ПМП выполнено условие $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Используя полученную ранее (лекция 19) формулу для вариации Лагранжа, получим

$$\delta J(u^0) = - \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt = - \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial u} \delta u dt = 0.$$

То есть из вариации первого порядка ничего получить нельзя.

Условие минимума $\Delta J(u^0) \geq 0$ приводит к условиям на вторую вариацию $\delta^2 J(u^0) \geq 0$.

Р. Беллманом было показано, что отсюда следует условие

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} H_1(t) \right) \geq 0.$$

Теорема 30 (необходимое условие Келли). Пусть $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ — оптимальный процесс, т.е.

1) выполнен ПМП;

2) на особом участке $\forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}) \subset [t_0, t_k^0]$, $H_1(t) \equiv 0$ выполнено $|u^0(t)| < \mu$;

Тогда для оптимальности u^0 необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} H_1(t) \right) \geq 0.$$

Таким образом для вычисления особого управления и проверки его оптимальности необходимо дважды дифференцировать в силу системы множитель H_1 при управлении в функции Понтрягина.

Условие оптимальности Келли может быть записано в другой форме.

2. Скобки Пуассона

Рассмотрим скобки Пуассона: пусть $\alpha(y, \psi)$ и $\beta(y, \psi)$ — гладкие скалярные функции векторных аргументов. Оператор

$$\{\alpha, \beta\} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right)^\top - \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^\top$$

называется **скобками Пуассона**.

Перечислим основные свойства скобки Пуассона:

1) $\{\alpha, \beta\} = -\{\beta, \alpha\}$;

2) $\{\alpha, \alpha\} = 0$;

3) $\{\alpha, \beta + \gamma\} = \{\alpha, \beta\} + \{\alpha, \gamma\}$;

4) $\{\alpha, c\beta\} = c\{\alpha, \beta\}$, $c \in R$.

Заметим, что скобки Пуассона широко используются в аналитической механике.

Покажем, что условие Келли можно записать в форме $\{H_1(t), \{H_1(t), H_0(t)\}\} \leq 0$.

Как было показано в лекции 23, оптимальное решение задачи может быть записано в виде гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{y} = \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)^\top, \\ \dot{\psi} = - \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^\top. \end{cases}$$

Рассмотрим произвольную гладкую функцию $S(y, \psi)$. Тогда производная в силу системы

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)^\top - \frac{\partial S}{\partial \psi} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^\top = \{S, H\}.$$

В нашем случае $H = H_0 + H_1 u$, и в качестве функции S выберем H_1 на особом участке $(\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$, где $H_1(t) \equiv 0$. Вычислим производную в силу системы

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= \{H_1, H\} = \{H_1, H_0 + H_1 u\} = \\ &= \{H_1, H_0\} + u_1 \{H_1, H_1\} = \{H_1, H_0\} \equiv 0. \\ \frac{d^2 H_1}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \{H_1, H_0\} = \{\{H_1, H_0\}, H\} = \{\{H_1, H_0\}, H_0 + H_1 u\} = \\ &= \{\{H_1, H_0\}, H_0\} + \{\{H_1, H_0\}, H_1\} u \equiv 0 \end{aligned}$$

Условие Келли приводит к неравенству

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2 H_1}{dt^2} = \{\{H_1, H_0\}, H_1\} \geq 0 \quad \forall t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}),$$

откуда следует неравенство

$$\{H_1, \{H_1, H_0\}\} \leq 0.$$

Если неравенство строгое, то

$$u^0 = \frac{\{\{H_1, H_0\}, H_0\}}{\{H_1, \{H_1, H_0\}\}}.$$

Если же $\{H_1, \{H_1, H_0\}\} = 0$, то нет возможности определить u_1^0 . Это означает, что особая траектория имеет более высокий порядок и следует продолжить дифференцирование H_1 .

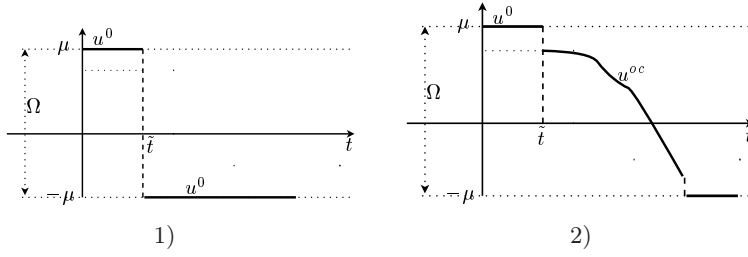


Рис. 26.2. Сопряжение особого и регулярного участков:случай 1,2

Определение 22. *Порядком особой траектории на $t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}) \subset [t_0, t_k^0]$ называется натуральное число $q \in N$ такое, что $\forall s = 0, 1, 2, \dots, 2q - 1$ выполнено*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial H(\psi, y)}{\partial u} \right) \right) \equiv 0, & s = 0, 1, \dots, 2q - 1, \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \left(\frac{\partial H(\psi, y)}{\partial u} \right) \right) \neq 0, \end{cases}$$

где (ψ, y) принадлежит некоторой открытой окрестности (ψ, y^0) .

Таким образом, приходим к следующей формулировке.

Теорема 31 (Обобщенное условие Келли). Пусть $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$ оптимальный процесс, т.е.

- 1) выполнен ПМП;
- 2) особый участок имеет порядок q .

Тогда для оптимальности особого участка необходимо выполнение неравенства

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \left(\frac{\partial H(\psi, y)}{\partial u} \right) \right) \leq 0. \quad (26.2)$$

Условие (26.2) для случая $q = 2$ называют условием Коппа-Мойера [12].

3. Структура оптимального управления

Рассмотрим вопрос о сопряжении регулярного и особого участков оптимальной траектории. Возможны следующие случаи, изображенные на рис. 26.2.

1) Разрыв управления в точке сопряжения $\tilde{t}$. Регулярный случай, управление слева и справа от $\tilde{t}$ принимает значения на концах отрезка Ω .

2) Особый случай. В точке сопряжения регулярной и особой траектории управление терпит разрыв $u(\tilde{t} - 0) \neq u(\tilde{t} + 0)$. В этом случае порядок особой траектории q должен быть нечетным, что следует из сформулированной ниже теоремы.

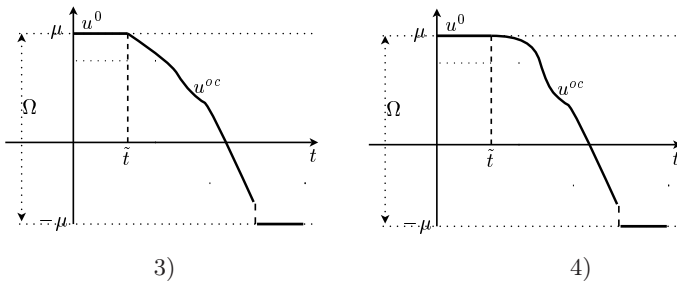


Рис. 26.3. Сопряжение особого и регулярного участков:случай 3,4

Теорема 32 (Келли, Копп, Мойер, 1967). Пусть оптимальная траектория $y^0(t)$ на особом участке $t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$ имеет второй или любой четный порядок q , и выполнено условие Келли в строгой форме

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \left(\frac{\partial H(\psi, y)}{\partial u} \right) \right) < 0.$$

Тогда особый участок траектории y^0 не может сопрягаться с регулярной (не особой) кусочно-гладкой траекторией y^0 , если управление u^0 в точке сопряжения особого и регулярного участков терпит разрыв.

3) Особый случай: управление в точке склейки непрерывно $u(\tilde{t}-0) = u(\tilde{t}+0)$, а производная терпит разрыв $u'(\tilde{t}-0) \neq u'(\tilde{t}+0)$. Здесь порядок особой траектории q должен быть четным.

4) Особый случай: управление в точке склейки гладкое $u(\tilde{t}-0) = u(\tilde{t}+0)$, $u'(\tilde{t}-0) = u'(\tilde{t}+0)$. Здесь порядок особой траектории q должен быть нечетным.

Как видим, при четном q разрыва быть не может. Но в 1961 г. на первом конгрессе ИФАК, проходившем в г. Москве, Фуллером предложен пример задачи, в которой сопряжение регулярного и особого участков происходит с бесконечным числом переключений на конечном отрезке времени (**chattering-режим**).

5) Разрывы управления (точки переключения) сгущаются к точке сопряжения с особым участком, и оптимальное управление оказывается измеримой по Лебегу функцией со

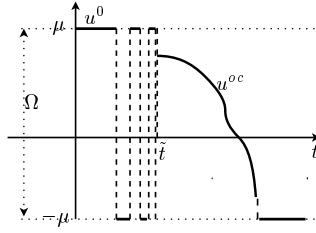


Рис. 26.4. Чаттеринг режим

счетным множеством точек разрыва.

Таким образом, оптимальное управление $u^0(t)$ может содержать следующие участки:

а) регулярный участок. В этом случае оптимальное управление $u^0(t)$ можно найти из ПМП и $u(\cdot) \in PC[t_0, t_k]$, т.е. может иметь конечное число точек разрыва 1-го рода;

б) особый участок;

в) участок с учащающимися переключениями «chattering-режим» (только если расширим $\mathcal{U}$, допустив измеримые управления $u(\cdot) \in \mathcal{L}^\infty[t_0, t_k]$).

Лекция 27

Задача Годдарда

На лекции 18 были получены уравнения движения ЛА в вертикальной плоскости. При выводе уравнений мы предполагали, что ЛА имеет плоскость симметрии, изменение высоты полета мало по сравнению с радиусом Земли, вследствие чего пренебрегали кривизной земной поверхности, а поле тяготения однородно, кроме того атмосфера имеет постоянную плотность ρ . Как и в предыдущих примерах на лекциях 15 и 18 считаем, что Земля не вращается.

Тогда вырожденная по Тихонову система уравнений (при $\theta(t) = \varphi(t) = \pi/2$) описывает строго вертикальный полет ЛА (метеорологической ракеты):

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ m\dot{v} = -mg - Q + P, \\ \dot{m} = -u, \quad 0 \leq u \leq \mu, \end{cases}$$

где $P = \gamma u$ — реактивная тяга ракеты, $\gamma = \text{const}$ — относительная скорость истечения частиц топлива, $Q = \frac{\rho v^2}{2} S c_x^0 = k v^2$ — сопротивление воздуха.

Обозначим $y_1 = h$, $y_2 = v$, $y_3 = m$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = -g - \frac{Q}{y_3} + \frac{\gamma u}{y_3}, & y_2(0) = 0, \\ \dot{y}_3 = -u, & y_3(0) = m_0. \end{cases}$$

Ограничения на управление следующие: $0 \leq u \leq \mu$.

Можно поставить две задачи на экстремум:

1) Задача подъема на максимальную высоту в момент выгорания всего топлива. Пусть m_1 — масса собственно ракеты. Тогда терминальное многообразие имеет вид $M = \{y_3(t_k) = m_1 < m_0\}$, а экстремальная задача

$$y_1(t_k) \rightarrow \max_{0 \leq u \leq \mu}, \quad \varphi_0 = -y_1(t_k).$$

Это классическая задача Годдарда, поставленная им в 1919г. и полностью решена советскими учеными А.А. Космодемьянским и Д.Е. Охочимским.

2) Полет беспилотного (автоматического) ЛА на заданную высоту с минимальным расходом топлива.

Тогда терминальное многообразие имеет вид $M = \{y_1(t_k) = h_1\}$, а функционал

$$(m_0 - y_3(t_k)) \rightarrow \min_{0 \leq u \leq \mu}, \quad \varphi_0 = m_0 - y_3(t_k).$$

Рассмотрим первую задачу. Выпишем функцию Понтрягина

$$H = \psi_1 y_2 + \psi_2 \left(-g - \frac{Q}{y_3} + \frac{\gamma u}{y_3} \right) + \psi_3 (-u),$$

и сопряженную систему $\dot{\psi}^\top = -\frac{\partial H}{\partial y}$:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \frac{1}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2} \psi_2 \\ \dot{\psi}_3 = \psi_2 \left(-\frac{Q}{y_3^2} + \frac{\gamma u}{y_3^2} \right) \end{cases}$$

Многообразие M можно представить в виде $M = \{y_3(t_k) - m_1 = 0\} = \{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$, где γ_1, γ_2 — произвольные числа.

Из условий трансверсальности следует

$$(\psi_1(t_k^0) - \lambda_0)\gamma_1 + \psi_2(t_k^0)\gamma_2 = 0,$$

откуда $\psi_1 = \lambda_0 = \text{const} \geq 0$, а $\psi_2(t_k^0) = 0$.

Докажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Допустим противное, т.е. $\lambda_0 = 0$. Тогда $\psi_1(t_k^0) = \psi_2(t_k^0) = 0$.

Из условия равенства нулю гамильтониана следует $H(t_k^0) = \psi_3(t_k^0)u^0(t_k^0) = 0$.

Поскольку условие остановки определяет первый момент, когда достигается $y_3(t_k) = m_1$, то в левой окрестности t_k^0 функция $y_3(t)$ должна убывать, следовательно $u^0(t) > 0$ и в этой окрестности выполнено $u^0(t_k^0) > 0$. Но тогда $\psi_3(t_k^0) = 0$, и (λ_0, ψ) составляют нулевую пару, что противоречит ПМП. Поэтому $\lambda_0 \neq 0$, и нормируя ψ , получим $\psi_1 \equiv 1$.

Поскольку стартуем с нулевой скоростью, то из физических соображений (тяга больше веса) следует неравенство $\gamma\mu > gm_0$.

Представим функцию Понтрягина в виде

$$H = y_2 - \psi_2(g + \frac{Q(y_2)}{y_3}) + (\frac{\psi_2\gamma}{y_3} - \psi_3)u = H_0 + H_1u.$$

Допустим, что есть интервал $\Delta = (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}) \subset [t_0, t_k]$, где $H_1(t) \equiv 0$.

Сопряженная система (при $\psi_1 \equiv 1$) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = -1 + \frac{\psi_2}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2}, & \psi_2(t_k^0) = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \frac{\psi_2}{y_3^2}(\gamma u - Q) \end{cases}$$

Из условия максимума функции Понтрягина следует вид оптимального управления

$$u^0(t) = \begin{cases} \mu & \text{при } H_1(\psi, y) > 0 \\ 0 & \text{при } H_1(\psi, y) < 0 \end{cases}, \quad t \notin (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}).$$

На особом участке определить оптимальное управление из ПМП нельзя.

Найдем производную в силу системы

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= (\dot{\psi}_2\gamma - \frac{\dot{y}_3\psi_2\gamma}{y_3^2} - \dot{\psi}_3) = \\ &= (-1 + \frac{\psi_2}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2}) \frac{\gamma}{y_3} + \frac{u\psi_2\gamma}{y_3^2} + \psi_2(\frac{Q - \gamma u}{y_3^2}) = \frac{\gamma}{y_3}(\frac{\partial Q}{\partial y_2} \frac{\psi_2}{y_3} - 1) + \frac{Q\psi_2}{y_3^2} = \\ &= y_3^{-2}[(Q + \gamma \frac{\partial Q}{\partial y_2})\psi_2 - \gamma y_3] \equiv 0 \end{aligned} \quad (27.1)$$

Поскольку $y_3(t) > 0$ на особом участке, то квадратная скобка в последнем выражении равна нулю.

Найдем теперь вторую производную в силу системы, учитывая тождество (27.1):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_1}{dt^2} &= -\frac{2}{y_3^3} \underbrace{[\dots]}_{=0} + \frac{1}{y_3^2} [\dot{\psi}_2(Q + \gamma \frac{\partial Q}{\partial y_2}) - \gamma \dot{y}_3 + \psi_2(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}) \dot{y}_2] = \\ &= \frac{1}{y_3^2} [(-1 + \frac{\psi_2}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2})(Q + \gamma \frac{\partial Q}{\partial y_2}) + \gamma u + \psi_2(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2})(-g - \frac{Q}{y_3} + \frac{\gamma u}{y_3})] = \\ &= \frac{1}{y_3^2} [1 + \frac{\psi_2}{y_3}(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2})] \gamma u + \\ &\quad + \frac{1}{y_3^2} [(Q + \gamma \frac{\partial Q}{\partial y_2})(-1 + \frac{\partial Q}{\partial y_2} \frac{\psi_2}{y_3}) - \psi_2(\frac{Q + gy_3}{y_3}) \cdot (\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2})] = \\ &= \frac{1}{y_3^2} [a(\psi, y) + b(\psi, y)u] \equiv 0. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Из уравнения (27.2) можно определить особое управления.

Для его оптимальности необходимо выполнение условия Келли

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d^2}{dt^2} H_1(t) \right) \geq 0, \quad (27.3)$$

откуда следует необходимость выполнения неравенства

$$\frac{\gamma}{y_3^2} [1 + \frac{\psi_2}{y_3}(\frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2})] \geq 0. \quad (27.4)$$

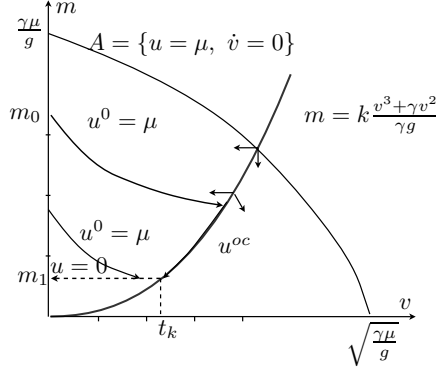


Рис. 27.1. Сечение особой поверхности

Покажем, что оно выполнено. Для этого надо выяснить знак ψ_2 , так как в нашем случае $Q = ky_2^2$, где $k > 0$ и, следовательно, круглая скобка в левой части неравенства положительна.

На оптимальной траектории гамильтониан $\mathcal{H}(t) \equiv 0$, откуда на особом участке выполняется тождество $H_0(t) \equiv 0$ (так как $H_1(t) \equiv 0$).

Но тогда $y_2 \equiv \psi_2(\frac{Q}{y_3} + g)$, откуда следует неравенство

$$\psi_2 = \frac{y_2}{\frac{Q}{y_3} + g} > 0.$$

Из условия (27.1) следует $\gamma y_3 \equiv \psi_2(Q + \gamma \frac{\partial Q}{\partial y_2})$, откуда получим, что $y_2 > 0$ на особой поверхности и само уравнение особой поверхности

$$\gamma y_3(\frac{Q}{y_3} + g) = y_2(Q + \gamma \frac{\partial Q}{\partial y_2}). \quad (27.5)$$

Подставляя в (27.5) выражение $Q = ky_2^2$, получим уравнение особого участка

$$gy_3 = \frac{k}{\gamma}(y_2^3 + \gamma y_2^2). \quad (27.6)$$

Подставляя в уравнение (27.2) выражения $Q = ky_2^2$ и

$$\frac{\psi_2}{y_3} = \frac{\gamma}{ky_2(y_2 + 2\gamma)},$$

его можно переписать в виде

$$\gamma u \frac{y_2^2 + 4\gamma y_2 + 2\gamma^2}{ky_2(y_2 + 2\gamma)} - \frac{ky_2^4 + 4k\gamma y_2^3 + 2k\gamma^2 y_2^2 + 2g\gamma y_2 y_3 + 2g\gamma^2 y_3}{ky_2(y_2 + 2\gamma)} \equiv 0. \quad (27.7)$$

Поскольку $y_2 > 0$, то в (27.7) квадратная скобка при u больше нуля, откуда следуют строгое неравенство Келли и, следовательно, необходимые условия оптимальности полученной особой траектории выполнены.

Из уравнения (27.7) вычислим особое управление

$$u^{oc} = \frac{k}{\gamma} \frac{ky_2^4 + 4k\gamma y_2^3 + 2k\gamma^2 y_2^2 + 2g\gamma y_2 y_3 + 2g\gamma^2 y_3}{y_2^2 + 4\gamma y_2 + 2\gamma^2}. \quad (27.8)$$

В исходных переменных уравнение особого участка (27.6) имеет вид

$$m = k \frac{v^3 + \gamma v^2}{\gamma g}.$$

Соотношение (27.8) в исходных переменных можно переписать в виде

$$u^{oc} = \frac{1}{\gamma} \left[kv^2 + mg - \frac{mgv(v + 2\gamma)}{v^2 + 4\gamma v + 2\gamma^2} \right] = \frac{kv^2(v + 2\gamma)(3v + 2\gamma)}{\gamma(v^2 + 4\gamma v + 2\gamma^2)} \geq 0. \quad (27.9)$$

На рис.27.1 изображена проекция особой поверхности на плоскость (v, m) .

В зависимости от начальных условий оптимальная траектория либо достигнет особой поверхности, либо нет.

Если двигаемся по особому участку, то $u^0 = u^{oc}$.

При этом нужно проверить:

- а) сохранились ли ограничения на управление;
- б) как склеивается регулярное и особое управление.

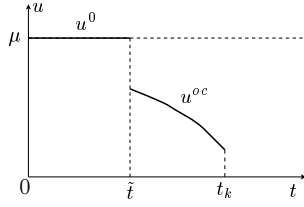


Рис. 27.2. Оптимальное управление ракетой

Выше особой поверхности $H_1 > 0$, а ниже — $H_1 < 0$.

На рис.27.1 изображена кривая A , заданная уравнением $kv^2 + mg = \gamma\mu$, на которой $dv/dt = 0$ при максимальной тяге двигателя $u = \mu$.

Эту кривую траектории системы пересекают с вертикальной касательной. При движении по особой траектории $dv/dt < 0$. Для всех точек особого участка в области ниже кривой A (в этой области физически реализуется старт с нулевой скоростью) выполнено неравенство $kv^2 + mg < \gamma\mu$.

Тогда из формулы (27.9) следует

$$u^{oc} = \frac{1}{\gamma} \left[kv^2 + mg - \frac{mgv(v + 2\gamma)}{v^2 + 4\gamma v + 2\gamma^2} \right] \leq \frac{1}{\gamma} (kv^2 + mg) < \mu,$$

т.е. особое управление является допустимым.

Зависимость оптимального управления u^0 от времени показана на рис.27.2.

Лекция 28

Численные методы решения экстремальных задач

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y, u), & y(t_0) &= y^*, \\ u(\cdot) &\in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC[t_0, t_k] \mid u(t) \in \Omega \subset R^s\}, \\ t &\in [t_0, t_k], & y(t_k) &\in M \subset R^n. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Функционал качества задачи управления терминальный

$$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}$$

Указанная задача охватывает многие важные для приложений случаи экстремальных задач.

Единого универсального метода решения задачи до сих пор не разработано, что объясняется трудностью решения задач оптимального управления.

Условно численные методы решения задачи можно разбить на четыре группы:

1) Сведение к задаче оптимизации функции конечного числа переменных при наличии ограничений.

Исходная задача — это задача минимизации в функциональном пространстве, но если на отрезке $[t_0, t_k]$ ввести сетку $\tau_i = t_0 + i * (t_i - t_k)/N$, где N — большое число, а дифференциальные уравнения заменить разностными, то задачу приближенно можно свести к конечномерной. Построить решение такой конечномерной задачи очень трудно. Во-первых, число переменных будет очень большим, во-вторых, возможно появление многих дополнительных экстремумов функционала как функции многих переменных.

2) Методы вариации в пространстве состояний (фазовых переменных). При таком подходе как правило используется принцип оптимальности Беллмана. К недостаткам подхода относится то, что он требует запоминания всего поля экстремалей и отсюда возникает трудность, названная самим Беллманом «проклятием размерности».

3) Прямые методы — вариации в пространстве управлений. К ним относятся метод Крылова-Черноузько, метод линеаризации Р.П.Федоренко и др.

4) Сведение задачи оптимального управления с помощью ПМП к краевой задаче, используя необходимые условия экстремума функционала, и дальнейшее решение двухточечной краевой задачи. Проблемы численной реализации методов этой группы мы и рассмотрим.

1. Методы решения двухточечной краевой задачи ПМП

Рассмотрим для простоты задачу с фиксированным временем и свободным правым концом траектории.

Исходя из ПМП оптимальное управление находится из решения краевой задачи относительно переменных $\psi(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}^0 = f(y^0, u^0), & y(t_0) = y^*, \\ \dot{\psi}(t) = -H_y(y^0, u^0)\psi(t), & \psi(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \end{cases} \quad (28.2)$$

$$H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) = \max_{u(t) \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)). \quad (28.3)$$

Это нелинейная краевая задача размерности $2n$ для системы ОДУ (28.2). Здесь n краевых условий (для y) задано на левом конце, а n условий (для ψ) — на правом.

Схема метода стрельбы такова: зададим произвольное значение $\psi(t_0) = z$ и подходящим численным методом интегрируем систему (28.2), при этом для каждого момента времени t находим максимум по u в выражении (28.3). Получим значения $y(t_k, z)$ и $\psi(t_k, z)$. Вычислим невязку

$$X(z) = \psi(t_k, z) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(t_k, z). \quad (28.4)$$

Решение краевой задачи сводится к решению нелинейного векторного алгебраического уравнения (28.4).

1.1. Решение системы нелинейных уравнений. Для решения задачи рассмотрим процедуру Ньютона. Представим функцию $X(z)$ в виде разложения

$$X(z + \Delta z) = X(z) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} \right) \Delta z + o(\Delta z^2).$$

Зададим некоторое начальное приближение и вычислим последующие приближения по формулам

$$z_{i+1} = z_i - \alpha_i \left(\frac{\partial X}{\partial z_i} \right)^{-1} X(z_i).$$

Здесь матрица $F = \frac{\partial X}{\partial z}$ — матрица Якоби, α_i — специальным образом подобранные коэффициенты.

Применение метода Ньютона предполагает достаточную малость отклонения $(z_{i+1} - z_i)$, поскольку фактически требуется решить линейную систему уравнений ($\alpha_i = 1$)

$$X(z_i) + F(z_i)(z - z_i) = 0, \quad (28.5)$$

отбросив члены малости $o(\|z_{i+1} - z_i\|^2)$. Если начальное приближение достаточно далеко от искомого решения $X(z^*) = 0$, то квадратичные члены отбрасывать нельзя.

Улучшить сходимость можно, двигаясь по направлению

$$z(\alpha) = z_i - \alpha F^{-1}(z_i) X(z_i)$$

до тех пор, пока невязка $\|X(\alpha)\|$ убывает, например, решая задачу одномерной минимизации

$$\min_{\alpha \geq 0} \|X(z_i - \alpha F^{-1}(z_i) X(z_i))\| \quad (28.6)$$

и полагая $\alpha_i = \alpha^*$, где α^* — решение (28.6). Такой подход называется модифицированным методом Ньютона.

Теорема 33. Пусть в ограниченной области $\|X(z)\| \leq C_1$ функция $X(z)$ имеет равномерно ограниченные первые и вторые производные, а отображение $x = X(z)$ взаимно однозначно, причем $\|F^{-1}(z)\| \leq C_2$, и имеется единственный корень $X(z^*) = 0$. Тогда модифицированный метод Ньютона сходится, если начальная точка принадлежит указанной области, т.е. $\|X(z^0)\| \leq C_1$.

На практике вместо задач одномерной минимизации (28.6) пользуются схемой $\alpha^0 = 1$, $\alpha^j = \frac{1}{2} \alpha^{j-1}$ до тех пор, пока не выполнится неравенство $\|X(z_i - \alpha^j F^{-1}(z_i) X(z_i))\| < \|X(z_i)\|$. Затем полагают $\alpha_i = \alpha^j$.

Итак, метод Ньютона состоит из следующих шагов: а) определение матрицы Якоби; б) решение линейной системы (28.5). Поскольку размерность этой системы, как правило, невысока, то поиск решения обычно трудностей не вызывает (исключая случаи, когда матрица Якоби плохо обусловлена). Для ее решения можно использовать метод исключения Гаусса с выбором главного элемента.

В нашей задаче вычисление функции невязок и построение матрицы Якоби производится численно, когда частные производные приближаются конечными разностями, например:

$$F_{ij} \approx \frac{X_i(z + \Delta_j) - X_i(z)}{|\Delta_j|},$$

где $\Delta_j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{0, j-1}, \Delta, \underbrace{0, \dots, 0}_{j+1, n})$.

Применение этих формул требует решения $(n+1)$ задач Коши для системы (28.2).

Если функция невязок, вычисляемая для текущего приближения, оказывается неопределенной (нельзя провести интегрирование и вычислить невязку), то шаг смещения в итерационной процедуре делится пополам; если неопределенность возникла при вычислении матрицы Якоби, то можно использовать формулы численного дифференцирования «назад», либо «центральные разности». Если это не помогает, то уменьшается в два раза значение шага Δ .

Основная трудность использования метода Ньютона — выбор хорошего начального приближения. Для этого можно использовать процедуру «случайного» поиска, когда начальное положение разыгрывается с помощью датчика случайных чисел. Однако все это не дает гарантии получения численного решения. Как правило, попытки успешны, если удастся выявить структуру оптимального управления и использовать ее при формировании задачи пристрелки.

В настоящее время используется несколько схем метода пристрелки:

а) получение начального приближения из решения вспомогательной задачи более низкого порядка, либо более простой, решение которой известно;

б) использование метода многоточечной пристрелки. Вектор параметров z дополняется значениями фазовых и сопряженных переменных в промежуточных точках. При этом функция невязки

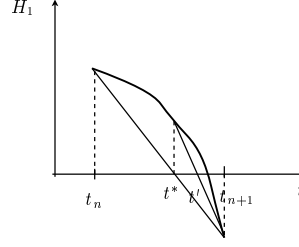


Рис. 28.1. Метод хорд

X дополняется условиями непрерывности фазовых и сопряженных переменных в этих точках. Решается серия задач Коши на наборе отрезков, на которые выбранные промежуточные точки делят весь интервал;

в) использование метода встречной пристрелки. Выбирается промежуточная точка и решаются задачи Коши слева и справа.

Как было сказано выше, с применением метода стрельбы, двухточечная краевая задача сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработано большое число методов численного решения задачи Коши. На практике (когда нет сведений о характере поведения правой части) широкое распространение получили одношаговые методы Рунге-Кутты 4-го порядка точности:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h[k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3],$$

$$k_0 = f(y_n, t_n),$$

$$k_1 = f(y_n + \frac{h}{2}k_0, t_n + \frac{h}{2}),$$

$$k_2 = f(y_n + \frac{h}{2}k_1, t_n + \frac{h}{2}),$$

$$k_3 = f(y_n + hk_2, t_n + h),$$

где $h = t_n - t_{n-1}$.

Существуют особенности применения численных методов при решении двухточечной задачи: в точке разрыва управления правые части могут терять гладкость, поэтому методы высокого порядка аппроксимации теряют свою точность.

Само оптимальное решение может оказаться чрезвычайно чувствительным относительно определения момента переключения управления.

Следовательно, надо отслеживать точки разрыва. Полагать, что приближенно разрыв происходит в узле сетки нельзя, так как решение задачи может быть чувствительно к моменту разрыва управления.

Пусть для простоты $H = H_0 + H_1 u$. В каждом узле сетки надо отслеживать знаки величины H_1 и ее производной, чтобы исключить случай, когда на отрезке интегрирования дважды происходит смена знака H_1 . Далее точка разрыва уточняется методом хорд (см. рис.28.1). Как правило, хватает 1-2 итераций.

Вторая сложность, с которой можно столкнуться при использовании метода Ньютона при решении двухточечной задачи, заключается в том, что в некоторых случаях при вариации z матрица $F(z)$ становится вырожденной. Но численное построение не улавливает вырожденности матрицы Z , так как на практике она плохо обусловлена, и в методе Ньютона вычисляется неправильное, случайное направление спуска.

Здесь помогает следующий прием. Необходимо провести регуляризацию и вместо (28.5) решать так называемую нормальную задачу

$$(F^\top F + \varepsilon E)\Delta z = -F^\top X(z^0), \quad (28.7)$$

где величина ε мала по сравнению с элементами матрицы F .

Кроме того полезна нормировка системы, при которой одни и те же вариации z приводят к примерно равным вариациям компонент невязки X .

Для этого решается нормированная задача минимизации

$$\min X^\top S X = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + s_3 X_3^2,$$

где выбор s_i осуществляется по формулам

$$s_i^2 \approx 1 / \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial z_j} \right)^2 \right).$$

Это существенно улучшает сходимость метода Ньютона.

Ниже рассмотрим пример [16], в котором принципиально нельзя решить двухточечную краевую задачу методом стрельбы.

Пример 28.1. Задача о плоте.

Рассмотрим задачу движения плота через речку с известным профилем течения. Пусть требуется в фиксированный момент времени максимально удалиться вдоль реки от точки старта.

Профиль течения зададим в виде $V(y) = 1 - y^2$. Управление плотом осуществляется перпендикулярно течению $\dot{y} = u$, где ускорение плота ограничено $|u| \leq 1$. Сделаем замену $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$.

Уравнения управляемой системы следующие:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_2^2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, & |u(t)| \leq 1 \quad x_2(0) = -1, \\ \dot{x}_3 = 1, & x_3(0) = 0. \end{cases} \quad (28.8)$$

Терминальное множество $M = \{x_3(t_k) = T\}$.

Минимизируемый функционал

$$\varphi_0 = -x_1(t_k) \rightarrow \min_u.$$

Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_1(1 - x_2^2) + \psi_2 u + \psi_3.$$

Сопряженная система

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 2\psi_1 x_2, \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \quad (28.9)$$

Из условия трансверсальности

$$\psi(t_k) + \lambda_0(-1, 0, 0)^\top \perp M,$$

учитывая, что $T_M = (\gamma_1, \gamma_2, 0)$, следуют равенства $\psi_1(t_k) = \lambda_0$ и $\psi_2(t_k) = 0$.

Докажем, что $\lambda_0 \neq 0$. Пусть $\lambda_0 = 0$, тогда $\psi_1 \equiv 0 \implies \psi_2 \equiv 0$. Тогда из условия $\mathcal{H}(t) \equiv 0 \implies \psi_3 \equiv 0$ и получаем нулевую пару, что противоречит ПМП. Следовательно, $\psi_1 > 0$ и можно нормировать $\psi_1 = \frac{1}{2}$.

Получили двухточечную задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = u \\ \dot{\psi}_2 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = -1 \\ \psi_2(T) = 0 \end{cases} \quad (28.10)$$

Вектор z (в данной задаче скаляр) зададим как $z_1 = \psi_2(0)$.

При $T \leq 1$ решение краевой задачи следующее

$$x_2(t) = -1 + t, \quad \psi_2(t) = t^2/2 - t + z_1 = \frac{1}{2}[(t-1)^2 - (T-1)^2]$$

Если $1 \leq T$, то в этой задаче существует особый режим на участке $[t^*, T]$, где $\psi_2(t) \equiv 0$ и, следовательно, $x_2(t) \equiv 0$, а $u^{oc} = 0$.

Проверьте, что условие Келли выполнено и особый участок является оптимальным.

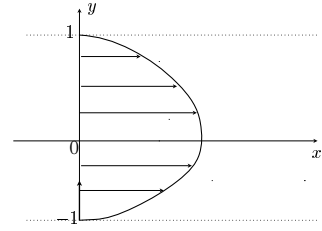


Рис. 28.2. Профиль скорости

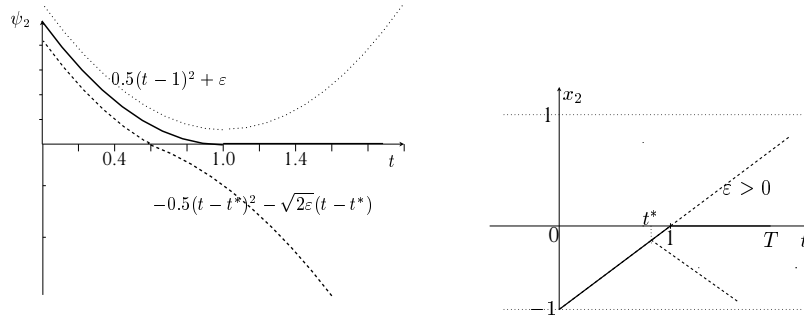


Рис. 28.3. Поведение решения при изменении начальных условий

Из предыдущей формулы следует, что начало особого режима есть точка $t^* = 1$ и оптимальное решение имеет вид:

$$\begin{cases} x_2(t) = -1 + t & \text{при } t \leq 1 \\ 0 & \text{при } t \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_2(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 & \text{при } t \leq 1 \\ 0 & \text{при } t \geq 1 \end{cases}$$

Решение получается с начальным условием $z_1 = \frac{1}{2}$. Наличие особого режима приводит к тому, что невозможно методом стрельбы получить решение задачи. Действительно, если мы получим решение с любой точностью $z_1 = \frac{1}{2} \pm \varepsilon$, то соответствующая экстремаль (при ошибке $-\varepsilon$) будет такой

$$\begin{cases} \psi_2(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2 - \varepsilon & \text{при } t \leq t^* \\ \psi_2(t) = -\frac{1}{2}(t-t^*)^2 - \sqrt{2\varepsilon}(t-t^*) & \text{при } t \geq t^* \end{cases} \quad t^* = 1 - \sqrt{2\varepsilon},$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -1 + t & \text{при } t \leq t^* \\ x_2(t) = -\sqrt{2\varepsilon} - (t-t^*) & \text{при } t \geq t^* \end{cases}$$

Вид решений изображен на рис.28.3.

Видно накопление ошибки (невязки) $(\psi_2(T) - 0)$ к концу интервала $[0, T]$, вследствие чего невозможно численно решить задачу пристрелки. Как видно из рис. 28.3, в решении по x_2 тоже накапливается ошибка.

Выход здесь состоит в том, что нужно перейти к модифицированному методу пристрелки, вводя промежуточную точку $z_2 = t^*$ и соответствующую невязку $X_2(z_1, z_2) = x_2(t^*)$. По такой схеме удастся найти численное решение.

Лекция 29

Задача Булгакова о накоплении возмущений и максиминное тестирование качества стабилизации

1. Задача Булгакова о накоплении возмущений

Рассмотрим задачу оптимального управления с фиксированным временем, где для простоты применяется скалярное управление

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad t \in [0, t_k]. \quad (29.1)$$

а функционал представляет квадрат нормы вектора состояния в конце процесса

$$J(u) = \varphi_0(x(t_k)) = \|x(t_k)\|^2 \rightarrow \max_{\|u(\cdot)\| \leq \mu}.$$

Рассматриваемая экстремальная задача представляет собой обобщение классической задачи о накоплении возмущений Б.В. Булгакова [**].

Б.В. Булгаковым была решена задача о максимальном отклонении по одной координате, т.е. для линейного функционала $J(u) = c^T x(t_k)$, где c — заданный вектор.

Решение этой задачи легко получить из принципа максимума. На лекции 17 мы получили с помощью ПМП решение задачи оптимального управления фиксированным временем, терминальным функционалом и свободным концом траектории.

Рассматриваемая нами задача Б.В. Булгакова полностью укладывается в постановку задачи лекции 17, где функционал качества линейный вида $\varphi_0(x(t_k)) = -c^T x(t_k)$.

Выпишем функцию Понтрягина $H = \psi^T(Ax + Bu)$ и сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi \\ \psi(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = c. \end{cases} \quad (29.2)$$

Оптимальное возмущение, доставляющее максимум функционалу следующее:

$$u^0(t) = \begin{cases} \mu & \text{при } \psi^T(t)B(t) \geq 0, \\ -\mu & \text{при } \psi^T(t)B(t) < 0. \end{cases} \quad (29.3)$$

Это решение имеет простой геометрический смысл (см. рис.29.1) — достигается максимальная проекция множества достижимости $\Omega(t_k)$ на направление, заданное вектором c .

Вернемся теперь к исходной задаче — с нелинейным функционалом вида $\varphi_0 = x^T(t_k)x(t_k)$.

Тогда из ПМП следует краевое условие для сопряженной системы

$$\psi(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 2x^0(t_k).$$

Проблема решения двухточечной задачи в том, что не знаем $x^0(t_k)$. Трудности решения двухточечной задачи методом стрельбы обсуждались на прошлой лекции.

Применим для решения задачи оптимизации прямой метод — метод условного градиента.

Метод условного градиента. Опишем метод условного градиента для решения следующей конечномерной задачи:

$$J(u) \rightarrow \min_{u \in U},$$

где U — замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^s , причем функционал J (функция) непрерывно дифференцируем $J(u) \in C^1(U)$.

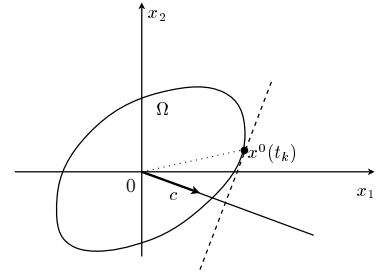


Рис. 29.1.

Обозначим $u_0 \in U$ — некоторое начальное приближение. Пусть i -е приближение известно $u_i \in U$. Рассмотрим главную линейную часть приращения $\Delta J - g_i(u) = \nabla J(u_i)^\top (u - u_i)$, где вектор $\nabla J(u) = \left(\frac{\partial J}{\partial u}\right)^\top$. Найдем вспомогательное приближение $\tilde{u}_i$ из условия

$$\nabla J(u_i)^\top (\tilde{u}_i - u_i) = \min_u \nabla J(u_i)^\top (u - q_i))$$

или, что то же, из условия

$$\nabla J(u_i)^\top \tilde{u}_i = \min_{u \in U} \nabla J(u_i)^\top u \quad (29.4)$$

можно показать, что минимум в (29.4) достигается хотя бы на одном $\tilde{u}_i \in U$.

Затем полагаем

$$u_{i+1} = u_i + \alpha_i (\tilde{u}_i - u_i), \quad \alpha_i \in [0, 1], \quad (29.5)$$

где параметр α_i может быть выбран одним из способов:

- α_i определяется условием

$$\varphi_i(\alpha_i) = \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \varphi_i(\alpha) \quad (29.6)$$

где $\varphi_i(\alpha) = J(u_i + \alpha(\tilde{u}_i - u_i))$

- если градиент удовлетворяет условию Липшица

$$\|\nabla J(u) - \nabla J(w)\| \leq L\|u - w\|,$$

можно положить

$$\alpha_i = \min \left\{ 1; \frac{\gamma_i |g_i(\tilde{u}_i)|}{\|\tilde{u}_i - u_i\|^2} \right\} \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \gamma_i \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon > 0$ — параметры метода

- задать $\alpha_i = 1$, проверить условие монотонности $J(u_{i+1}) < J(u_i)$ и при необходимости положить $\alpha_i = \frac{1}{2}\alpha_i$, пока не выполнится условие монотонности.

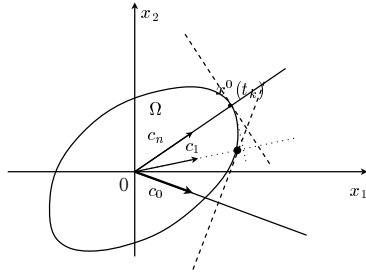


Рис. 29.2.

имеет тот же геометрический смысл: найдена максимальная проекция множества достижимости системы Ω_{t_k} на направление c (см. рис.29.2).

Для случаев $n = 2, 3$ доказана сходимость этого метода в задаче Булгакова по двум координатам. Действительно, на текущем шаге решается задача

$$J^{i+1} = \max_{x(t_k) \in \Omega} x_i^\top x(t_k) = x_i^\top x_{i+1} > x_i^\top x_i = J^i$$

если $x_{i+1} \neq x_i$. Вычисления прерываются, когда выполнено равенство и следовательно $x_i = x_{i+1}$.

Метод Крылова-Черноусько. Рассмотрим теперь нелинейный вариант задачи (29.1), т.е. управляемая система с фиксированным временем и свободным правым концом траектории

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y(t_0) = y^*, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad t \in [t_0, t_k], \quad (29.7)$$

а функционал терминальный

$$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Исходя из ПМП оптимальное управление находится из решения краевой задачи относительно переменных $\psi(t), y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}^0 = f(y^0, u^0) \\ \dot{\psi}(t) = -H_y(y^0, u^0)\psi(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y(t_0) = y^* \\ \psi(t_k) = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \end{cases} \quad (29.8)$$

$$H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) = \max_{u(t) \in \Omega} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) \quad (29.9)$$

Был предложен следующий алгоритм поиска оптимального управления:

Пусть задано некоторое начальное приближение $u(t) = u^i(t)$.

1) При известном u^i можно проинтегрировать систему (29.7) и вычислить $y^i(t)$. Зная $y^i(t_k)$, можно вычислить $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y^i(t_k)}$ и получить краевые условия для сопряженной системы.

Теперь можно независимо проинтегрировать сопряженную систему (29.8) справа-налево, вычисляя правые части в (29.8) $H_y(y^i(t))$ как функции времени.

2) Найдем промежуточное управление из решения задачи ПМП

$$\tilde{u}^i(t) = \max_{u(t) \in U} H(\psi^i(t), y^i(t), u)$$

3) Следующее приближение вычисляем по формуле:

$$u^{i+1} = u^i + \alpha_i(\tilde{u}^i - u^i)$$

где α_i подбирается из условия, чтобы $J(u^{i+1}) < J(u^i)$.

Как видим схема метода полностью совпадает со схемой условного градиента. Сходимость этого метода в общем случае не доказана.

Известны различные модификации, для которых при некоторых ограничениях доказана сходимость в пространстве состояний.

Задача проектирования точки на множество достижимости. Рассмотрим линейную систему (29.1), но функционал следующий

$$J(u) = \varphi_0(x(t_k)) = \|x(t_k) - x_c\|^2 \rightarrow \min_{\|u(\cdot)\| \leq \mu}$$

(где x_c фиксированная точка, $x_c \notin \Omega_u(t_k)$ не принадлежащая множеству достижимости, построенному в момент времени t_k .)

Мы хотим найти минимальное расстояние между x_c и точками множества достижимости.

Метод условного градиента в этой задаче строится аналогично предыдущему примеру, но решение сопряженной системы (29.2) ищем с другим краевым условием

$$\psi(t_k) = -2(x^0(t_k, u) - x_c) \quad (29.10)$$

Сходимость метода условного градиента существенно зависит от того, насколько далеко точка x_c находится от границы множества достижимости. Если точка близко к границе, то необходимо использовать методику подбора коэффициента α_i на каждом шаге алгоритма.

2. Максиминное тестирование качества стабилизации

Разработка сложных систем управления всегда включает в себя этап испытания и тестирования созданных алгоритмов управления динамической системой. Как правило такая проверка проводится путем моделирования условий работы алгоритма самим коллективом разработчиков алгоритмов. При этом существенно, что сам алгоритм управления известен системе, с помощью которой проводится тестирование. Другая ситуация, когда необходимо провести приемку и выбор лучшего алгоритма из нескольких, причем созданных разными разработчиками. В этом случае, как правило, сами алгоритмы неизвестны и представляют «черный ящик», в котором известен только вход и выход.

Аналогичная проблема возникает, когда надо проверить работу человека-оператора или пилота, так как в этих случаях структура алгоритма управления тоже неизвестна.

Для того, чтобы объективно получить оценку качества управления, а также провести тренировки пилотов-операторов с целью улучшить показатели качества, создать проверочный стенд. Сам стенд может иметь различный уровень сложности — быть чисто компьютерным, либо и компьютерным и динамическим, быть полунатурным, т.е. включать отдельные элементы системы управления в натуральном виде (этом может быть сам человек-оператор, либо микроконтроллер с зашитыми алгоритмами управления).

Все стенды должны содержать модель динамики управляемого объекта и (если стенд динамический) так организовать движение стенда, чтобы имитировать условия реального движения для измерителей и сенсорных систем пилота. таким образом очень важно создать на стенде соответствующую реальным условиям визуальную обстановку.

Имея в распоряжении такой стенд, можно проверять либо качество работы алгоритмов управления, либо навыки пилота по управлению динамическим объектом.

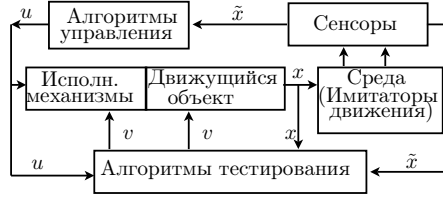


Рис. 29.3.

Часто требуется проверить качество алгоритмов управления в экстремальных условиях их функционирования. Это характерно, например при разработке космических систем, где цена ошибки непомерно высока. Для этого надо моделировать динамику управляемого объекта при наихудшем поведении возмущений (параметров, мешающих управлению), действующих на управляемый объект. Следовательно в процессе проверки алгоритма либо тренировки надо решать задачу поиска этих наихудших возмущений.

Структурная схема такого тестирующего стенда представлена на рис.29.3.

Рассмотрим более подробно функционирование системы тестирования на примере решения задачи об оценке точности алгоритмов стабилизации программного движения.

Если система стабилизации сконструирована достаточно хорошо, реальное движение будет осуществляться в окрестности программного движения и можно рассматривать линейную систему уравнений в отклонениях при наличии внешних возмущений v

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x(0) = x_0 \in X^0, \quad (29.11)$$

где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in V$ — ресурсы управления и возмущения, а X^0 — область начальных возмущений.

Поставим задачу: оценить точность стабилизации для некоторого управления $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t)$ в заданный момент времени t_k в смысле следующего функционала

$$J(u, v) = x(t_k)^\top E_s x(t_k),$$

где $E_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ т.е. по отклонениям в момент t_k первых s координат.

Управление стремится минимизировать критерий качества $J(u, v) \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}$

Возмущение же стремится его максимизировать $J(u, v) \rightarrow \max_{v \in V}$

Указанные две задачи составляют дифференциальную игру между управлением и возмущением.

Задача системы тестирования — сформировать те наихудшие возмущения, при которых будет происходить тестирование алгоритма управления на стенде.

Предположим, что указанную дифференциальную игру будем решать в классе программных стратегий, т.е. $u(t) \in \mathcal{U}$ и $v(t) \in V$ — функции времени.

Сделаем замену $x = y - z$, тогда систему (29.11) представим в виде двух подсистем

$$\dot{y} = Ay + Cv, \quad y(0) = y_0 \in X^0, \quad (29.12)$$

$$\dot{z} = Az - Bu. \quad (29.13)$$

Критерий качества (функционал как) представим квадрат расстояния фазовых векторов этих подсистем в конечный момент t_k . (Для простоты считаем, что $s = n$)

$$J(u, v) = (y - z)^\top E_s (y - z) = \varrho^2(y, z)$$

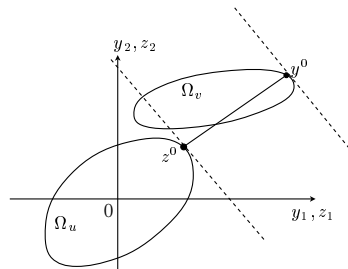


Рис. 29.4.

Множества точек $z(t_k) \in \Omega_u$ и $y(t_k) \in \Omega_v$ при всевозможном допустимом поведении управлений $u(t) \in \mathcal{U}$ и возмущений $v(t) \in V$ составляют множества достижимости систем (29.13) и (29.12) соответственно.

Ограничения на управление и возмущение таковы, что множества достижимости — ограниченные выпуклые замкнутые множества.

Таким образом дифференциальная игра между управлением u и v свелась к геометрической игре на множествах достижимости между $z(t_k)$ и $y(t_k)$:

$$\begin{array}{ll} \text{минимакс} & \max_{y \in \Omega_v} \varrho(y, z) \rightarrow \min_{z \in \Omega_u} \\ \text{максимин} & \min_{z \in \Omega_u} \varrho(y, z) \rightarrow \max_{y \in \Omega_v} \end{array}$$

Покажем, что всегда выполнено неравенство

$$\max_{y \in \Omega_v} \min_{z \in \Omega_u} \varrho(y, z) \leq \min_{z \in \Omega_u} \max_{y \in \Omega_v} \varrho(y, z)$$

Действительно, зафиксируем $y = y'$. Тогда $\forall z \in \Omega_u \quad \varrho(y', z) \leq \max_{y \in \Omega_v} \varrho(y, z)$, откуда

$$\min_{z \in \Omega_u} \varrho(y', z) \leq \min_{z \in \Omega_u} \max_{y \in \Omega_v} \varrho(y, z) = \varrho^0$$

поскольку это неравенство выполнено при любом y' , то

$$\varrho_0 = \max_{y \in \Omega_v} \min_{z \in \Omega_u} \varrho(y, z) \leq \varrho^0$$

Седловая точка геометрической игры существует, если $\varrho_0 = \varrho^0 = \varrho(y^0, z^0)$, которая называется ценой игры.

Оптимальная стратегия тестирования существует, когда существует седловая точка дифференциальной игры.

В этом случае методика максиминного тестирования проводится в три этапа по следующей схеме:

1) находим решение задачи на $\max \min$ и цену игры $\varrho_0 = \varrho(y^0, z^0)$.

2) Моделируем на стенде подсистему (29.13) с тестируемым алгоритмом управления $\tilde{u}$ (проводим тренировки пилота) и вычисляем точку $\tilde{z}(t_k)$.

Тогда $\varrho^0 \leq \varrho(y^0, \tilde{z}) = \tilde{\varrho}$ и следовательно $\tilde{\varrho} = \varrho(y^0, \tilde{z}) \geq \varrho_0$.

3) Вычисляем оценку результатов тестирования по десятибальной шкале $10 \cdot \frac{\varrho_0}{\tilde{\varrho}}$.

Как видим, существенное место при формировании тестовых возмущений занимает выяснение условий существования седловой точки в геометрической игре на множествах достижимости. Известно много различных критериев существования седловой точки в геометрической игре. Например, если пара (z^0, y^0) составляет седловую точку (как показано на рис. 29.4), то в этих точках существуют опорные гиперплоскости к множествам достижимости Ω_u и Ω_v , которые параллельны между собой и перпендикулярны отрезку $[z^0, y^0]$.

Заметим еще, что только единственная точка z^0 множества достижимости подсистемы по управлению Ω_u может составлять седловую точку игры (z^0, y^0) , тогда как решений по возмущению y^0 может быть бесконечно много.

Существуют численные итерационные алгоритмы поиска седловой точки геометрической игры, которые представляют собой комбинацию алгоритма решения задачи Булгакова, рассмотренной в п.1 и задачи проектирования точки на множество, рассмотренной в п.2.

Дополнения к лекциям

В Дополнения к лекциям вошли только те материалы, которые непосредственно примыкают к материалам лекций — либо их развивают, либо дополняют. В лекции они не вошли из-за недостатка времени, отводимого на чтение курса.

Дополнение к лекциям 5–7. Декомпозиция алгоритмов управления и оценивания по компонентам соответственно вектора управления и вектора наблюдения

Рассмотрим задачу построения алгоритмов управления для систем с несколькими управляющими входами (величина u — вектор). Для простоты, но не нарушая общности, будем считать, что вектор u двумерный: $u^\top = (u_1 \ u_2)$. Тогда уравнения управляемой системы можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + u_1 b^1 + u_2 b^2, \quad B = (b^1 \ b^2). \quad (\text{D5.1})$$

Введем две последовательности

$$\begin{aligned} g^1 &= b^1, g^2 = Ag^1, \dots, g^{j+1} = Ag^j, \dots \\ f^1 &= b^2, f^2 = Af^1, \dots, f^{j+1} = Af^j, \dots \end{aligned}$$

Пусть также

$$\begin{aligned} g^{m+1} &= \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_m g^m, \\ f^{l+1} &= \beta_1 f^1 + \dots + \beta_l f^l. \end{aligned} \quad (\text{D5.2})$$

Каждый из наборов $\{g^1, \dots, g^m\}$ и $\{f^1, \dots, f^l\}$ состоит из линейно независимых векторов.

В свете вышесказанного каждый из наборов представляет базис управляемого подпространства соответственно при помощи управления u_1 и при помощи управления u_2 . Если пара (A, B) управляема, то $m + l \geq n$, и среди векторов указанных наборов найдется n линейно независимых векторов, которые в совокупности могут быть выбраны в качестве базиса полного пространства. Очевидно, выбор базиса в общем случае неоднозначен.

Из всех возможных вариантов такого выбора два представляют наибольший практический интерес.

1. Базис полного пространства составим из всех векторов первого набора, дополнив их до n векторов первыми векторами второго набора $\{g^1, \dots, g^m, f^1, \dots, f^r\}$, $m + r = n$. Имеет место представление

$$f^{r+1} = \gamma_1 g^1 + \dots + \gamma_m g^m + \delta_1 f^1 + \dots + \delta_r f^r. \quad (\text{D5.3})$$

Введем векторы $\xi = (\xi_1 \dots \xi_m)^\top$ и $\eta = (\eta_1 \dots \eta_r)^\top$, составленные из контравариантных координат вектора x в новом базисе

$$x = \xi_1 g^1 + \dots + \xi_m g^m + \eta_1 f^1 + \dots + \eta_r f^r. \quad (\text{D5.4})$$

Подставив (D5.4) в (D5.1), аналогично предыдущему, получим с учетом (D5.2) и (D5.3):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}\xi + A_{12}\eta + b_\star^1 u_1, \\ \dot{\eta} &= A_{22}\eta + b_\star^2 u_2, \end{aligned} \quad (\text{D5.5})$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_m \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \delta_r \end{pmatrix}, \quad b_\star^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_\star^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пары $(A_{11}, b_\star^1)$ и $(A_{22}, b_\star^2)$, очевидно, управляемы.

Задачу стабилизации можно решить при помощи линейной обратной связи $u_1 = c^{1\top} \xi$, $u_2 = c^{2\top} \eta$. В результате характеристическое уравнение получившейся системы распадается на два

$$\det(\lambda E_m - (A_{11} + b_\star^1 c^{1\top})) = 0, \quad \det(\lambda E_r - (A_{22} + b_\star^2 c^{2\top})) = 0.$$

В каждом из них векторы c^1 и c^2 можно выбрать так, чтобы коэффициенты этих уравнений были любыми наперед заданными. В частности, может быть обеспечена экспоненциальная устойчивость системы с любой наперед заданной степенью.

2. Базис полного пространства будем составлять, выбирая поочередно векторы из наборов $\{g^1, \dots, g^m\}$ и $\{f^1, \dots, f^l\}$ до тех пор, пока очередной вектор не окажется линейно зависимым от ранее выбранных векторов.

Пусть им оказался вектор f^{k+1} . Недостающую часть базиса доберем из очередных векторов набора $\{g^i\}$. В результате получим базис $\{g_1, \dots, g^s, f^1, \dots, f^k\}$, где $s \geq k$, $s + k = n$. Имеют место представления

$$\begin{aligned} g^{s+1} &= \mu_1 g^1 + \dots + \mu_s g^s + \nu_1 f^1 + \dots + \nu_k f^k, \\ f^{k+1} &= \gamma_1 g^1 + \dots + \gamma_k g^k + \gamma_{k+1} g^{k+1} + \delta_1 f^1 + \dots + \delta_k f^k. \end{aligned} \quad (D5.6)$$

В последнем соотношении содержатся два разноименных вектора с одинаковыми старшими индексами, что эквивалентно дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно старших производных. Для того, чтобы освободиться от этого обстоятельства, которое могло бы причинить нам вычислительные трудности, проведем некоторые преобразования.

Введем векторы $f_*^j = f^j - \gamma_{k+1} g^j$ и управление $u_* = u_1 + \gamma_{k+1} u_2$. Легко видеть, что $f_*^{j+1} = A f_*^j$. В новых переменных исходные соотношения переписуются следующим образом

$$\dot{x} = Ax + u_* g^1 + u_2 f_*^1, \quad (D5.7)$$

$$\begin{aligned} g^{s+1} &= \mu_1^* g^1 + \dots + \mu_s^* g^s + \nu_1 f_*^1 + \dots + \nu_k f_*^k, \\ f_*^{k+1} &= \gamma_1^* g^1 + \dots + \gamma_k^* g^k + \delta_1 f_*^1 + \dots + \delta_k f_*^k, \end{aligned} \quad (D5.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1^* &= \mu_1 + \nu_1 \gamma_{k+1}, & \gamma_j^* &= \gamma_j + \gamma_{k+1} \delta_j, & j &= 1, \dots, k \\ \dots & & & & & \\ \mu_k^* &= \mu_k + \nu_k \gamma_{k+1}, & \gamma_j^* &= 0, & j &> k \\ \mu_{k+1}^* &= \mu_{k+1}, & & & & \\ \dots & & & & & \\ \mu_s^* &= \mu_s. \end{aligned} \quad (D5.9)$$

Покажем, что существует базис $\{p^1, \dots, p^s, v^1, \dots, v^k\}$, в котором вектор

$$x = \xi_1 p^1 + \dots + \xi_s p^s + \eta_1 v^1 + \dots + \eta_k v^k \quad (D5.10)$$

описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dots & \\ \dot{\xi}_s &= \mu_1^* \xi_1 + \dots + \mu_s^* \xi_s + \gamma_1^* \eta_1 + \dots + \gamma_k^* \eta_k + u_*, \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= \eta_3, \\ \dots & \\ \dot{\eta}_k &= \delta_1 \eta_1 + \dots + \delta_k \eta_k + \nu_1 \xi_1 + \dots + \nu_k \xi_k + u_2. \end{aligned}$$

В самом деле, подставив (D5.10) в (D5.1), получим соотношения для определения базисных векторов

$$\begin{aligned} u_1^* : g^1 &= p^s, & u_2 : f_*^1 &= v^k, \\ \xi_s : A p^s &= p^{s-1} + \mu_s^* p^s, & \eta_k : A v^k &= v^{k-1} + \delta_k v^k + \gamma_k^* p^s, \\ \xi_{s-1} : A p^{s-1} &= p^{s-2} + \mu_{s-1}^* p^s, & \eta_{k-1} : A v^{k-1} &= v^{k-2} + \delta_{k-1} v^k + \gamma_{k-1}^* p^s, \\ \dots & & \dots & \\ \xi_k : A p^k &= p^{k-1} + \mu_k^* p^s + \nu_k v^k, & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ \xi_2 : A p^2 &= p^1 + \mu_2^* p^s + \nu_2 v^k, & \eta_2 : A v^2 &= v^1 + \delta_2 v^k + \gamma_2^* p^s, \\ \xi_1 : A p^1 &= \mu_1^* p^s + \nu_1 v^k, & \eta_1 : A v^1 &= \delta_1 v^k + \gamma_1^* p^s. \end{aligned}$$

Теперь следует положить

$$\begin{aligned}
p^s &= g^1, \\
p^{s-1} &= g^2 - \mu_s^* g^1, \\
p^{s-2} &= g^3 - \mu_s^* g^2 - \mu_{s-1}^* g^1, \\
&\dots \\
p^{k-1} &= g^{s-k+2} - \mu_s^* g^{s-k+1} - \dots - \mu_k^* g^1 - \nu_k f_\star^1, \\
&\dots \\
p^1 &= g^s - \mu_s^* g^{s-1} - \dots - \mu_2^* g^1 - \nu_k f_\star^{k-1} - \dots - \nu_2 f_\star^1, \\
v^k &= f_\star^1, \\
v^{k-1} &= f_\star^2 - \delta_k f_\star^1 - \gamma_k^* g^1, \\
&\dots \\
v^1 &= f^k - \delta_k f_\star^{k-1} - \dots - \delta_2 f_\star^1 - \gamma_k^* g^{k-1} - \dots - \gamma_2^* f_\star^1.
\end{aligned}$$

Соотношения при ξ_1 и η_1 выполняются тождественно. Очевидно, что набор $\{p^1, \dots, p^s, v^1, \dots, v^k\}$ составляет базис.

Пусть измеряются все компоненты вектора состояния x и, значит, могут быть вычислены величины ξ и η . Задачу стабилизации будем решать по принципу обратной связи, сформировав управления $u_\star$ и u_2 в виде

$$\begin{aligned}
u_\star &= -(\gamma_1^* \eta_1 + \dots + \gamma_k^* \eta_k) + c^{1\top} \xi, \\
u_2 &= -(\nu_1 \xi_1 + \dots + \nu_k \xi_k) + c^{2\top} \eta.
\end{aligned} \tag{D5.11}$$

Напомним, что $u_\star = u_1 + \gamma_{k+1} u_2$. Отсюда находится u_1 . В результате такого выбора полная система распадается на две замкнутые подсистемы

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \xi_2, & \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\
\dot{\xi}_2 &= \xi_3, & \dot{\eta}_2 &= \eta_3, \\
&\vdots & & \vdots \\
\dot{\xi}_s &= (\mu_1^* + c_1^1) \xi_1 + \dots + (\mu_s^* + c_s^1) \xi_s, & \dot{\eta}_k &= (\delta_1 + c_1^2) \eta_1 + \dots + (\delta_k + c_k^2) \eta_k.
\end{aligned}$$

Векторы c^1 и c^2 могут быть выбраны так, чтобы обеспечить в каждой из подсистем любые наперед заданные характеристические уравнения, а, стало быть, обеспечить желаемую экспоненциальную устойчивость.

В заключение пунктов **1** и **2** заметим, что изложенные в них процедуры могут быть названы по своему результату декомпозицией (расщеплением) уравнений динамической системы по компонентам вектора управления.

3. Перейдем теперь к задаче построения алгоритма оценивания для систем с несколькими выходами (величина z — вектор). Процедура построения будет сопряжена аналогичной процедуре в задаче управления.

Для простоты, но не нарушая общности, будем считать, что вектор z двумерен: $z^\top = (z_1 \ z_2)$. Имеем

$$z_1 = h^{1\top} x, \quad z_2 = h^{2\top} x, \quad \dot{x} = Ax. \tag{D5.12}$$

Введем две последовательности векторов

$$\begin{aligned}
g^1 &= h^1, g^2 = A^\top g^1, \dots, g^{j+1} = A^\top g^j, \dots \\
f^1 &= h^2, f^2 = A^\top f^1, \dots, f^{j+1} = A^\top f^j, \dots
\end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned}
g^{m+1} &= \alpha_1 g^1 + \dots + \alpha_m g^m, \\
f^{l+1} &= \beta_1 f^1 + \dots + \beta_l f^l.
\end{aligned} \tag{D5.13}$$

Каждый из наборов $\{g^1, \dots, g^m\}$, $\{f^1, \dots, f^l\}$ состоит из линейно независимых векторов. Тогда каждый из наборов представляет базис подпространства, вполне наблюдаемого при помощи, соответственно, измерений z_1 и z_2 . Если пара (A, H) вполне наблюдаема, то $m + l \geq n$ и среди векторов указанных наборов найдется n линейно независимых, которые и могут быть выбраны в качестве базиса полного пространства.

Но выбор базиса неоднозначен. Из всех вариантов такого выбора рассмотрим (в этом и следующем пунктах) два наиболее употребительные.

Составим базис полного пространства из первого набора, дополненного до n векторов первыми векторами второго набора $\{g^1, \dots, g^m, f^1, \dots, f^r\}$, $m + r = n$. Имеет место представление

$$f^{r+1} = \gamma_1 g^1 + \dots + \gamma_m g^m + \delta_1 f^1 + \dots + \delta_r f^r. \tag{D5.14}$$

Введем векторы $\xi = (\xi_1 \dots \xi_m)^\top$ и $\eta = (\eta_1 \dots \eta_r)^\top$, составленные из ковариантных координат вектора x в новом базисе

$$\xi_j = x^\top g^j \quad (j = 1, \dots, m), \quad \eta_i = x^\top f^i \quad (i = 1, \dots, r).$$

Получим с учетом (D5.13) и (D5.14),

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, & \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, & \dot{\eta}_2 &= \eta_3, \\ &\vdots & &\vdots \\ \dot{\xi}_m &= \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_m \xi_m, & \dot{\eta}_r &= \gamma_1 \xi_1 + \dots + \gamma_m \xi_m + \delta_1 \eta_1 + \dots + \delta_r \eta_r, \\ z_1 &= \xi_1, & z_2 &= \eta_1. \end{aligned}$$

Или в матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11} \xi, & \dot{\eta} &= A_{21} \xi + A_{22} \eta, \\ z_1 &= e_{(m)}^{1\top} \xi, & z_2 &= e_{(r)}^{1\top} \eta. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_m \end{pmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \delta_1 & \delta_2 & \dots & \dots & \dots & \delta_r \end{pmatrix}, \quad e_{(m)}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_{(r)}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Представляется естественным следующий алгоритм оценивания

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} &= A_{11} \tilde{\xi} + K^1 (z_1 - e_{(m)}^{1\top} \tilde{\xi}), \\ \dot{\tilde{\eta}} &= A_{21} \tilde{\xi} + A_{22} \tilde{\eta} + K^2 (z_2 - e_{(r)}^{1\top} \tilde{\eta}). \end{aligned} \quad (D5.15)$$

Уравнения ошибок

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\xi} &= (A_{11} - K^1 e_{(m)}^{1\top}) \Delta \xi, \\ \Delta \dot{\eta} &= A_{21} \Delta \xi + (A_{22} - K^2 e_{(r)}^{1\top}) \Delta \eta. \end{aligned} \quad (D5.16)$$

Характеристическое уравнение последней системы расщепляется на два

$$\det(\lambda E_m - (A_{11} - K^1 e_{(m)}^{1\top})) = 0, \quad \det(\lambda E_r - (A_{22} - K^2 e_{(r)}^{1\top})) = 0.$$

Вследствие наблюдаемости пар $(A_{11}, e_{(m)}^1)$, $(A_{22}, e_{(r)}^1)$ в каждом из характеристических уравнений выбором соответственно векторов K^1 и K^2 можно обеспечить любые наперед заданные коэффициенты, а стало быть, и асимптотическую устойчивость уравнений ошибок.

4. Базис полного пространства будем составлять, выбирая поочередно векторы из наборов $\{g^1, \dots, g^m\}$, $\{f^1, \dots, f^l\}$ до тех пор, пока очередной вектор не окажется линейно зависимым от предыдущих. Пусть им оказался вектор f^{r+1} . Недостающую часть базиса доберем из очередных векторов набора $\{g^i\}$. В результате получим совокупность векторов $\{g^1, \dots, g^s, f^1, \dots, f^r\}$, $r \leq s$, $s + r = n$. Имеют место разложения

$$\begin{aligned} g^{s+1} &= \mu_1 g^1 + \dots + \mu_s g^s + \nu_1 f^1 + \dots + \nu_r f^r, \\ f^{r+1} &= \gamma_1 g^1 + \dots + \gamma_r g^r + \gamma_{r+1} g^{r+1} + \delta_1 f^1 + \dots + \delta_r f^r. \end{aligned} \quad (D5.17)$$

Аналогично тому, как это делалось в задаче управления, проведем некоторые преобразования, дабы освободиться от наличия во втором соотношении двух разноименных векторов с одинаковыми старшими индексами.

Введем векторы $f_\star^j = f^j - \gamma_{r+1} g^j$, $(f_\star^{j+1} = A^\top f_\star^j)$, и новое «измерение»

$$z_\star = f_\star^{1\top} x = z_2 - \gamma_{r+1} z_1.$$

В новых величинах соотношения (D5.17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f_\star^{r+1} &= \gamma_1^\star g^1 + \dots + \gamma_r^\star g^r + \delta_1 f_\star^1 + \dots + \delta_r f_\star^r, \\ \gamma_i^\star &= \gamma_i + \delta_i \gamma_{r+1}, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (D5.18)$$

Покажем, что существует базис $\{p^1, \dots, p^s, q^1, \dots, q^r\}$, в котором ковариантные координаты вектора x описываются следующим образом

$$\begin{aligned} \xi_j &= x^\top p^j \quad (j = 1, \dots, s), & \eta_i &= x^\top q^i \quad (i = 1, \dots, r), \\ z_1 &= \xi_1, & z_\star &= \eta_1, \\ \dot{\xi}_1 &= \mu_s \xi_1 + \xi_2 + \nu_s z_2, & \dot{\eta}_1 &= \delta_r \eta_1 + \gamma_r^\star z_1 + \eta_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \mu_{s-1} \xi_1 + \xi_3 + \nu_{s-1} z_2, & \dot{\eta}_2 &= \delta_{r-1} \eta_1 + \eta_3 + \gamma_{r-1}^\star z_1, \\ &\dots & &\dots \\ \dot{\xi}_s &= \mu_1 \xi_1 + \nu_1 z_2, & \dot{\eta}_r &= \delta_1 \eta_1 + \gamma_1^\star z_1, \end{aligned}$$

причем $\nu_j = 0$ при $j > r$.

Последовательно имеем из первого столбца

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x^\top g^1 = x^\top p^1, \\ \xi_2 &= \dot{\xi}_1 - \mu_s \xi_1 - \nu_s z_2 = x^\top (g^2 - \mu_s g^1 - \nu_s f^1) = x^\top p^2, \\ &\dots \\ \xi_s &= x^\top (g^s - \mu_s g^{s-1} - \dots - \mu_2 g^1 - \nu_s f^{s-1} - \dots - \nu_2 f^1) = x^\top p^s. \end{aligned}$$

Последнее уравнение столбца выполняется тождественно в силу (D5.17). Аналогично,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= x^\top f_\star^1 = x^\top q^1, \\ \eta_2 &= x^\top (f_\star^2 - \delta_r f_\star^1 - \gamma_r^\star g^1) = x^\top q^2, \\ &\dots \\ \eta_r &= x^\top (f_\star^r - \delta_r f_\star^{r-1} - \dots - \delta_2 f_\star^1 - \gamma_r^\star g^{r-1} - \dots - \gamma_2 g^1) = x^\top q^r. \end{aligned}$$

В качестве алгоритма оценивания выберем следующий:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \mu_s \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \nu_s z_2 + K_{11}(z_1 - \tilde{\xi}_1), \\ &\dots \\ \dot{\xi}_s &= \mu_1 \tilde{\xi}_1 + \nu_1 z_2 + K_{1s}(z_1 - \tilde{\xi}_1), \\ \dot{\eta}_1 &= \delta_r \tilde{\eta}_1 + \tilde{\eta}_2 + \gamma_r^\star z_1 + K_{21}(z_\star - \tilde{\eta}_1), \\ &\dots \\ \dot{\eta}_r &= \delta_r \tilde{\eta}_1 + \gamma_1^\star z_1 + K_{2r}(z_\star - \tilde{\eta}_1). \end{aligned}$$

Уравнения ошибок оказываются расцепленными на две независимые друг от друга группы:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\xi}_1 &= (\mu_s - K_{11}) \Delta \xi_1 + \Delta \xi_2, & \Delta \dot{\eta}_1 &= (\delta_r - K_{21}) \Delta \eta_1 + \Delta \eta_2, \\ &\dots & &\dots \\ \Delta \dot{\xi}_s &= (\mu_1 - K_{1s}) \Delta \xi_1, & \Delta \dot{\eta}_r &= (\delta_1 - K_{2r}) \Delta \eta_1. \end{aligned}$$

Из предыдущего ясно, что в каждой из подсистем параметры K_{1j} и K_{2i} можно выбрать так, чтобы соответствующие характеристические уравнения имели любые наперед заданные коэффициенты, а стало быть, так, чтобы уравнения ошибок были асимптотически устойчивы.

Дополнение к лекции 13. Субоптимальное сглаживание

Фильтр Калмана применяется для решения задач оценивания в реальном времени. Это означает, что определение оценок $\tilde{x}$ фазового вектора x исследуемой линейной системы происходит в темпе поступления измерительной информации и определяемая этим алгоритмом оценка $\tilde{x}(t_i)$ учитывает измерения, полученные к текущему (реальному) моменту времени t_i .

Однако, существуют многочисленные приложения, допускающие постобработку измерительной информации, что позволяет иначе сформулировать задачу оценивания. Суть новой постановки состоит в том, что для определения оценки вектора состояния в каждый момент времени необходимо учесть весь массив измерительной информации, тем самым используя в соответствующем алгоритме как «прошлые», так и «будущие» измерения. Такие задачи носят название задач сглаживания.

Рассматривается стандартная задача оценивания вектора состояния x_j линейной динамической системы

$$x_{j+1} = \Phi_j x_j + q_j, \quad (D13.1)$$

при помощи измерительной информации $z_0, z_1, \dots, z_N$:

$$z_j = H_j x_j + r_j, \quad (D13.2)$$

поступающей в дискретные моменты времени $t_0, t_1, \dots, t_N$ ($t_j \in [t_0, t_N]$).

Принимаются стандартные гипотезы для параметров $\tilde{x}_0^-$, P_0^- , q_j , r_j задачи калмановской фильтрации. Требуется в каждый момент времени t_j определить несмещенную линейную оценку $\tilde{x}_j$ вектора состояния x_j

системы (D13.1), учитывающую *весь* массив измерений $z_0, z_1, \dots, z_N$ на интервале решения задачи $[t_0, t_N]$. В качестве критерия оптимальности рассматривается критерий ортогональности. Такая задача носит название задачи сглаживания на фиксированном интервале.

В настоящее время, по-видимому, наиболее конструктивным для численной реализации алгоритмов сглаживания на фиксированном интервале является подход, согласно которому в процедуре определения оптимальной сглаженной оценки $\tilde{x}_j$ используются два независимых алгоритма: стандартный фильтр Калмана (прямой фильтр) и так называемый обратный фильтр – фильтр в обратном времени. Каждый фильтр использует свой набор измерительной информации: прямой фильтр Калмана использует «прошлые» и «настоящие» измерения $\{z_0, \dots, z_{j-1}, z_j\}$, обратный фильтр – «будущие» измерения $\{z_{j+1}, \dots, z_N\}$.

1. Сглаживающий субоптимальный фильтр Калмана на фиксированном интервале.

Выделяются три этапа вычисления оптимальной сглаженной оценки.

а) Прямой фильтр Калмана определяет текущую оценку:

$$\tilde{x}_j^+ = M[x_j/z_0, \dots, z_j].$$

б) С помощью обратного фильтра, описываемого ниже, определяется оценка

$$\tilde{x}_{bj}^- = M[x_j/z_{j+1}, \dots, z_N]$$

в) Искомая оптимальная сглаженная оценка $\tilde{x}_j$ определяется в результате «склейки» независимо полученных оценок $\tilde{x}_j^+$ и $\tilde{x}_{bj}^-$.

Опишем эти алгоритмы.

Прямой фильтр Калмана. Алгоритмы численной реализации фильтра Калмана приведены выше и здесь опускаются.

Обратный фильтр. В процессе вычислений, осуществляемых обратным фильтром, определяется оценка $\tilde{y}_{bj}^-$ вспомогательной величины, связанной с оценкой $\tilde{x}_{bj}^-$ исходного вектора состояния соотношением

$$\tilde{y}_{bj}^- = P_{bj}^{-1} \tilde{x}_{bj}^-.$$

Здесь P_{bj} – ковариационная матрица ошибки оценки обратного фильтра.

В алгоритме выделяются следующие функциональные блоки: инициализация стартовой точки; этап коррекции; этап прогноза оценок между измерениями.

2. Субоптимальный алгоритм сглаживания.

Опыт непосредственного применения алгоритма оптимального сглаживания показывает, что точная численная реализация обратного фильтра и процедуры «склейки» оценок является плохо обусловленной и может приводить к неустойчивым вычислениям.

В приложениях хорошо зарекомендовал себя подход, когда вместо точного оптимального алгоритма, используется субоптимальный алгоритм сглаживания. Его «субоптимальность» по сути, заключается только в иной инициализации ковариационной матрицы P_{bN}^- обратного фильтра:

$$(P_{bN}^-)^{-1} = 0.$$

Используется следующая ее аппроксимация:

$$P_{bN}^- = \varepsilon \cdot E, \quad \text{где } \varepsilon \gg 1.$$

Далее для обратного фильтра задача оценивания записывается в обратном времени, при этом ее модель имеет обычную калмановскую структуру.

Опишем численную реализацию субоптимального алгоритма.

а) *Инициализация граничной точки обратного фильтра:*

$$\tilde{x}_{bN}^- = 0,$$

$$P_{bN}^- = \varepsilon \cdot E, \quad \varepsilon - \text{большое число.}$$

б) *Этап коррекции:*

$$\tilde{x}_{bj}^+ = \tilde{x}_{bj}^- + K_{bj}[z_j - H_j \tilde{x}_{bj}^-],$$

$$P_{bj}^+ = [E - K_{bj} H_j] P_{bj}^-,$$

$$K_{bj} = P_{bj}^- H_j^T [H_j P_{bj}^- H_j^T + R_j]^{-1}.$$

Эти соотношения в точности совпадают с соотношениями этапа коррекции фильтра Калмана в прямом времени.

в) *Этап прогноза:*

$$\tilde{x}_{b,j-1}^- = \Phi_{j,j-1}^{-1} \tilde{x}_{bj}^+,$$

$$\begin{aligned} P_{bj}^- &= \Phi_{j,j-1}^{-1} [P_{bj}^+ + Q_{j-1}] \Phi_{j,j-1}^{-T}, \\ \Phi_{j,j-1}^{-T} &= [\Phi_{j,j-1}^{-1}]^T. \end{aligned} \quad (\text{D13.3})$$

Соотношения (D13.3) структурно совпадают с уравнениями этапа прогноза прямого фильтра Калмана. Выделим отличие: в (D13.3) фигурирует обратная переходная матрица Φ^{-1} , в отличие от прямой переходной матрицы Φ в обычном фильтре Калмана. Матрица Φ^{-1} может быть определена при наличии соответствующей непрерывной модели линейной системы

$$\dot{x} = Ax,$$

например, следующим образом:

$$\Phi^{-1} = E - \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2} A^2.$$

Склею можно осуществить, используя следующие два равноценных подхода.

Подход 1. Рассмотрим вспомогательную задачу: требуется построить оценку $\tilde{x}$ вектора x и определить ковариацию $P_{\Delta x}$ ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$, если заданы два векторных измерения:

$$z_I = x + r_I \quad \text{и} \quad z_{II} = x + r_{II},$$

где

$$\begin{aligned} M[r_I] &= 0, \quad M[r_{II}] = 0, \quad M[r_I r_I^\top] = R_I, \\ M[r_{II} r_{II}^\top] &= R_{II}, \quad M[r_I r_{II}^\top] = 0. \end{aligned}$$

Оценка строится как линейная, несмещенная и удовлетворяющая критерию ортогональности.

$$\tilde{x} = K_I z_I + K_{II} z_{II}.$$

Условие несмещенности приводит к равенству

$$K_I + K_{II} = E,$$

при этом

$$\begin{aligned} \Delta x &= -K_I r_I - K_{II} r_{II}, \\ \overset{\circ}{z}_I &= \Delta x + r_I, \\ \overset{\circ}{z}_{II} &= \Delta x + r_{II}. \end{aligned}$$

Условия ортогональности:

$$M[\Delta x \overset{\circ}{z}_I^\top] = 0, \quad M[\Delta x \overset{\circ}{z}_{II}^\top] = 0.$$

Отсюда следует

$$P_{\Delta x} = K_I R_I, \quad P_{\Delta x} = K_{II} R_{II}$$

или

$$K_I = P_{\Delta x} R_I^{-1}, \quad K_{II} = P_{\Delta x} R_{II}^{-1}.$$

Из условия несмещенности получаем:

$$P_{\Delta x} = (R_I^{-1} + R_{II}^{-1})^{-1}.$$

В нашем случае

$$z_I = \tilde{x}_j^+, \quad R_I = P_j^+, \quad z_{II} = \tilde{x}_{jb}^-, \quad R_{II} = P_{jb}^-.$$

Окончательный результат склейки таков:

$$\tilde{x}_j^N = K_j \tilde{x}_j + K_{jb} \tilde{x}_{jb}^-,$$

где

$$\begin{aligned} K_j &= P_j^N (P_j^+)^{-1}, \\ K_{jb} &= P_j^N (P_{jb}^-)^{-1}, \\ P_j^N &= (P_j^+)^{-1} + (P_{jb}^-)^{-1}. \end{aligned}$$

Подход 2. Рассмотрим вспомогательную задачу: оценить вектор x по измерению $z = x + r$, $M[r] = 0$, $M[rr^\top] = R$, если известна априорная информация о векторе x :

$$\mu_x = M[x], \quad P_x = M[(x - \mu_x)(x - \mu_x)^\top].$$

На основании ранее полученного, имеем соотношения:

$$\tilde{x} = \mu_x + K(z - \mu_x),$$

где

$$K = P_x (P_x + R)^{-1}, \quad P_{\Delta x} = P_x - K P_x.$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \tilde{x}_j^+, & P_x &= P_j^+, & z &= \tilde{x}_{jb}^-, \\ R &= P_{jb}^-, & P_{\Delta x} &= P_j^N, & \tilde{x} &= \tilde{x}_j^N. \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^N &= \tilde{x}_j^+ + K(\tilde{x}_{jb}^- - \tilde{x}_j^+), \\ K_j &= P_j^+ (P_j^+ + P_{jb}^-)^{-1}. \end{aligned}$$

Полученные соотношения эквивалентны соотношениям, полученным при первом подходе, что проверяется непосредственно.

Например, величина $(P_j^N)^{-1}$, полученная при первом подходе, умноженная на P_j^N при втором подходе, равна единичной матрице.

Дополнение 1 к лекции 14. Меры оцениваемости

Задача оценивания вектора состояния линейной динамической системы при помощи доставляемой измерителями информации неизбежно порождает вопрос о том, может ли такая задача быть принципиально решена. Ответ на этот вопрос дает теория наблюдаемости, позволяющая выделить наблюдаемое подпространство. Но практически важно знать не только наблюдаема ли некоторая комбинация компонент вектора состояния, но и хорошо ли она наблюдаема (или оцениваема). Конечно, если задача оценивания сформулирована как задача калмановской фильтрации, то точность оценки полностью определяется решением соответствующего ковариационного уравнения.

Однако из этого решения напрямую не ясно, какую роль в обеспечении этой точности сыграли измерения, а какую — априорная информация о системе и ее динамические свойства.

Со многих точек зрения целесообразно строить отдельно алгоритмы для тех переменных состояния, которые могут быть оценены с удовлетворительной точностью именно при помощи информации, доставляемой измерителями. Другими словами, нужны математически формализованные характеристики, определяющие меры оцениваемости переменных задачи.

Вопрос о конструктивном введении такой характеристики не является однозначным. В полном виде она должна учитывать по крайней мере четыре обстоятельства:

- внутренние свойства системы — свойства пары (A, H) ;
- диапазон изменения переменных на интервале оценивания;
- время наблюдения (оценивания);
- уровень шумов в измерениях.

Ниже рассматриваются некоторые из таких характеристик.

1. Сингулярные числа как меры оцениваемости.

Обсудим еще одну модификацию алгоритма, доставляющего оценку по методу наименьших квадратов вектору x в виде решения переопределенной системы

$$z = Hx + r, \quad M[r] = 0, \quad M[rr^T] = \sigma^2 E. \quad (D14.1)$$

Вычислительная процедура, составляющая основу этой модификации, в отличие от рекуррентной процедуры, в которой уточнение оценки происходит от измерения к измерению, имеет дело с полным массивом измерений с самого ее начала. Важным достоинством рассматриваемой модификации является получение некоторых положительных чисел, имеющих смысл мер оцениваемости.

Вернемся к методу наименьших квадратов. Решение переопределенной системы (D14.1) в соответствии с этим методом ищем как решение, минимизирующее функционал $J(x)$:

$$J(x) = \|Hx - z\|^2 = (Hx - z)^T (Hx - z). \quad (D14.2)$$

Известно, что любая матрица $H(m \times n)$ ранга k представима в виде сингулярного разложения

$$H = USV^T.$$

Здесь $U(m \times m)$, $V(n \times n)$ — ортогональные матрицы,

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} S_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_k = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_k), \\ s_1 &\geq s_2 \geq \dots \geq s_k > 0. \end{aligned} \quad (D14.3)$$

Величины s_j ($j = 1, \dots, k$) называются **сингулярными числами** и определяются следующим образом:

$$s_j = \sqrt{\lambda_j},$$

где λ_j — корни характеристического уравнения матрицы $H^\top H$. Очевидно, если H максимального ранга, то $\lambda_j > 0$. Далее будем предполагать, что это условие выполнено и матрица S такова:

$$S = \begin{pmatrix} S_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем невырожденные ортогональные замены. Пусть y — новый вектор состояния, g — новый вектор измерения:

$$y = V^T x, \quad g = U^T z.$$

Представим вектор g в виде

$$g = \begin{pmatrix} g_I \\ g_{II} \end{pmatrix}, \quad \text{где } g_I (n \times 1), \quad g_{II} (m - n) \times 1.$$

Вследствие ортогональности использованных преобразований очевидно, что

$$\min_x \|Hx - z\|^2 = \min_y \|Sy - g\|^2.$$

Согласно (D14.3)

$$\|Sy - g\|^2 = \|S_n y - g_I\|^2 + \|g_{II}\|^2, \\ S_n y = g_{II}.$$

Оценка y имеет вид:

$$\tilde{y} = S_I^{-1} g_I, \tag{D14.4}$$

или, в скалярной форме,

$$\tilde{y}_j = \frac{g_j}{s_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{D14.5}$$

Найдем ошибку оценки. Имеем

$$g = S_n y + r', \quad r' = U^T r, \quad M[r' r'^T] = \sigma^2 E.$$

Из (D14.5) следует:

$$\Delta y_j = y_j - \tilde{y}_j = -\frac{r'_j}{s_j}, \quad M[\Delta y^2] = \frac{\sigma^2}{s_j^2}.$$

Ошибка оценки величины y , порожденная погрешностью информации о векторе g , усиливается с коэффициентом усиления $1/s_j$ и, стало быть, число сингулярности может служить количественной мерой оцениваемости.

Если сингулярное число мало, то часто оказывается целесообразным в качестве оценки соответствующей переменной принять нуль и тем самым понизить порядок оцениваемого вектора. Понижение порядка оцениваемого вектора называется *редукцией*.

Приведем без доказательства две важные для приложений теоремы. Из них во-первых, ясно, что сингулярные числа устойчивы к возмущениям матрицы H , т.е. малые изменения элементов матрицы H приводят к малым изменениям чисел s_j , и во-вторых, они обосновывают процедуру редукции.

Теорема 34. Пусть A, B, Γ — матрицы размерности $(m \times n)$ и $m \geq n$, $\Gamma = A - B$. Обозначим сингулярные числа этих матриц, упорядоченные по невозрастанию, соответственно через $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$. Тогда

$$|\beta_j - \alpha_j| \geq \gamma_j.$$

Теорема 35. Пусть A — матрица размерности $(m \times n)$ и B — матрица размерности $(m \times (n - 1))$, полученная из A вычеркиванием n -го столбца. Если занумеровать сингулярные числа матрицы B в порядке невозрастания, то они будут разделять сингулярные числа α_j матрицы A следующим образом:

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \alpha_{n-1} \geq \beta_{n-1} \geq \alpha_n \geq 0.$$

2. Стохастическая мера оцениваемости.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ — случайный вектор с априорным математическим ожиданием μ_x и ковариацией P_x , $\{Z\}$ — совокупность измерений, коррелированных с x , $\tilde{x}$ — оценка вектора x , доставляемая алгоритмом L :

$$\tilde{x} = L[\{Z\}].$$

Стохастическая мера оцениваемости μ_α скалярной величины $\alpha = c^T x$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ определяется соотношением

$$\mu_\alpha = \frac{\sigma_\alpha - \sigma_{\Delta\alpha}}{\sigma_\alpha} = 1 - \frac{\sigma_{\Delta\alpha}}{\sigma_\alpha} = 1 - \sqrt{\frac{c^T P_{\Delta x} c}{c^T P_x c}}, \quad 0 \leq \mu_\alpha \leq 1, \tag{D14.6}$$

где $P_{\Delta x}$ — ковариация ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$.

Мера оцениваемости характеризует относительное изменение среднеквадратичного отклонения $\sigma_{\Delta\alpha}$ ошибки оценки $\Delta\alpha$ переменной α при ее оценивании посредством алгоритма L .

Для приложений важна задача выделения переменных с малыми мерами (если они существуют), которая ставится как задача отыскания стационарных (экстремальных) значений мер в зависимости от направления, определяемого вектором c :

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial c} = 0. \quad (D14.7)$$

Из (D14.6) следует, что указанная задача эквивалентна хорошо известной задаче приведения одним преобразованием двух квадратичных форм к диагональному виду. Ее решение сводится к отысканию собственных чисел λ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, и собственной матрицы $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n)$ регулярного пучка квадратичных форм $P_{\Delta x} - \lambda P_x$.

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |P_{\Delta x} - \lambda P_x| &= 0, & P_{\Delta x} \Psi^j &= \lambda_j P_x \Psi^j, \\ \Psi^\top P_x \Psi &= E, & \Psi^\top P_{\Delta x} \Psi &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned} \quad (D14.8)$$

Преобразование $y = \Psi \varepsilon$ приводит квадратичные формы $C^\top P_x C$ и $C^\top P_{\Delta x} C$ соответственно к виду $\sum \varepsilon_j^2$ и $\sum \lambda_j \varepsilon_j^2$.

Стационарные значения мер определяются соотношениями

$$\mu_j = 1 - \sqrt{\lambda_j}. \quad (D14.9)$$

Рассмотрим определение мер оцениваемости в задаче оптимальной калмановской фильтрации.

Непрерывный фильтр Калмана. Матрицы P_x и $P_{\Delta x}$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= AP_x + P_x A + Q, \\ \dot{P}_{\Delta x} &= AP_{\Delta x} + P_{\Delta x} A + Q - P_{\Delta x} H^\top R^{-1} H P_{\Delta x}, \\ P_x(t_0) &= P_{\Delta x}(t_0). \end{aligned}$$

Дискретный фильтр Калмана. Матрицы P_x и $P_{\Delta x}$ находятся из уравнений

$$\begin{aligned} P_x(j+1) &= \Phi(j) P_x(j) \Phi^\top(j) + Q(j), \\ P_{\Delta x}^+(j) &= [E - K(j) H(j)] P_{\Delta x}^-(j), \\ K(j) &= P_{\Delta x}^-(j) H^\top(j) [H(j) P_{\Delta x}^-(j) H^\top(j) + R(j)]^{-1}, \\ P_{\Delta x}^-(j+1) &= \Phi(j) P_{\Delta x}^+(j) \Phi^\top(j) + Q(j). \end{aligned} \quad (D14.10)$$

Для вычисления меры в момент j следует положить $P_{\Delta x}(j) = P_{\Delta x}^+(j)$.

Знание стохастических мер позволяет понять, насколько велик вклад измерений в оценку тех или иных комбинаций вектора x . В частности, для линейных комбинаций $c^\top x$ с малыми мерами может оказаться целесообразной замена их оценок на априорные значения, т.е. сведение задачи оценивания к меньшей размерности.

Стохастическая мера оцениваемости показывает, в какой степени измерения z позволяют улучшить знание компонент вектора состояния $x(t)$, и она является инструментом для выделения комбинаций переменных с малыми мерами и возможной последующей редукции задачи. Но между мерой оцениваемости какой-либо переменной и ее наблюдаемостью нет прямой зависимости. Из условия «мера равна 1» не следует, вообще говоря, что соответствующая переменная наблюдаема.

Пример.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1, & \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \\ z &= x_1 + r, & M[r(t)r(s)] &= \delta(t-s). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_{x_1}(t)$ и $\sigma_{x_2}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, а $\sigma_{\Delta x_1}(t)$, $\sigma_{\Delta x_2}(t)$ ограничены. Отсюда, в частности, следует, что мера $\mu_{x_2}(t)$ очевидно ненаблюдаемой переменной x_2 стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$.

Замечание. При $Q = 0$ и $R = E$ уравнение для матрицы, обратной к ковариационной, $P_{\Delta x}^{-1} = \mathcal{N}^*$, в алгоритме калмановской фильтрации то же, что и для грамиана наблюдаемости $\mathcal{N}$:

$$\dot{\mathcal{N}}^* = -A^\top \mathcal{N}^* - \mathcal{N}^* A + H^\top H.$$

Отличие в начальных условиях

$$\mathcal{N}(t_0) = 0, \quad \mathcal{N}^*(t_0) = P_{\Delta x}(t_0)^{-1}.$$

Как уже говорилось выше, априорная информация о начальном состоянии вектора x может интерпретироваться как дополнительное разовое измерение. В этом случае характеристические числа матрицы $\mathcal{N}^*(t)$ более полно отражают возможность определения $x(t)$, чем соответствующие характеристические числа матрицы $\mathcal{N}(t)$.

Дополнение к лекциям 13–14. Оценивание вектора состояния как решение задачи коррекции

Изложенный выше материал служит основой для построения алгоритмов приборных комплексов широкого класса. К таким комплексам, в частности, относятся навигационные системы самолетов, крылатых ракет, надводных и подводных морских судов, дефектоскопов в газовых и нефтяных трубопроводах.

В авиагравиметрии подобные системы доставляют информацию для построения карт аномальных гравитационных полей, используемых при разведке полезных ископаемых. указанные комплексы используются при строительстве автомобильных и железных дорог.

Ниже, в самом общем виде излагается соответствующая математическая теория.

Прежде чем обратиться к этой теории советуем перечитать первую лекцию настоящего курса.

Пусть поведение динамического объекта подчиняется уравнениям

$$\dot{X} = F(X, V), \quad x(t_0) = X_0. \quad (D14.11)$$

Здесь $X(t)$ — вектор состояния динамической системы; $V(t)$ — действующее на объект управления или внешние возмущения; F — известная вектор-функция.

Ставится задача определения (построения оценки) вектора состояния X . Исходной информацией для решения этой задачи служат величины

$$V'(t) = V(t) + v(t), \quad X'(t_0) = X'_0 = X(t_0) + x_0,$$

где t_0 — начальный момент, t — текущее время, $v(t)$, x_0 — погрешность исходной информации. Эта информация доставляется соответствующими измерителями (датчиками).

Назовем модельными уравнения, которым подчиняется поведение системы, решающей задачу оценивания. В качестве модельных уравнений естественно выбрать уравнения, которые структурно совпадают с уравнениями, описывающими поведение объекта. В этом смысле уравнения объекта (D14.11) назовем опорными.

Итак, модельные уравнения имеют вид

$$\dot{X}' = F(X', V'), \quad X'(t_0) = X'_0. \quad (D14.12)$$

Модельную систему следует рассматривать, как числовой образ (модель) реальной системы. Очевидно, при $x_0 = 0$ и $v(t) = 0$ обе системы информационно неразличимы.

Обозначим вектор $x(t) = X'(t) - X(t)$ и назовем его вектором ошибок. Поведение $x(t)$ подчиняется уравнению

$$\dot{x}(t) = F(X + x, V + v) - F(X, V). \quad (D14.13)$$

Величины $v(t)$ и x_0 полагаются малыми настолько, что уравнение (D14.13) может быть линеаризовано. Получим

$$\dot{x} = A(t)x(t) + q(t), \quad (D14.14)$$

где

$$A(t) = \left. \frac{\partial F(X, V)}{\partial X} \right|_{\substack{X=X' \\ V=V'}}, \\ q(t) = \left(\left. \frac{\partial F(X, V)}{\partial V} \right|_{\substack{X=X' \\ V=V'}} \right) \cdot v.$$

А теперь рассмотрим ситуацию, когда помимо информации X'_0 , V' привлекается информация непосредственно о векторе состояния объекта. Эта информация составляет вектор

$$Z(t) = \Theta(X) + r,$$

где Θ — известная функция, r — погрешность информации.

Далее условно информацию X'_0 , V' будем называть основной, информацию $Z(t)$ — дополнительной. В совокупности основная и дополнительная информация избыточны, в том смысле, что если бы она была идеальна, т.е. $x_0 = 0$, $v(t) = 0$, $r(t) = 0$, то вектор состояния можно было бы определить неоднозначным образом.

Избыточность информации позволяет поставить задачу ее оптимальной обработки, минимизирующей влияние погрешностей информации на точность определения вектора состояния X . Обычно используется один из двух алгоритмов решения такой задачи. Опишем сначала первый из них.

Основная информация служит входом для системы, модельные уравнения которой (D14.12) описаны выше. Дополнительная информация используется как средство коррекции, минимизирующее в том или ином смысле ошибку $x = X' - X$ в определении вектора состояния X при помощи только основной информации.

Структура алгоритма коррекции такова: путем линеаризации в окрестности модельной траектории образуется вектор коррекции

$$z(t) = Z - \Theta(X') = H(t)x + r(t),$$

$$H(t) = -\frac{d\Theta}{dX} \Big|_{X=X'}. \quad (\text{D14.15})$$

Соотношения (D14.14), (D14.15) позволяют построить оценку $\tilde{x} = L[z]$, минимизирующую в том или ином смысле ошибку оценки $\Delta x = x' - x$

Окончательная оценка вектора X определяется из соотношения $\tilde{X} = X' - \tilde{x}$, откуда следует, что выходная ошибка оказывается равной величине Δx .

Оператор (алгоритм) L здесь полностью определяется математическими моделями инструментальных погрешностей v, r измерителей, доставляющих совокупную исходную информацию. Выбор указанных математических моделей — самая главная и самая трудная задача при построении системы, определяющей вектор состояния X . Наиболее пригодным к выбору модели погрешностей оказывается феноменологический подход. В соответствии с им модель погрешностей выбирается из здравого смысла, интуиции и ее опробования при стендовых и натурных испытаниях. Такие модели, в частности, не фиксируют, какой конкретный усилитель имеет ту или иную погрешность, или какой редуктор работает не идеально. Обратим внимание, что при выборе модели погрешностей происходит смещение понятий. Мы уже не спрашиваем истинна или не истинна та или иная модель, а взамен фиксируем ее пригодность или непригодность. Обычно полагается, что математические модели таковы, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \Gamma_0 \varkappa^1 + \zeta^0, \\ \dot{\varkappa}^1 &= \Gamma_1 \varkappa^1 + \zeta^1, \\ \dot{\varkappa}^2 &= \Gamma_2 \varkappa^2 + \zeta^2, \\ z &= Hx + H_\varkappa \varkappa^2 + \varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{D14.16})$$

Предполагается, что величины Γ_i , $i = 0, 1, 2$ — известные функции времени; величины ζ^i и ε — белые шумы с заданными интенсивностями.

В более компактной форме

$$\dot{\xi} = A_\xi \xi + \zeta, \quad z = H_\xi \xi + \varepsilon, \quad (\text{D14.17})$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ \varkappa^1 \\ \varkappa^2 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^0 \\ \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \quad A_\xi = \begin{pmatrix} A & \Gamma_0 & 0 \\ 0 & \Gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix},$$

$$H_\xi = (H \ 0 \ H_\varkappa).$$

В соответствии с полученной структурой уравнений, оптимальная оценка получается, как результат применения калмановской фильтрации. В данном случае алгоритм оценивания (далее используется только непрерывная его форма) описывается соотношениями

$$\dot{\tilde{\xi}} = A_\xi \tilde{\xi} + K(z - H_\xi \tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi}(t_0) = \tilde{\xi}_0. \quad (\text{D14.18})$$

В развернутом виде

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \Gamma_0 \tilde{\varkappa}^1 + K_0(z - H\tilde{x} - H_\varkappa \tilde{\varkappa}^2), \\ \dot{\tilde{\varkappa}}^1 &= \Gamma_1 \tilde{\varkappa}^1 + K_1(z - H\tilde{x} - H_\varkappa \tilde{\varkappa}^2), \\ \dot{\tilde{\varkappa}}^2 &= \Gamma_2 \tilde{\varkappa}^2 + K_2(z - H\tilde{x} - H_\varkappa \tilde{\varkappa}^2). \end{aligned} \quad (\text{D14.19})$$

В этих соотношениях матрицы K_j в соответствии с процедурой Калмановской фильтрации находятся из решения ковариационных уравнений, которые здесь не приводятся.

Введем ошибки оценивания

$$\Delta x = x - \tilde{x}, \quad \Delta \varkappa^1 = \varkappa^1 - \tilde{\varkappa}^1, \quad \Delta \varkappa^2 = \varkappa^2 - \tilde{\varkappa}^2.$$

Уравнения, которым подчиняется поведение этих величин называются уравнениями ошибок оценки. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= A\Delta x + \Gamma_0 \Delta \varkappa^1 - K_0(H\Delta x + H_\varkappa \Delta \varkappa^2) - K_0\varepsilon + \zeta^0, \\ \Delta \dot{\varkappa}^1 &= \Gamma_1 \Delta \varkappa^1 - K_1(H\Delta x + H_\varkappa \Delta \varkappa^2) - K_1\varepsilon + \zeta^1, \\ \Delta \dot{\varkappa}^2 &= \Gamma_2 \Delta \varkappa^2 - K_2(H\Delta x + H_\varkappa \Delta \varkappa^2) - K_2\varepsilon + \zeta^2. \end{aligned} \quad (\text{D14.20})$$

Оценка величины X определяется соотношением

$$\tilde{X} = X' - \tilde{x} = X + \Delta x.$$

Структурно оценку состояния X можно строить различными эквивалентными способами. Но очевидно, что никакие внутренние связи, введенные в алгоритм оценивания не могут повысить точность определения вектора состояния по сравнению с только что описанным способом, в котором матрицы K_j , $j = 0, 1, 2$ выбираются по правилам калмановской фильтрации.

Замечание. На практике часто используется более простая модель инструментальных погрешностей

$$\begin{aligned} q &= c^\top + q_s, \\ r &= d^\top \varepsilon + r_s, \end{aligned}$$

где c и d — известные векторные функции времени; q_s и r_s — белые шумы с заданными интенсивностями; $\varkappa$ и ε — постоянные векторы, т.е.

$$\dot{\varkappa} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\varepsilon} = 0.$$

Точность решения задачи коррекции определяют известные соотношения, описывающие поведение ковариационной матрицы $P_{\Delta\xi} = M[\Delta\xi\Delta\xi^\top]$, где $\Delta\xi = \xi - \tilde{\xi}$. Исследование поведения матрицы $P_{\Delta\xi}$ в зависимости от поведения матриц $A(t), H(t), Q(t), R(t)$ составляет содержание того, что называется ковариационным анализом.

Такой анализ предполагает задание начального значения указанной матрицы, определяемой априорной информацией о параметрах инструментальных погрешностей. В частности, информацией для такого задания служат паспортные данные на прибор, а также предшествующий опыт. В определенном смысле начальные значения можно интерпретировать, как результат разовых измерений, равноправных с текущими измерениями. В этом смысле все оцениваемые переменные вполне наблюдаемы.

Подчеркнем, что ковариационный анализ служит основным средством при построении алгоритмов оптимального оценивания. При этом формальный анализ наблюдаемости играет вспомогательную не обязательную роль, поскольку не отвечает на главный вопрос о точности решения задачи коррекции.

Еще одно важное замечание касается задания интенсивности белых шумов. Обычно эти интенсивности известны априорно грубо, с другой стороны возможны ситуации, когда измерения заведомо точны и тогда матрицы интенсивности вырождены. Во всех случаях матрицы интенсивности выбираются таким образом, чтобы, с одной стороны они были более или менее правдоподобны, а с другой — обеспечивали устойчивое функционирование фильтра Калмана. Оказывается целесообразным введение в эти матрицы малых добавок, что эквивалентно наличию некоторых фиктивных шумов. Процедура варьирования матрицы интенсивности для придания устойчивости процессу фильтрации называется регуляризацией. Процедура регуляризации — скорее искусство, чем строгая логика.

Далее рассмотрим второй важный вариант построения алгоритма оценивания, информационно эквивалентный первому.

Его будем называть алгоритмом с введением обратных связей. Исходная информация здесь та же, что и ранее

$$X'_0 = X_0 + x_0, \quad V'(t) = V(t) + v(t), \quad Z^*(t) = \Theta(x(t)) + r(t).$$

Алгоритм с введением обратных связей описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{X}^* &= F(X^*, V') - K_0(z^* - H\tilde{x} - H_\varkappa\tilde{\varkappa}^2) - \Gamma_0\tilde{\varkappa}^1, \\ \dot{\tilde{\varkappa}}^1 &= \Gamma_1\tilde{\varkappa}^1 + K_1(z^* - H\tilde{x} - H_\varkappa\tilde{\varkappa}^2), \\ \dot{\tilde{\varkappa}}^2 &= \Gamma_2\tilde{\varkappa}^2 + K_2(z^* - H\tilde{x} - H_\varkappa\tilde{\varkappa}^2), \\ z^* &= Z^* - \Theta(X^*) = Hx^* + H_\varkappa\tilde{\varkappa}^2 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{D14.21}$$

Поведение ошибки x^* вектора состояния ($x^* = X^* - X$) в данном алгоритме описывается уравнениями ошибок относительно величин $x^*, \Delta\tilde{\varkappa}^1, \Delta\tilde{\varkappa}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= Ax^* + \Gamma_0\Delta\tilde{\varkappa}^1 - K_0(Hx^* + H_\varkappa\Delta\tilde{\varkappa}^2) - K_0\varepsilon + \zeta^0, \\ \Delta\dot{\tilde{\varkappa}}^1 &= \Gamma_1\Delta\tilde{\varkappa}^1 - K_1(Hx^* + H_\varkappa\Delta\tilde{\varkappa}^2) - K_1\varepsilon + \zeta^1, \\ \Delta\dot{\tilde{\varkappa}}^2 &= \Gamma_2\Delta\tilde{\varkappa}^2 - K_2(Hx^* + H_\varkappa\Delta\tilde{\varkappa}^2) - K_2\varepsilon + \zeta^2. \end{aligned} \tag{D14.22}$$

Уравнения (D14.20) и (D14.22) структурно полностью совпадают, и при должном задании начальных условий дают одно и то же решение $x^*(t) = \Delta x(t)$.

Сравним алгоритм чистого оценивания с алгоритмом введения обратных связей. Прежде всего, второй алгоритм более экономичен, чем первый — число интегрирований уменьшается на величину вектора состояния. Но не это главное. такая экономия при современных возможностях бортовых компьютеров не существенна. Главное в том, что второй алгоритм делает более обоснованной линеаризацию при выводе уравнений ошибок.

С другой стороны, первый алгоритм позволяет строить алгоритм определения вектора состояния в виде двух алгоритмов. Первый доставляет оценку X' как результат использования только основной информации. Второй может рассматриваться, как алгоритм коррекции первого при помощи дополнительной информации. Такая декомпозиция и более удобна, и, в некотором смысле, обеспечивает большую надежность.

Дополнение 1 к лекции 25. Регулярный синтез по Болтянскому

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), & y(t_0) = y^*, & t \in [t_0, t_k], \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in PC \mid u(t) \in \Omega \subset R^s\}, \\ y(t_k) \in M \subset R^n, \end{cases} \quad (D25.1)$$

где требуется минимизировать следующий функционал качества управления

$$J(u) = \varphi_0(y(t_k)) + \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, u) dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Считаем, что решение задачи существует. Тогда верна теорема о достаточных условиях оптимальности

Теорема 36. *Управляемый процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot), [t_0, t_k^0]\}$, удовлетворяющий принципу максимума, является оптимальным, если выполняются шесть условий регулярного синтеза по В.Г. Болтянскому.*

Приведем формулировку условий регулярного синтеза для случая, когда размерность пространства состояний системы равна $n = 2$.

Синтез оптимального управления осуществлен, если оптимальное управление построено как функция фазовых координат $u^0 = u^0(y)$.

Условие 1. Пусть $G \subset R^2$ открытая область управляемости и справедливы утверждения:

- а) терминальное множество M — гладкое многообразие (гладкая кривая или точка);
- б) множество N — особое множество, размерности $s \leq 1$;
- в) множества P_0, P_1, P_2 — кусочно-гладкие множества, замкнутые в G и не имеющие общих точек с M и N . Множество P_0 представляет нульмерные клетки, множество P_1 — кусочно-гладкие линии, одномерные клетки, а множество $P_2 = G \setminus (M \cup N \cup P_0 \cup P_1)$ — двумерные клетки;

Условие 2. Все клетки разбиваются на два типа. Клетки P_0 всегда являются клетками второго типа, а клетки P_2 — клетками первого типа. Клетки P_1 могут быть как первого, так и второго типа.

Условие 3. Через каждую точку клетки 1-го типа σ проходит единственная траектория, которая через конечное время покидает клетку, упираясь в клетку меньшей размерности, т.е. существует управление $u^0(y)$ гладкое, и траектория $\dot{y}^0 = f(y^0, u^0(y^0))$, покидающая за конечное время эту клетку и попадающая в клетку $\pi(\sigma)$ второго типа (под ненулевым углом, если σ двумерная).

Если σ — клетка 2-го типа, то для любой ее точки существует клетка 1-го типа $\Sigma(\sigma)$ большей на 1 размерности, примыкающая к σ . Существует гладкое управление $u(y)$ на $\sigma \cup \Sigma(\sigma)$ и траектория, начинающаяся в σ и проходящая через $\Sigma(\sigma)$.

Условие 4. Из условий 1–3 следует, что можно продолжать траекторию из клетки в клетку, пройдя конечное число клеток и попадая на терминальное многообразие M . Такая траектория называется отмеченной траекторией.

Условие 5. Отмеченные траектории удовлетворяют принципу максимума Понтрягина.

Условие 6. Функционал $J(u)$, вычисленный вдоль отмеченной траектории, непрерывно зависит от начальных условий.

Используя условия теоремы В.Г. Болтянского можно осуществить синтез оптимального управления, доставляющего глобальный минимум функционалу качества.

Пример. **Задача о параметрическом резонансе колебаний математического маятника.**

Рассмотрим малые колебания математического маятника, у которого точка подвеса может перемещаться вертикально с ускорением u (см. рис. D25.1 а). Требуется раскатать колебания маятника.

Уравнения движения управляемой системы следующие:

$$\ddot{y} + uy = 0, \quad 0 < l \leq u(t) \leq m$$

Все решения системы колебательны (рис. D25.1 б), поэтому поставим задачу максимального увеличения амплитуды колебаний на полуколебании системы (рис. D25.1 в). Пусть выполнены граничные условия

$$y(t_0) = 1, \quad \dot{y}(t_0) = 0, \quad M = \{\dot{y}(t_k) = 0\} = \{\gamma_1, 0\}, \quad \gamma_1 > 0$$

для управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = -uy_1, \end{cases}$$

где функционал качества управления $\varphi_0(y(t_k)) = y_1(t_k) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} < 0$.

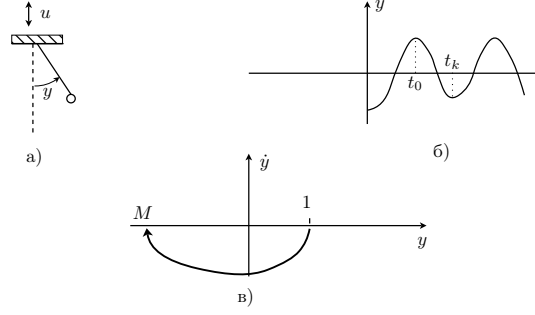


Рис. D25.1. Маятник с подвижной точкой подвеса

Выпишем функцию Понтрягина $H = \psi_1 y_2 + \psi_2(-u y_1)$ и сопряженную систему

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = u \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Следовательно $\ddot{\psi}_2 = -u \psi_2$, и рассматриваемая управляемая система является самосопряженной.

Из ПМП следует, что оптимальное управление имеет вид

$$u^0 = \begin{cases} m & \text{при } \psi_2 y_1 < 0 \\ l & \text{при } \psi_2 y_1 > 0 \end{cases}$$

Условие трансверсальности следует

$$\psi(t_k^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \perp M,$$

откуда $(\psi_1(t_k^0) + \lambda_0) \gamma_1 + \psi_2(t_k^0) \cdot 0 = 0$ и следовательно $\psi_1(t_k^0) = -\lambda_0 \leq 0$.

Докажем, что управление u^0 регулярно, т.е., ни на одном подинтервале $t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ не может быть выполнено $\psi_2(t) y_1(t) \equiv 0$.

Допустим противное. Условие $y_1(t) \equiv 0$ не может выполняться, иначе как $y_1(t)$, так и $y_2(t) \equiv 0$ на всем интервале, что противоречит начальным условиям.

Если $\psi_2(t) \equiv 0$, то и $\psi_1(t) \equiv 0$, откуда следует $\psi_1(\tilde{t}_2) = \psi_2(\tilde{t}_2) = 0$. Но тогда и на всем отрезке $t \in [\tilde{t}_2, t_k]$ выполнено $\psi(t) \equiv 0$. Аналогичное верно для левого интервала. Следовательно (λ_0, ψ) нулевая пара, что противоречит ПМП.

Рассмотрим условие стационарности гамильтониана $\mathcal{H}(t) \equiv 0$.

В конечный момент времени $y_2(t_k^0) = 0$, откуда $\psi_2(t_k^0) = 0$. Если $\lambda_0 = 0$, то $\psi_1(t_k^0) = 0$ и опять получаем нулевую пару.

Поэтому $\lambda_0 > 0$, и после нормировки можно считать $\lambda_0 = 1$. Тогда:

$$\dot{\psi}_2(t_k^0) = -\psi_1(t_k^0) = 1.$$

Отсюда следует, что в левой окрестности точки t_k^0 выполнено неравенство $\psi_2(t) < 0$. Но в этой окрестности $y_1(t) < 0$ (поскольку $y_1(t_k^0) = \alpha < 0$). Значит в этой окрестности выполнено условие $u^0(t) = l = \text{const}$ — оптимальное управление знак не меняет и можем проинтегрировать исходную

$$y_1(t) = C_1 \sin \sqrt{l}(t - t_k^0) + C_2 \cos \sqrt{l}(t - t_k^0), \quad \dot{y}_1(t_k^0) = 0 \implies$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\alpha < 0$$

и сопряженную системы

$$\psi_2(t) = C_3 \sin \sqrt{l}(t - t_k^0) + C_4 \cos \sqrt{l}(t - t_k^0), \quad \psi_2(t_k^0) = 0 \implies$$

$$C_4 = 0, C_3 = \frac{1}{\sqrt{l}} > 0.$$

Из вида решений следует, что выражение $\psi_2(t) y_1(t)$ меняет знак в момент времени $\tau - t_k^0 = -\frac{\pi}{2\sqrt{l}}$.

На отрезке времени $[t_0, \tau]$ решение системы продолжается с управлением $u^0(t) = m$.

Из краевого условия $y_1(t_0) = 1$, условия $\dot{y}_1(\tau) = -\alpha\sqrt{l}$ и гладкости y_1 в точке τ следует

$$t_0 - \tau = -\frac{\pi}{2\sqrt{m}} \quad t_k^0 - t_0 = \frac{\pi}{2\sqrt{l}} + \frac{\pi}{2\sqrt{m}},$$

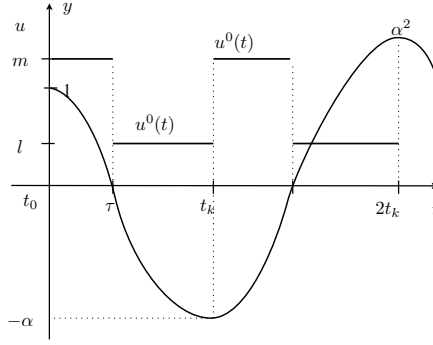


Рис. D25.2. Параметрический резонанс

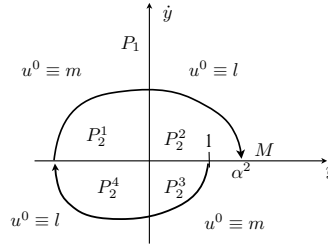


Рис. D25.3. Регулярный синтез

а $\alpha = \sqrt{\frac{m}{l}} > 1$ — возрастание амплитуды на одном полуколебании.

Если продолжить решение на следующих полуколебаниях системы аналогичным образом, то получим неограниченное возрастание амплитуды колебаний (см. рис. D25.2). В силу полученного решения верно соотношение $\text{sign } \psi_2 = \text{sign } y_2$, и можно осуществить синтез оптимального управления

$$u^0(y_1, y_2) = \begin{cases} l & \text{при } y_1 y_2 > 0 \\ m & \text{при } y_1 y_2 < 0. \end{cases}$$

Проверим условия регулярного синтеза Болтянского (см. рис. D25.3).

Множество $N = \{0\}$ — начало координат.

Область $G = R^2 \setminus \{0\}$.

Терминальное множество $M = \{y_2 = 0\}$ — ось абсцисс.

Множество нульмерных клеток $P_0 = \emptyset$ — пусто.

Множество одномерных клеток $P_1 = \{y_1 = 0\}$ — линия переключения, ось ординат.

Множество двумерных клеток P_2 — набор координатных четвертей.

Таким образом, в данной задаче выполнены условия регулярного синтеза и, следовательно, построено глобально-оптимальное решение.

Дополнение 2 к лекции 25. О достаточности принципа максимума в общем случае.

На лекции 25 было рассказано о достаточности принципа максимума Понтрягина (ПМП) для линейной задачи быстройдействия. В предыдущем приложении приведен результат В.Г. Болтянского о достаточности ПМП в форме синтеза, когда управление имеет конечное число переключений.

В 2003 году А.В. Арутюновым [9] была доказана теорема о ПМП как необходимом и достаточном условии минимума. Сформулируем эту теорему для задачи, когда математическая модель управляемой системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u), & y(t_0) = y^*, & t \in [t_0, t_k], & \text{где } y^*, t_k \text{ — заданы,} \\ u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty([t_0, t_k], R_s) \mid u(t) \in \Omega \subset R^s\}, \end{cases} \quad (\text{D25.2})$$

где Ω — ограниченное, замкнутое выпуклое и регулярное множество [9], а

$$y(t_k) \in M = \{\varphi_i = 0, \quad i = 1, \dots, m < n\}.$$

Критерий качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(y, u, t) dt + \varphi_0(y(t_k)) \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}.$$

Все функции являются гладкими по y, u и измеримыми по t .

Определение 23. Допустимый процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$ является понтрягинским локальным минимумом, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого допустимого управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, для которого

$$\|u^0(\cdot) - u(\cdot)\|_{\mathcal{L}_1} < \delta \quad \text{и} \quad |y^0(t_k) - y(t_k)| < \delta$$

выполняется неравенство $J(u(\cdot)) \geq J(u^0(\cdot))$.

Из определения следует, что в рассматриваемом нами случае управляемый процесс, являющийся сильным локальным минимумом (см. лекцию 23), является одновременно и понтрягинским локальным минимумом.

Функция Понтрягина имеет вид $H(\psi, y, u) = \psi^\top f(y, u) - \lambda_0 f_0(y, u, t)$, а лагранжиан — $L = \psi^\top \dot{y} - H$.

Теорема 37. Для того, чтобы допустимый управляемый процесс $\{y^0(\cdot), u^0(\cdot)\}$ являлся понтрягинским локальным минимумом, необходимо и достаточно существование ненулевого вектора $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ при $\lambda_0 \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ и абсолютно непрерывной вектор-функции $(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ таких, что выполнены следующие условия:

1. функция $\psi(t)$ является решением уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^0}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial L^0}{\partial y} = 0$$

или

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right)^\top \psi + \lambda_0 \left(\frac{f_0(y^0(t), u^0(t), t)}{\partial y} \right)^\top;$$

2. условие трансверсальности при $t = t_k$

$$\psi^\top(t_k) = - \sum_{j=0}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j(y^0(t_k))}{\partial y};$$

3. усиленное условие максимума по управлению

$$H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \geq H(\psi(t), y^0(t), u(t)) + \varepsilon |u^0(t) - u|^2$$

при всех $u \in \Omega$ и почти всюду по $t \in [t_0, t_k]$, где

$\varepsilon = 0$ при рассмотрении необходимости;

$\varepsilon > 0$ при рассмотрении достаточности.

Дополнение 1 к лекции 29. О смешанных стратегиях реализации игры

В том случае, когда седловой точки в игровой задаче методики тестирования не существует, можно перейти к так называемому смешанному расширению игры.

Процедуру перехода к смешанному расширению объясним в случае, когда рассматривается игра на конечном множестве стратегий управления и возмущения.

Обозначим $u_i = u_i(t) \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots, n$, а $v_j = v_j(t) \in V$, $j = 1, 2, \dots, m$ — конечный набор стратегий по управлению и возмущению в задаче стабилизации.

Перебирая все стратегии, можно составить матрицу

$$R = \begin{pmatrix} J(u_1, v_1) & J(u_2, v_1) & \dots & J(u_n, v_1) \\ J(u_1, v_2) & J(u_2, v_2) & \dots & J(u_n, v_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J(u_1, v_m) & J(u_2, v_m) & \dots & J(u_n, v_m) \end{pmatrix}$$

которая называется матрицей игры. Обозначим $R_{ij} = J(u_i, v_j)$ и вычислим $\varrho_0 = \max_j \min_i R_{ij}$ и $\varrho^0 = \min_i \max_j R_{ij}$. Если $\varrho_0 = \varrho^0$, то игра имеет седловую точку в чистых стратегиях u_i и v_j .

Пример 1. Игра против природы.

Пусть природа имеет два состояния: дождь и сухо. При прогулке в сухую погоду без плаща турист получает удовольствие в 10 баллов, а в плаще — 8 баллов. Прогулка под дождем в плаще приносит 7 баллов, а без плаща — 1 балл. Отказ от прогулки приносит 0 баллов. Таким образом у туриста 3 стратегии: 1) выйти без плаща; 2) выйти в плаще; 3) отказаться от прогулки.

В этой игре турист старается максимизировать выигрыш, а природа старается ему помешать, т.е. минимизировать. Матрица игры выглядит следующим образом

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 7 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой игре есть седловая точка: $\min_i \max_j R_{ij} = \max_j \min_i R_{ij} = 7$, соответствующая стратегии природы — «дождь» и стратегии туриста — «прогулка в плаще». И туристу и природе в этой игре невыгодно отклоняться от их оптимальных стратегий, при которых они получают гарантированный выигрыш в 7 баллов.

Пример 2. Приведем пример матричной игры, где не существует седловой точки:

Пусть стратегии управления $u_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4$, стратегии возмущения $v_j = j$, $j = 1, 2, 3, 4$, а функционал представляет расстояние между точками i, j , то есть $R_{ij} = J(u_i, v_j) = |i - j|$. Тогда матрица игры

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

В этой игре $\varrho^0 = \min_i \max_j R_{ij} = 2 > 0$, а $\varrho_0 = \max_j \min_i R_{ij} = 0$, то есть седловой точки не существует и следовательно не существует чистой максимальной оптимальной стратегии возмущений, (также и управлений) дающей гарантированный результат.

В случае, когда не существует седловой точки игры в чистых стратегиях, можно перейти к смешанному расширению игры, когда стратегии выбираются случайным образом. Рассмотрим векторы $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где $\sum_{i=1}^n \xi_i = 1$, $\xi_i \geq 0$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, где $\sum_{j=1}^m \eta_j = 1$, $\eta_j \geq 0$, которые имеют смысл вероятности выбора стратегии u_i и v_j соответственно. В качестве критерия игры теперь рассмотрим математическое ожидание исходного функционала

$$K(\xi, \eta) = M[J(u, v)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Можно записать $K(\xi, \eta) = (\eta^\top R) \xi = \eta^\top (R \xi)$. Стратегии ξ, η в расширенной игре называются **смешанными**.

В матричной игре можно считать $R_{ij} > 0$, поскольку если добавить положительную константу ко всем элементам матрицы R , то игра не меняется.

Теорема 38. *Всякая матричная игра имеет седловую точку в смешанных стратегиях.*

Доказательство.

С каждой расширенной игрой можно связать пару задач линейного программирования следующим образом.

Рассмотрим вектор $p = (1, 1, \dots, 1)^\top$ состоящий из n единиц и вектор $w = (1, 1, \dots, 1)^\top$ состоящий из m единиц.

Составим задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} \min_{\xi} \quad & p^\top \xi \\ & R \xi \leq w, \quad \xi \geq 0 \end{aligned} \tag{D29.3}$$

и двойственную к ней

$$\begin{aligned} \max_{\eta} \quad & w^\top \eta \\ & R^\top \eta \geq p, \quad \eta \geq 0. \end{aligned} \tag{D29.4}$$

Поскольку элементы матрицы $R_{ij} > 0$, то во второй задаче существует допустимое решение, если выбрать элементы вектора η достаточно большими.

В первой задаче решение $\xi = 0$ тоже является допустимым. В теории линейного программирования доказывается, что в этом случае существует решение первой и второй задачи, и они совпадают по функционалу. Обозначим это решение

$$\eta^\top w = \xi^\top p = r_0 > 0.$$

Произведем замену $\eta^* = \frac{\eta}{r_0} \geq 0$ и $\xi^* = \frac{\xi}{r_0} \geq 0$.

Тогда выполнены условия $\sum \eta_j^* = 1$ и $\sum \xi_i^* = 1$, следовательно η^*, ξ^* являются решением смешанной задачи.

Поскольку из (D29.3) следует неравенство $w \geq R \xi$, а из (D29.4) неравенство $\eta^\top R \geq p^\top$, то

$$r_0 = \eta^\top w \geq \eta^\top (R \xi) = (\eta^\top R) \xi \geq p^\top \xi = r_0,$$

откуда получим выражение $r_0 = \eta^\top R \xi$.

Вычислим теперь функционал смешанной задачи

$$K(\xi^*, \eta^*) = \eta^{*\top} R \xi^* = \frac{(\eta^\top R \xi)}{r_0^2} = \frac{1}{r_0}.$$

Обозначим ξ' и η' — произвольные смешанные стратегии управления и возмущения. Тогда выполнены неравенства

$$K(\xi', \eta^*) = \eta^{*\top} R \xi' = \frac{1}{r_0} \eta^\top R \xi' \geq \frac{1}{r_0} p^\top \xi' = \frac{1}{r_0} = K(\xi^*, \eta^*)$$

и

$$K(\xi^*, \eta') = \eta'^\top R \xi^* = \eta'^\top R \xi \frac{1}{r_0} \leq \eta'^\top w \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0} = K(\xi^*, \eta^*),$$

откуда следует существование седловой точки в смешанных стратегиях.

Замечание 25. Заметим, что в отличие от случая существования седловой точки в чистых стратегиях процедура тестирования усложняется, поскольку этап 2 надо проводить многократно, моделируя случайный выбор стратегии возмущений в соответствии с вероятностями, заданным вектором η^* .

Усложняется и третий этап процедуры, поскольку для получения объективной оценки качества управления надо вычислить статистические показатели (доверительные интервалы) оценки тестирования.

Переход к смешанному расширению игры возможен и в случае, когда оба игрока имеют бесконечное множество стратегий. Однако, в отличие от конечномерного случая, здесь седловая точка в смешанных стратегиях может не существовать. Даже сам средний выигрыш зависит от выбора вероятностных мер, связанных с множествами стратегий $\mathcal{U}$ и V .

Если множества стратегий $\mathcal{U}$ и V представляют собой метрические компакты, а функция выигрыша $J(u, v)$ непрерывна по совокупности переменных, то седловая точка (цена игры) для смешанного расширения игры существуют [28].

Более того, если цена игры выпукла по u для каждого $v \in V$, и множество стратегий $\mathcal{U}$ выпукло (заметим, что эти свойства выполняются для рассматриваемой в задаче тестирования дифференциальной игры, которая может быть редуцирована к геометрической игре, где функция выигрыша представляет расстояние между точками множеств достижимости подсистем по управлению и по возмущению), то выполнены следующие замечательные свойства структуры оптимального решения:

а) существует цена игры K_0 , равная

$$K_0 = \min_{u \in \mathcal{U}} \max_{v \in V} J(u, v);$$

б) оптимальное решение первого игрока u существует в чистых стратегиях;

в) спектр оптимальной смешанной стратегии второго игрока v конечен и состоит не более, чем из $n+1$ точки множества V .

Пример 3. Тестирование точности сближения космического модуля с орбитальной станцией.

Станция движется с постоянной скоростью по круговой орбите. Относительно нее в плоскости орбиты движется модуль, снабженный продольными (маршевыми) и боковыми реактивными двигателями. Программное движение модуля в задаче сближения реализуется с помощью маршевых двигателей и состоит из участка разгона, участка свободного движения с постоянной скоростью и участка торможения. Линеаризованные уравнения в отклонениях от программного движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = v_r(t), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -x_5 u^p(t), \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = M_r(t)/B_z. \end{cases} \quad (\text{D29.5})$$

Здесь $x = (x_1, x_3)^\top$ — отклонение от программной траектории в плоскости движения космического модуля, x_5 — отклонение по углу от программного движения, $u^p(t)$ — программное управление маршевыми двигателями (заданные функции времени), $u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_\infty[t_0, t_1] \mid |u(t)| \leq f, f = \text{const}\}$ — стабилизирующее боковое управления, $v_r(t)$ — ошибка тяги маршевых двигателей, $M_r(t)$ — возмущающий момент, связанный с разнотяговостью маршевых двигателей, B_z — момент инерции модуля. Предположим, что начальные условия $x(t_0) = x_0$ фиксированы.

С помощью боковых двигателей космонавт пытается уменьшить отклонение от станции в момент причаливания — критерий качества управления имеет вид $J = x_1^2(t_k) + x_3^2(t_k)$. При замене $x = y - z$ справедливо разложение исходной системы (D29.5) на подсистему по возмущению (29.12) и по управлению (29.13). Множество достижимости G_u , соответствующее системе (29.13), представляет собой отрезок прямой на оси z_3 , а

множеству достижимости системы (29.12) соответствуют две точки $G_v = \{y_1^w, y_2^w\}$ (рис. D29.4). Будем считать для простоты, что точки y_1^w и y_2^w лежат по одну сторону от оси z_3 , а их проекции на ось z_3 принадлежат множеству G_u .

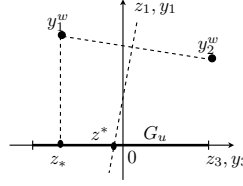


Рис. D29.4.

Оптимальной чистой стратегией управлений будет точка z^* , так как в ней достигается $\min_{z \in G_u} \max_{y \in G_v} J(y, z)$ (см. рис. D29.4).

Найдем смешанную стратегию возмущений η^* при условии, что ни одна из точек y^w не лежит на множестве G_u . Для этого определим вероятности η_1, η_2 , соответствующие смешанной стратегии.

Математическое ожидание выигрыша в точке z определяется из соотношения $K(\eta^*, z) = \eta_1|z - y_1^w| + \eta_2|z - y_2^w|$. Градиент этой функции по z в проекции на множество G_u имеет вид

$$K' = (\eta_1 \frac{z - y_1^w}{|z - y_1^w|} + \eta_2 \frac{z - y_2^w}{|z - y_2^w|}, \vec{e}_3).$$

Если принять во внимание тот факт, что уравнение $K' = 0$ имеет единственный корень на G_u при фиксированных η_1, η_2 , то придем к следующему утверждению:

необходимым и достаточным условием седловой точки является следующее условие для вероятностей η_1 и η_2 :

$$(\eta_1 \frac{z^* - y_1^w}{|z^* - y_1^w|} + \eta_2 \frac{z^* - y_2^w}{|z^* - y_2^w|}, \vec{e}_3) = 0.$$

Найденные таким образом цена игры $J_0 = \min_{z \in G_u} \max_{y \in \Omega_v} J(y, z)$, чистая стратегия управлений z^* и смешанная стратегия возмущений η^* позволяют реализовать второй и третий этапы методики тестирования.

Дополнение 2 к лекции 29. Максиминное тестирование качества стабилизации управляемой системы

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарная линейная система со скалярным управлением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |x(0)| \leq 1, \quad (\text{D29.6})$$

для которой выполнено условие управляемости

$$\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \neq 0.$$

Таким образом [2], существует не пустое множество Q_0 параметров $k^\top = (k_1, \dots, k_n)$, реализующих асимптотическую устойчивость системы (D29.6) (при наличии полной и точной информации об отклонениях $x_1, \dots, x_n$) в виде линейного алгоритма стабилизации $u = k_1x_1 + \dots + k_nx_n = k^\top x$. При этом матрица замкнутой системы $A_c = A + bk^\top$ является гурвицевой матрицей, т.е. $\Re \lambda_j \leq 0$, $j = 1, \dots, n$, где λ_j — корни характеристического уравнения $\det(\lambda I - A_c) = 0$.

Будем считать, что $k \in Q_0 \subset k \in R^n \mid \Re \lambda_j \leq -\alpha_0$, $\alpha_0 > 0$ и множество Q_0 замкнуто и выпукло.

Качество стабилизации будем оценивать функционалом

$$\begin{aligned} J(k, x(0)) &= \int_0^{t_1} (x^\top G x + s_0 u^2) dt + x^\top(t_1) S_1 x(t_1) = \\ &= \int_0^{t_1} x^\top S_2(k) x dt + x^\top(t_1) S_1 x(t_1), \end{aligned} \quad (\text{D29.7})$$

где $S_2(k) = G + s_0 k k^\top$, $G = G^\top > 0$, $S_1 = S_1^\top > 0$, $s_0 > 0$.

Для оценки качества стабилизации при выбранных значениях $k^* = (k_1^*, \dots, k_n^*)^\top$ применим процедуру максиминного тестирования [2]. На первом этапе решим задачу

$$\min_{k \in Q_0} J(k, x(0)) \rightarrow \max_{|x(0)| \leq 1} . \quad (\text{D29.8})$$

После решения задачи (D29.8), для найденных k_0 и $x_0(0)$ проводится вторая часть процедуры тестирования — эксперимент, позволяющий при заданных наихудших начальных возмущениях $x_0(0)$ получить выходную информацию о системе с заданными, но неизвестными параметрами $k_0 = (k_{01}, \dots, k_{0n})^\top$ и построить оценку снизу

$$J(k_0, x_0(0)) = \max_{|x(0)| \leq 1} \min_{k \in Q_0} J(k, x(0)) \leq J(k^*, x_0(0)). \quad (\text{D29.9})$$

Неравенство (D29.9) дает возможность рассматривать критерий тестирования в десятибалльной шкале

$$\varkappa = \frac{J(k_0, x_0(0))}{J(k^*, x_0(0))} \cdot 10. \quad (\text{D29.10})$$

Для того, чтобы критерий (D29.10) давал объективную оценку, желательно, чтобы оценка в 10 баллов была достижима. Это возможно, если рассматривать максиминное тестирование в рамках антагонистической игры между линейным алгоритмом стабилизации и начальными возмущениями. Тогда имеет место неравенство [2]

$$\begin{aligned} J_0(k_0, x_0(0)) &= \max_{|x(0)| \leq 1} \min_{k \in Q_0} \max_{|x(0)| \leq 1} J(k, x(0)) \leq \\ &\leq \min_{k \in Q_0} \max_{|x(0)| \leq 1} J(k, x(0)) = J(k^0, x^0(0)) = J^0. \end{aligned} \quad (\text{D29.11})$$

Операция нахождения минимакса соответствует решению на практике задачи минимаксной стабилизации — нахождение оптимальных параметров стабилизации при наихудших начальных возмущениях. Наличие равенства в (D29.11) говорит о существовании ситуации равновесия (седловой точки) в рассматриваемой игре. В этом случае критерий (D29.10) дает наилучшую оценку в 10 баллов при совпадении вектора k^* с $k_0 = k^0$ и процедуру тестирования будем называть гарантированным тестированием, так как в этом случае не только производится оценка качества, но и утверждается, что качество можно улучшить, если изменить выбранные параметры k^* на k^0 .

2. Стабилизация на бесконечном интервале времени. Рассмотрим частный случай, когда $t_1 = \infty$ и покажем, что в этом случае максиминное тестирование является гарантированным, т. е. существует ситуация равновесия (седловая точка) и нижняя цена игры J_0 совпадает с верхней ценой J^0 .

Сначала применим результат Калмана об оптимальной стабилизации [2]:

$$\min_{u(\cdot) \in PC} J(u, x(0)) = J(u_0(\cdot), x(0)) = x^\top(0) L_0 x(0), \quad (\text{D29.12})$$

где $u_0(\cdot) = -s_0^{-1} b^\top L_0 x = k_0^\top x$, а $L_0 = L_0^{\text{top}}$ — единственное решение алгебраического уравнения Риккати

$$A^\top L + LA - s_0^{-1} L b b^\top L = -G. \quad (\text{D29.13})$$

Пусть $k_0 \in Q_0$. Тогда

$$\min_{u(\cdot) \in PC} J(u, x(0)) = \min_{k \in Q_0} J(k, x(0)).$$

Вернемся к исходной задаче (D29.6), (D29.7), (D29.8) и рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{Z} = A_c^\top Z + Z A_c, \quad (\text{D29.14})$$

где $A_c = A + b k^\top$. Можно показать, что решение уравнения (D29.14) при начальных условиях $Z(0) = S_2(k)$ имеет вид

$$Z(t) = e^{A_c^\top(k)t} S_2(k) e^{A_c(k)t}.$$

Так как матрица $A_c(k)$ при любом $k \in Q_0$ является гурвицевой матрицей, то можно проинтегрировать это решение и построить матрицу

$$H(k) = \int_0^\infty Z(t) dt = \int_0^\infty e^{A_c^\top(k)t} S_2(k) e^{A_c(k)t} dt.$$

Убедимся, что матрица $H(k)$ является решением матричного уравнения Ляпунова

$$A_c^\top(k) H(k) + H(k) A_c(k) = -S_2(k). \quad (\text{D29.15})$$

Действительно, поскольку при любом малом $\varepsilon > 0$ и любом $k \in Q_0$ имеет место оценка

$$\|e^{A_c(k)t}\| \leq C(\varepsilon) e^{(\varepsilon - \alpha_0)t}, \quad t \in [0, \infty),$$

то, выбрав $\varepsilon < \alpha_0$, получим равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(k, t) = 0$.

Проинтегрировав левую и правую части на отрезке $[0, \infty]$, получим соотношение (D29.15). А.М. Ляпунов доказал, что при $S_2(k) > 0$ решение $H(k)$ уравнения (D29.15) единственно и является положительно определенной матрицей. Поэтому функционал (D29.8) можно записать в виде квадратичной формы по начальным условиям

$$J(k, x(0)) = x^\top(0)H(k)x(0).$$

Тогда, в соответствии с (D29.12), получим

$$\min_{k \in Q_0} x^\top(0)H(k)x(0) = x^\top(0)L_0x(0). \quad (\text{D29.16})$$

Покажем теперь, что $H(k_0) = L_0$, т.е. L_0 есть решение уравнения Ляпунова при $k = k_0 = -s_0^{-1}L_0b$. Подставив выражения для матриц $A_c(k_0)$ и $S_2(k_0)$ в уравнение Ляпунова (D29.15) и, положив $H = L_0$, получим уравнение

$$(A^\top L_0 + L_0)A - s_0^{-1}L_0bb^\top L_0 - s_0^{-1}L_0bb^\top L_0 = -G - s_0^{-1}L_0bb^\top L_0,$$

совпадающее с уравнением Риккати (D29.13).

Так как матрица L_0 есть решение этого уравнения, то верно равенство $H(k_0) = L_0$. Таким образом, можно переписать (D29.16) в виде

$$\min_{k \in Q_0} x^\top(0)H(k)x(0) = x^\top(0)H(k_0)x(0)$$

и получить следующее неравенство

$$\begin{aligned} \max_{|x(0)| \leq 1} \min_{k \in Q_0} x^\top(0)H(k)x(0) &= \max_{|x(0)| \leq 1} x^\top(0)H(k_0)x(0) \geq \\ &\geq \min_{k \in Q_0} \max_{|x(0)| \leq 1} x^\top(0)H(k)x(0). \end{aligned} \quad (\text{D29.17})$$

В теории игр [28] для любой антагонистической игры имеет место неравенство

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} J(y, x) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} J(y, x). \quad (\text{D29.18})$$

Для рассматриваемой ситуации неравенство (D29.18) принимает вид

$$\max_{|x(0)| \leq 1} \min_{k \in Q_0} J(k, x(0)) \leq \min_{k \in Q_0} \max_{|x(0)| \leq 1} J(k, x(0)), \quad (\text{D29.19})$$

где левая часть неравенства соответствует процедуре максиминного тестирования, определенной на замкнутых множествах начальных возмущений $x(0)$ и параметров стабилизации k .

Правая часть соответствует решению задачи минимаксной стабилизации, то есть нахождению оптимальных значений параметров стабилизации k при наихудших начальных возмущениях.

Из неравенств (D29.17) и (D29.19) следует равенство

$$\begin{aligned} J_0 = J(k_0, x_0(0)) &= \max_{|x(0)| \leq 1} \min_{k \in Q_0} J(k, x(0)) = \\ &= \min_{k \in Q_0} \max_{|x(0)| \leq 1} J(k, x(0)) = J(k^0, x^0(0)) = J^0. \end{aligned} \quad (\text{D29.20})$$

Из равенства (D29.20) следует, что в данном случае $(t_1) = \infty$ решение задачи максиминного тестирования совпадает с решением минимаксной стабилизации.

Примерный список вопросов по курсу «Механика управляемых систем»

1. Устойчивость динамических систем по Ляпунову. Основные теоремы. Критерий Гурвица.
2. Управляемость и наблюдаемость. Критерии управляемости и наблюдаемости в стационарном случае. Примеры.
3. Алгоритмы управления в стационарных системах при полной информации о векторе состояния. Примеры.
4. Асимптотически устойчивый алгоритм оценивания в стационарном случае. Пример.
5. Решение задачи стабилизации в стационарном случае во вполне управляемых и наблюдаемых системах.
6. Декомпозиция линейной стационарной системы по управлению Пример.
7. Декомпозиция линейной стационарной системы по наблюдению Пример.
8. Случайный процесс с ортогональными приращениями. Стохастические модели линейных систем.
9. Решение переопределенных алгебраических систем. Вероятностная интерпретация метода наименьших квадратов.
10. Оценивание вектора состояния по вектору измерений при заданных ковариационных матрицах. Критерий ортогональности, вероятностная интерпретация.
11. Дискретный фильтр Калмана.
12. Непрерывный фильтр Калмана. Теорема об асимптотической устойчивости фильтра Калмана.
13. Приложение методов оценивания к задаче коррекции инерциальных навигационных систем.
14. Уровни управления движением нелинейной механической системы. Управление планированием тяжелого летательного аппарата.
15. Формула приращения функционала в задаче оптимизации с фиксированным временем. Классическая вариация и необходимое условие слабого локального минимума.
16. Формулировка принципа максимума Понтрягина для оптимизации прихода на многообразие. Игольчатая вариация и необходимое условие сильного локального минимума в задаче с фиксированным временем и свободным правым концом траектории.
17. Связь с вариационными принципами механики. Задача Больца в вариационном исчислении, уравнения Эйлера. Лагранжева форма условий оптимальности ПМП.
18. Оптимальная стабилизация линейных систем при неограниченных ресурсах управления. Оценка сверху для решений системы. Стабилизация линейной стохастической системы. Совместная задача управления и оценивания. Теорема разделения.
19. Метод динамического программирования как достаточное условие оптимальности. Применение принципа оптимальности Беллмана в задаче о линейном регуляторе с квадратичным критерием качества. Связь метода динамического программирования с принципом максимума.
20. Принцип максимума в задаче быстрогодействия. Достаточность принципа максимума для линейных вполне управляемых систем. Стабилизация вертикального положения перевернутого маятника.
21. Вариация Келли и необходимое условие оптимальности для особых экстремалей Понтрягина. Обобщенное необходимое условие оптимальности особых экстремалей и структура оптимального управления
22. Задача Годдарда о подъеме ракеты на максимальную высоту.
23. Задача Булгакова о накоплении возмущений в линейной системе. Алгоритм проектирования точки на множество. Задача тестирования качества стабилизации возмущаемой линейной системы.

Основная литература

- [1] Александров В.В., Злочевский С.И., Лемак С.С., Парусников Н.А. Введение в динамику управляемых систем. М.: Изд-во мех-мат МГУ, 1993.
- [2] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [3] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007.
- [4] Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.
- [5] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1992.

Дополнительная литература

- [6] Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука, 1984.
- [7] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
- [8] Александров В.В. К задаче Булгакова о накоплении возмущений // Докл. АН СССР. Сер. Кибернетика и теория регулирования. 1969. Т. 186, №3. С. 526–528.
- [9] Арутюнов А.В. Условия экстремума. М.: Факториал, 1997.
- [10] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
- [11] Булгаков Б.В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. С. 339–342.
- [12] Габасов З.Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
- [13] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
- [14] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [15] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. М.: Наука, 1969.
- [16] Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Изд-во ЦПИ при мех-мат. ф-т. МГУ, 2005.
- [17] Девис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастическое управление. М.: Наука, 1984.
- [18] Девяннин Е.А., Парусников Н.А. Об устойчивости движения материальной точки в поле сил притягивающего центра. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1963.
- [19] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [20] Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2004.
- [21] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [22] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- [23] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений (прил.) // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
- [24] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
- [25] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычислит. мат. и мат. физ., 1962, т.2, № 6.
- [26] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
- [27] Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
- [28] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высш.шк., 1998.
- [29] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
- [30] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
- [31] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [32] Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1979.
- [33] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978.
- [34] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [35] Maybeck P.S. Stochastic Models, Estimation and Control. New York: Academic Press. 1979.