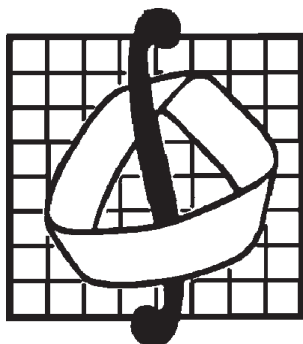


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА



Механико-математический факультет

В.В. Александров, Д.И. Бугров, К.В. Тихонова

**ЗАДАЧИ О ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ  
И ХАОТИЧЕСКОМ ПЕРЕХОДАХ  
В БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ  
НА ПЛОСКОСТИ**

**Часть 1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ  
ПЕРЕХОД В БИСТАБИЛЬНОЙ  
СИСТЕМЕ**

**Компьютерный практикум**

Издательство Московского университета 2017

УДК 531.39  
ББК 22.2

Р е ц е н з е н т:  
доктор физико-математических наук *С.С. Лемаж*

**Александров В.В., Бугров Д.И., Тихонова К.В.**

Задачи о детерминированном и хаотическом переходах в бистабильных системах на плоскости. Часть 1. Детерминированный переход в бистабильной системе. Компьютерный практикум. Учебное пособие. — М.: Издательство Московского университета, 2017. — 44 с.

ISBN 978-5-19-011231-3

Предлагаемая задача компьютерного практикума позволяет познакомиться с явлением перехода в бистабильной системе на плоскости. Первая часть практикума посвящена детерминированным системам. Рассматривается возмущаемая стабильная система, имеющая два устойчивых в прямом времени аттрактора: точечный и периодический. Формулируется задача о переходе из области притяжения точечного аттрактора в область притяжения периодического аттрактора. Для выполнения практикума предлагается использовать модифицированную модель Ходжкина–Хаксли активности афферентного первичного нейрона вестибулярного механорецептора. С помощью компьютерного моделирования при различных значениях синаптического тока требуется найти положения равновесия нелинейной системы, проводить ее линеаризацию и в случае, когда полученная система является бистабильной, определять возможность перехода.

Для студентов отделений механики механико-математических факультетов вузов.

**УДК 531.39**  
**ББК 22.2**

ISBN 978-5-19-011231-3 © Механико-математический факультет  
МГУ имени М.В.Ломоносова, 2017 г.

## Оглавление

ЗАДАЧИ О ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ И ХАОТИЧЕСКОМ ПЕРЕХОДАХ В БИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ПЛОСКОСТИ . . . . .	4
Предисловие . . . . .	4
ЧАСТЬ 1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ПЕРЕХОД В БИСТАБИЛЬНОЙ СИСТЕМЕ . . . . .	5
1. Возмущаемые стабильные системы на плоскости . . . . .	5
2. Область притяжения точечного аттрактора и построение множества достижимости при наличии постоянно действующего возмущения . . . . .	7
3. Постановка задачи о переходе и нахождение расстояния Хаусдорфа . . . . .	18
4. Модифицированная модель Ходжкина–Хаксли активности афферентного первичного нейрона (АПН) вестибулярного механорецептора . . . . .	19
5. Решение задачи о переходе из области ожидания механического стимула в область генерации информационного ответа первичного нейрона . . . . .	26
6. Порядок выполнения лабораторной работы компьютерного практикума . . . . .	30
ПРИЛОЖЕНИЕ . . . . .	32
7. Бифуркация Андронова–Хопфа и поведение системы в левой окрестности точки бифуркации . . . . .	32
8. Сравнение множеств достижимости линейной и билинейной систем . . . . .	34
9. Построение оценки области достижимости линейной системы . . . . .	36
Список литературы . . . . .	41

# Задачи о детерминированном и хаотическом переходах в бистабильных системах на плоскости

## Предисловие

В 1937 году А.А.Андронов и Л.С.Понтрягин опубликовали [17] необходимые и достаточные условия принадлежности гладкой динамической системы на плоскости к множеству "грубых" (структурно устойчивых) систем. Так как множество "грубых" систем, рассматриваемых на ограниченной и замкнутой области фазовой плоскости, является открытым всюду плотным множеством в соответствующем банаховом пространстве, то все "негрубые" (структурно неустойчивые) системы заполняют границы между областями структурной устойчивости в этом функциональном пространстве. Такая конструкция позволяет рассматривать различные колебательные режимы при бифуркации двумерных систем. Дальнейшее расширение теории грубых систем и систем первой степени негрубости в многомерном случае и при наличии постоянно действующих возмущений (управлений) говорит о больших возможностях её применения для анализа и синтеза конкретных динамических систем [15].

При исследовании динамики слабо возмущаемых механических, электромеханических и биомеханических систем и формировании законов управления ими могут наблюдаться переходы между различными состояниями. Большой интерес представляют случаи, когда для невозмущаемой системы выход за границу области устойчивого движения невозможен. Возникает вопрос о том, могут ли малые детерминированные возмущения привести к качественному изменению динамики системы, т.е. её переходу от режима движений в окрестности притягивающего множества одного аттрактора (асимптотически устойчивого положения равновесия или асимптотически орбитально устойчивого предельного цикла) к качественно иному режиму движения, в частности, к движению в окрестности притягивающего множества другого аттрактора. В пособии рассматриваются две задачи для нелинейных возмущаемых систем на плоскости, позволяющие получить представление о причинах таких изменений и дальнейшем поведении системы. Предлагаемые подходы, основанные на до-

статочны простых для применения алгоритмах, эффективны для приложений [14].

В части 1, разделы 2.2, 3.2, 4.1, 4.2, 5.1 и 8 написаны К.В.Тихоновой, остальные разделы написаны авторами совместно. Часть 2 написана А.В.Влаховой.

## **Часть 1. Детерминированный переход в би-стабильной системе**

### **1. Возмущаемые стабильные системы на плоскости**

**1.1. Введение.** Рассмотрим грубую динамическую систему [15] при наличии постояннодействующего возмущения, известно-го с точностью до функционального множества:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, v_1(t)) = \phi^0(y) + \phi^1(y)v_1, & y(0) \in G \subset R_2; \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\phi^0(y)$ ,  $\phi^1(y)$  – гладкие функции при  $y \in G$ ,  $G$  – ограниченное замкнутое множество. В отсутствие возмущения ( $v_1(t) \equiv 0$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ ) мы имеем систему с гладкой правой частью, заданной на замкнутой области  $G$  фазовой плоскости:

$$\dot{y} = f(y, 0) = \phi^0(y). \quad (2)$$

В дальнейшем в соответствии с теоремой Андронова–Понтрягина [15] будем рассматривать только такие грубые системы (2), каждая из которых имеет конечное число асимптотически устойчивых особых точек и асимптотически орбитально устойчивых предельных циклов в прямом или обратном времени. Такие системы будем называть стабильными системами. При наличии возмущения  $v_1(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ) система (1) с начальными условиями, принадлежащими одному из перечисленных аттракторов системы (2), может покинуть область притяжения данного аттрактора и перейти в область притяжения другого аттрактора или вообще оказаться в более сложной ситуации. Для анализа таких ситуаций необходимо дать соответствующие определения.

**1.2. Робастная устойчивость при постояннодействующем возмущении.** Пусть  $y^0$  – точечный аттрактор, т. е.  $f(y^0, 0) = 0$  ( $y^0 \in \text{int}(G)$ ,  $\phi^0(y^0) = 0$ ). Введем отклонение  $x =$

$y - y^0$  и получим нелинейное уравнение в отклонениях с функциональным включением:

$$\begin{cases} \dot{x} = \phi^0(y^0 + x) + \phi^1(y^0 + x)v_1(t) \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\phi^0(y^0) = 0$ . В дальнейшем для краткости обозначение  $y^0$  опустим. Определение робастной устойчивости невозмущаемого состояния  $x \equiv 0$  системы (3) (при  $x(0) = 0$  и  $v_1(t) \equiv 0$ ) было дано Г.Н. Дубошиным и И.Г. Малкиным в сороковых годах прошлого века [16].

**Определение.** Невозмущаемое ( $x(0) = 0$ ,  $v_1(t) \equiv 0$ ) состояние  $x(t) \equiv 0$  системы (3) называется робастно устойчивым при начальном  $x(0)$  и постояннодействующем  $v_1(t)$  возмущениях, если для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$  и  $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ , такие, что выполняется следующее условие:

если  $\|x(0)\| \leq \delta_0$  и  $|v_1(t)| \leq \delta_1$  для  $t \geq 0$ , то  $\|x(t)\| \leq \varepsilon$  для  $\forall t \geq 0$ .

Рассмотрим в соответствии с (3) математическую модель, линейную по отклонениям:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + A_1 v_1(t))x + b v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $A_0 = \frac{\partial \phi^0(0)}{\partial x}$ ,  $A_1 = \frac{\partial \phi^1(0)}{\partial x}$ ,  $b = \phi^1(0)$ .

В случае если  $\phi^1(0) = 0$ , получим однородную систему по отклонениям с функциональным включением

$$\begin{cases} \dot{x} = A(v_1(t))x, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $A(v_1) = A_0 + A_1 v_1$ .

В этом частном случае можно рассматривать робастную устойчивость как абсолютную устойчивость, т. е. как асимптотическую устойчивость нестационарной системы (5) при любом параметрическом возмущении  $v_1(t)$  из функционального множества  $V$ . При этом система (5) не является линейной системой, будучи множеством линейных систем с параметрическим возмущением  $v_1(t) \in V$ . Далее будем предполагать, что максимальный характеристический показатель Ляпунова для системы (5) существует и отрицателен [2].

**1.3.** При  $\phi^1(0) \neq 0$  имеем билинейный вариант (4), где матрица  $A(v_1)$  гурвицева при любом постоянном  $v_1 \in [-\delta_1, \delta_1]$ . Пусть

$x(0) = 0$ , тогда решение системы (4) представимо в виде интеграла Коши

$$\begin{cases} x(t_1) = \int_0^{t_1} X_v(t_1)X_v^{-1}(t)bv_1(t)dt; \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $X_v(t)$  есть фундаментальная нормированная ( $X_v(0) = E_2$ ) матрица, соответствующая возмущению  $v_1(\cdot) \in V$ , т.е. каждый элемент  $x_{ij}(t, v(\cdot))$  матрицы является функционалом, заданным на множестве функций  $v_1(t)$ ,  $t \in [0, t_1]$ .

Таким образом, имеем математическое описание всех достижимых точек  $x(t_1)$  при наличии постояннодействующих возмущений  $v_1 \in V$  – множество достижимости  $D_{t_1}$  [10]. Если существует интеграл Коши при  $t_1 \rightarrow \infty$ , имеет смысл рассмотреть множество достижимости  $D_\infty$  возмущаемой системы (4) при  $t_1 \rightarrow \infty$  как множество частичных пределов:

$$\begin{cases} x(v_1(\cdot)) = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^{t_k} X_v(t_k)X_v^{-1}(t)bv_1(t)dt, \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1\}. \end{cases} \quad (7)$$

## 2. Область притяжения точечного аттрактора и построение множества достижимости при наличии постоянно действующего возмущения

Для линейной стационарной системы (4) при отсутствии постоянно действующего возмущения  $v_1(t)$  и выполнении условия Гурвица для матрицы  $A_0$  областью притяжения точечного аттрактора  $x = 0$  является вся фазовая плоскость. В случае присутствия постоянно действующего возмущения (ПДВ), пусть даже малого ( $\delta_1 < 1$ ), описание области притяжения становится более сложным, так как ПДВ может увести траекторию системы от точечного аттрактора в любую точку множества достижимости (7). Таким образом, в данном случае при наличии ПДВ возникает задача вариационного анализа влияния ПДВ на область притяжения точечного аттрактора  $\{x = 0\}$ . Поясним это на конкретных трех задачах. В качестве точечного аттрактора будем рассматривать устойчивый фокус.

Рассмотрим возмущаемую стабильную систему, представленную в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu_1\dot{x}_1 + (1 + av_1(t))x_1 = bv_1(t); \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (8)$$

Уравнениями (8), в частности, описываются малые колебания математического маятника при движении точки подвеса по наклонной прямой с ограниченным по модулю ускорением, известным с точностью до функционального множества  $V$ . Здесь  $0 < \mu < \sqrt{1 - a\delta_1}$ ;  $a = \{0, 1\}$ ,  $b = \{0, 1\}$  – коэффициенты параметрического и аддитивного присутствия возмущения в системе.

При любом постоянном  $v_1(t) \equiv \text{const} \in [-\delta_1, \delta_1]$  однородная подсистема является колебательной.

**2.1. Задача 1.** Пусть  $a = 1$ ,  $b = 0$ , тогда система (8) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + (1 + v_1(t))x_1 = 0 \quad (9)$$

В этом случае необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости запишется следующим образом [3]:

$$\ln \sqrt{k_1} < \phi_1(k_1, \beta)$$

или в виде неравенства, имеющем физический смысл:

$$\mu > \sqrt{\frac{1 - \delta_1}{\beta_0}}. \quad (10)$$

Здесь  $k_1 = \frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}$ ,  $\beta = \frac{1-\delta_1}{\mu^2}$ ,  $\phi_1(k_1, \beta) = \frac{\pi - \arctg \sqrt{k_1\beta - 1}}{\sqrt{k_1\beta - 1}} + \frac{\arctg \sqrt{\beta - 1}}{\sqrt{\beta - 1}}$ , где  $\beta_0$  – единственный корень трансцендентного уравнения (Рис. 1)

$$\phi_1(k_1, \beta) = \ln \sqrt{k_1} \quad (11)$$

при  $1 < \beta < \infty$ .

Результат получен путем отыскания наихудшего параметрического возмущения из рассматриваемого функционального множества при решении задачи о максимальном отклонении на "полупериоде" колебаний абсолютно колебательной системы [3] с помощью принципа максимума Понтрягина (обобщенная задача Булгакова о максимальном отклонении).

Используя полученный оптимальный синтез ( $v_1^0 = -\delta_1 \text{sign}(x_1\psi_2) = -\delta_1 \text{sign}(x_1x'_1)$ ), где  $\psi_2$  – координата системы, сопряженной к системе (9)) при решении задачи о



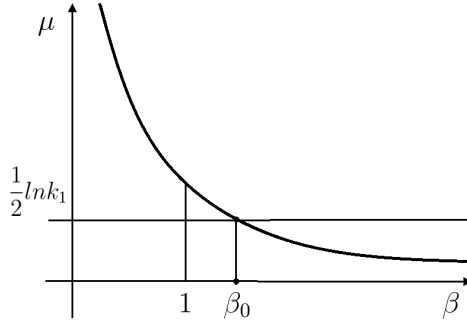


Рис. 1. Решение уравнения (11)

максимальном отклонении на "полупериоде" для фиксированного  $\delta_1 \in (0, 1)$  находим параметризованное по " $\mu$ " и " $\delta_1$ " множество автономных кусочно-линейных систем

$$\ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + (1 - \delta_1 \operatorname{sign}(x_1\dot{x}_1))x_1 = 0, \quad (12)$$

где  $\mu \in (0, \sqrt{1 - \delta_1})$ .

При  $\mu \in (0, \mu^*) \cup (\mu^*, \sqrt{1 - \delta_1})$ , где  $\mu^* = \sqrt{\frac{1 - \delta_1}{\beta_0}}$ , систему (12) можно рассматривать как грубую систему [15].

Неравенство (10) имеет четко выраженный динамический смысл: только при выполнении этого неравенства диссипация полной энергии системы (9) такова, что, несмотря на приток энергии за счет параметрического возмущения, параметрический резонанс отсутствует.

**Пример 1.** При  $\delta_1 = 0,1$  для выполнения условия абсолютной устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы  $\mu > 0,032$  (здесь и далее указаны только первые три значащие цифры числа), т. е. при  $0 < \mu \leq 0,032$  система (9) не является абсолютно устойчивой. Область достижимости  $D_\infty$  при выполнении (10) состоит из одной точки  $x = 0$ .

**2.2. Задача 2.** Пусть  $a = 0$ ,  $b = 1$ , тогда система (8) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + x_1 = v_1(t); \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае можно применить следствие теоремы Малкина [16], согласно которому стационарное невозмущаемое состояние

$x_1 \equiv 0$  робастно устойчиво при постояннодействующих возмущениях, если матрица  $A_0$  является гурвицевой матрицей. Система (8) в этом случае имеет вид (4), где  $A_1 = 0$  и  $A_0$  – гурвицева матрица ( $\text{Re} \lambda = \alpha < 0$ ).

Можно получить точную оценку качества робастной устойчивости, построив глобально орбитально устойчивый предельный цикл, описывающий область достижимости  $D_\infty$  (7) системы (13), (при  $t_1 \rightarrow \infty$ ). Для этого используется решение задачи о максимальном отклонении на "полупериодах" колебаний (задача Булгакова с нефиксированным  $t_1$ ) по  $x_1$  [8] и строится предельный цикл. Множество точек внутри цикла вместе со множеством точек, принадлежащих циклу, образуют множество достижимости  $D_\infty$ .

Решение задачи о нахождении максимального отклонения линейной системы [1] можно сформулировать как поиск минимума функционала

$$\begin{aligned} \phi_0(x_1(t_1)) = x_1(t_1) \rightarrow \min_{|v_1(t)| \leq \delta_1}, \quad x_1(0) = \alpha_0 > 0, \\ x_2(0) = x_2(t_1) = 0, \quad x_2(t) \neq 0 \forall t \in (0, t_1). \end{aligned}$$

Функция Понтрягина в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} H(\psi, x, v_1) = \psi^T f = (\psi_1 \ \psi_2) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - 2\mu x_2 + v_1 \end{pmatrix} = \\ = \psi_1 x_2 + \psi_2 [-x_1 - 2\mu x_2 + v_1], \end{aligned}$$

где  $\psi(t)$  – решение системы, сопряженной к системе (13).

Используя условия: трансверсальности ( $\psi_1(t_1) = -\lambda_0 \leq 0$ ); стационарности ( $\mathcal{H}(t_1) = \psi_2(t_1)[-x_1(t_1) + v_1(t_1)] = 0$ ); максимума функции Понтрягина, можно получить выражение для наилучшего возмущения:

$$v_1(t) = \delta_1 \cdot \text{sign } \psi_2(t).$$

На всем интервале времени  $t \in (0, t_1)$  переменная  $\psi_2$  принимает только отрицательные значения, поэтому  $v_1(t) \equiv -1$  и система (13), записанная в обратном времени  $\tau = t_1 - t$ , принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{dx_1}{d\tau} = x_2; \\ -\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - 2\mu x_2 - \delta_1; \\ -\frac{d\psi_1}{d\tau} = \psi_2; \\ -\frac{d\psi_2}{d\tau} = -\psi_1 + 2\mu\psi_2; \end{cases}$$

с начальными условиями  $x_1(\tau = 0) = -\alpha_1$ ,  $x_2(\tau = 0) = 0$ ,  $\psi_1(\tau = 0) = -1$ ,  $\psi_2(\tau = 0) = 0$ .

Решение задачи Коши на первом интервале может быть представлено выражением

$$x_1(\tau) = \frac{e^{\mu\tau}(\delta_1 - \alpha_1)}{\beta}(\beta \cos \beta\tau - \mu \sin \beta\tau) - \delta_1,$$

$$x_2(\tau) = \frac{e^{\mu\tau}(\delta_1 - \alpha_1)}{\beta} \sin \beta\tau,$$

где  $\beta = \sqrt{1 - \mu^2}$ .

Найдем первый момент времени, когда производная ( $\frac{dx_1}{d\tau}(\tau) = -x_2(\tau)$ ) решения обратится в ноль:

$$x_2(\tau_1) = \frac{e^{\mu\tau_1}(b - \alpha_1)}{\beta} \sin \beta\tau_1 = 0 \implies \sin \beta\tau_1 = 0$$

$$\tau_1 = \frac{\pi}{\beta}$$

Используя граничные условия  $x_1(\tau_1) = \alpha_0$ , получаем:

$$x_1(\tau_1) = -e^{\frac{\mu\pi}{\beta}}(\delta_1 - \alpha_1) - \delta_1 = \alpha_0,$$

$$\alpha_1 = e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}(\alpha_0 + \delta_1) + \delta_1.$$

Решая задачу о нахождении максимального отклонения на втором полупериоде  $t \in [t_1, t_2]$ , получим аналогичное выражение для следующей амплитуды. Таким образом, при решении задачи о нахождении максимального отклонения мы получаем последовательность амплитуд  $\{\alpha_n\}$ ,  $n$ -ый член которой равен [8]:

$$\alpha_n = e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}(\alpha_{n-1} + \delta_1) + \delta_1.$$

Это отображение является сжимающим, поскольку:

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| = \left| (x + \delta_1)e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \delta_1 - (y + \delta_1)e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} - \delta_1 \right| =$$

$$= e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} |x - y|,$$

где  $e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} = e^{-\text{const} < 0} < 1$ .

Амплитуда автоколебаний  $\alpha^*$ , соответствующих предельному циклу, находится как предел сжимающего отображения Пуанкаре [18]:

$$\alpha^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \delta_1 \left( \frac{1 + e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right).$$

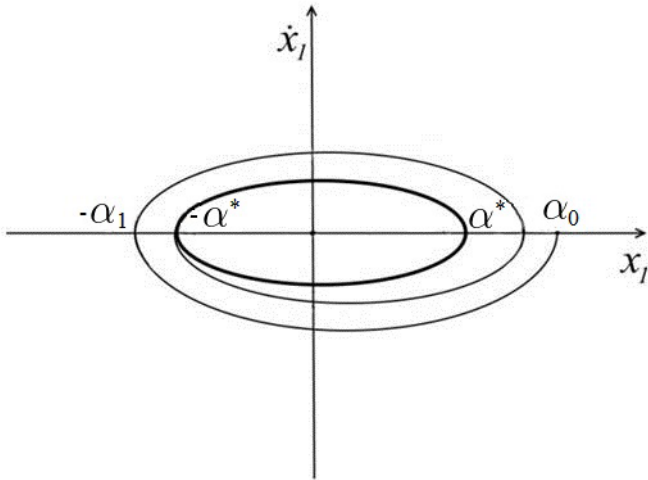


Рис. 2. Сечение Пуанкаре

В этом случае сечением Пуанкаре является ось  $\dot{x}_1 = 0$  (Рис. 2).

Описание предельного цикла системы (13) находится как решение задачи о максимальном отклонении в прямом времени и может быть представлено в следующей форме (знак "+" соответствует верхней половине цикла и знак "-" нижней половине цикла):

$$\begin{cases} x_1(t) = \pm \delta_1 \left[ 1 - \frac{2e^{-\mu t}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \left( \frac{\mu}{\beta} \sin(\beta t) + \cos(\beta t) \right) \right]; \\ x_2(t) = \pm \delta_1 \frac{2e^{-\mu t}}{1 - e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \sin(\beta t). \end{cases} \quad t \in [0; \pi/\beta].$$

Для случая, когда зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\delta_1)$  известна, можно ввести понятие качества робастной устойчивости при постоянно действующем возмущении [4] при нулевых начальных условиях:

$$\chi = \sup_{0 < \delta_1 < \delta_1^*} \frac{\varepsilon(\delta_1)}{\delta_1} \quad (14)$$

где

$$\varepsilon = \max_{0 \leq \tau \leq \tau_1} \|x(\tau, v_1^0(\tau))\| = \max_{0 \leq \tau \leq \tau_1} \max_{1 \leq i \leq 2} \{|x_i(\tau, v_1^0(\tau))|\};$$

$$v_1^0(\tau) = \delta_1 \text{sign} x_1'(\tau);$$

$\tau_1$  – период движения по орбите цикла.

Предельный цикл задает границу множества достижимости, а значит точка, которая максимально удалена от начала координат, принадлежит этому циклу. Можно показать, что максимально удаленной точкой из области достижимости от начала координат для системы (13) будет точка  $(\alpha^*, 0)$ . Следовательно  $(\delta_1^* = 1)$ :

$$\chi_1 = \frac{\alpha^*}{\delta_1} = \frac{\delta_1 \left[ \frac{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}}} \right]}{\delta_1} = \frac{(1+e^{-\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}})}{(1-e^{-\frac{\mu\pi}{\sqrt{1-\mu^2}}})}. \quad (15)$$

Осуществляя синтез наихудшего возмущения  $(v_1^0(t) = \delta_1 \text{sign } \psi_2 = \delta_1 \text{sign } \dot{x}_1)$ , мы получаем для каждого  $\mu \in (0, \sqrt{1-\delta_1})$  автономную автоколебательную нелинейную систему [5]

$$\ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + x_1 = \delta_1 \text{sign } \dot{x}_1.$$

Предельный цикл этой системы является асимптотически орбитально устойчивым, так как для любых начальных условий  $\alpha_0$  можно показать, что  $\alpha_0 \rightarrow \alpha^*$  как снаружи, так и внутри цикла.

1). Если  $\alpha^* > \alpha_0$  (начальные условия внутри цикла), то  $\delta_1 \left( \frac{1+e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}}{1-e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}}} \right) > \alpha_0$ , то есть  $e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} > \frac{\alpha_0 - \delta_1}{\alpha_0 + \delta_1}$ , поэтому

$$\alpha_1 = (\alpha_0 + \delta_1)e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \delta_1 > \frac{(\alpha_0 + \delta_1)(\alpha_0 - \delta_1)}{(\alpha_0 + \delta_1)} + \delta_1 = \alpha_0,$$

это означает, что  $\alpha_1 > \alpha_0$  и последовательность амплитуд возрастает до  $\alpha^*$ .

2). Если  $\alpha^* < \alpha_0$  (начальные условия снаружи цикла), то  $e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} < \frac{\alpha_0 - \delta_1}{\alpha_0 + \delta_1}$  и

$$\alpha_1 = (\alpha_0 + \delta_1)e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \delta_1 < \frac{(\alpha_0 + \delta_1)(\alpha_0 - \delta_1)}{(\alpha_0 + \delta_1)} + \delta_1 = \alpha_0,$$

$\alpha_1 < \alpha_0$ , то есть последовательность амплитуд убывает до  $\alpha^*$ .

3). Если  $\alpha^* = \alpha_0$  (начальные условия лежат на цикле), то  $e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} = \frac{\alpha_0 - \delta_1}{\alpha_0 + \delta_1}$  и

$$\alpha_1 = (\alpha_0 + \delta_1)e^{-\frac{\mu\pi}{\beta}} + \delta_1 = \frac{(\alpha_0 + \delta_1)(\alpha_0 - \delta_1)}{(\alpha_0 + \delta_1)} + \delta_1 = \alpha_0,$$

система движется по орбите цикла.

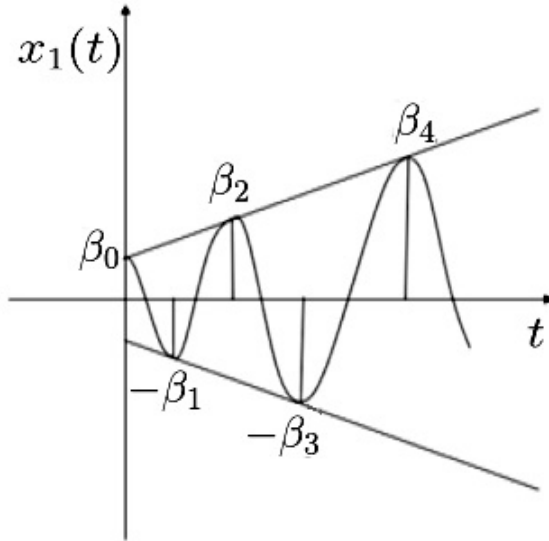


Рис. 3. Возрастание амплитуды при  $\mu = 0$

Следовательно, полученный предельный цикл является асимптотически орбитально устойчивым.

При  $\mu = 0$  последовательность амплитуд возрастает в арифметической прогрессии (Рис. 3) (здесь следует отметить, что в первой задаче при  $\mu = 0$  последовательность амплитуд колебаний системы (12) возрастает в геометрической прогрессии).

Таким образом, множество точек внутри цикла и множество точек на орбите цикла составляют область достижимости  $D_\infty$ .

Осуществив синтез наихудшего возмущения  $(v_1^0(t) = \delta_1 \operatorname{sign} \psi_2 = \delta_1 \operatorname{sign} \dot{x}_1)$ , получим для каждого  $\mu \in (0, \sqrt{1 - \delta_1})$  автономную автоколебательную кусочно-линейную систему

$$\ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + x_1 = \delta_1 \operatorname{sign} \dot{x}_1,$$

которую можно назвать грубой (стабильной) системой.

**2.3. Задача 3.** Пусть  $a = b = 1$ . Рассмотрим теперь общий случай

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu\dot{x}_1 + (1 + v_1(t))x_1 = v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\delta_1 \equiv \operatorname{const} \in (0, 1)$ ,  $\mu \equiv \operatorname{const} \in (0, \sqrt{1 - \delta_1})$ .

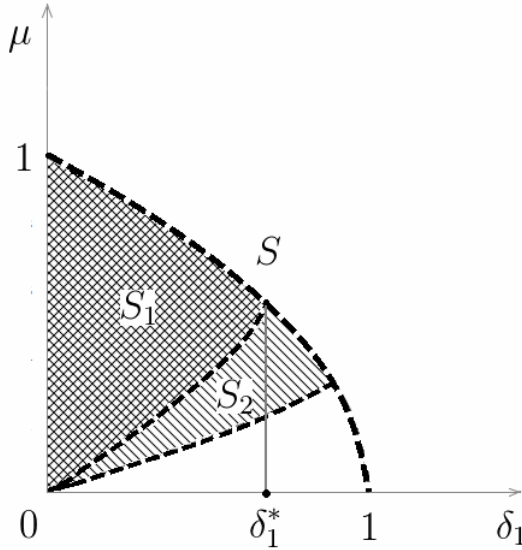


Рис. 4. Области абсолютной устойчивости системы (9) и робастной устойчивости системы (17)

При каждом постоянном значении  $v_1$  система является колебательной. На плоскости параметров  $(\delta_1, \mu)$  системы (16) имеем открытую область  $S$  (Рис. 4), где каждой точке соответствует возмущаемая стабильная система. Построим подобласть, соответствующую неравенству (10):

$$\mu > \sqrt{\frac{1 - \delta_1}{\beta_0(\mu, \delta_1)}}.$$

Получим открытую подобласть (Рис. 4)  $S_1 \cup S_2 \subset S$ , где каждой точке соответствует возмущаемая однородная стабильная подсистема (9), имеющая одну особую точку  $x_1 = \dot{x}_1 = 0$ , являющуюся абсолютно устойчивой. Ограничимся значениями  $\delta_1$ , удовлетворяющими неравенству

$$\delta_1 < \frac{1 - A(\mu, \delta_1) \cdot B(\mu, \delta_1)}{1 + 2B(\mu, \delta_1) + A(\mu, \delta_1) \cdot B(\mu, \delta_1)}, \quad (17)$$

где  $A(\mu, \delta_1) = \exp\left(\frac{-\pi\mu}{\sqrt{1-\delta_1-\mu^2}}\right)$ ,  $B(\mu, \delta_1) = \exp\left(\frac{-\pi\mu}{\sqrt{1+\delta_1-\mu^2}}\right)$ .

На Рис. 4 открытая область  $S_1$ , соответствующая неравенству (17), показана двойной штриховкой, а область  $\{S \setminus (S_1 \cup S_2)\}$  не заштрихована.

Таким образом, из общего решения системы (16)

$$\begin{aligned} x(t_1) &= X_v(t_1)x(0) + \int_0^{t_1} X_v(t_1)X_v^{-1}(t)v_1(t)dt = \\ &= \tilde{x}(t_1, v_1(\cdot)) + \tilde{\tilde{x}}(t_1, v_1(\cdot)) \end{aligned}$$

следует, что тривиальное решение однородной подсистемы абсолютно устойчиво при  $(\delta_1, \mu) \in S_1 \cup S_2$ . Для второй компоненты  $\tilde{\tilde{x}}(t_1, v_1(\cdot))$  построим множество достижимости  $D_\infty$  (6), (7), аналогично Задаче 2. Решив задачу о максимальном отклонении [5]: на начальном "полупериоде"  $(0, t_0)$   $\{x_1(0) = \alpha_0 \in [0, 1), x_2(0) = 0, x_2(t) \neq 0, t \in (0, t_0), x_2(t_0) = 0\}$ , что соответствует  $k = 0$ ; на первом "полупериоде"  $(t_0, t_1)$   $\{x_1(t_0) = -\beta_0 = \min x_1(t_0), x_2(t_0) = 0, x_2(t) \neq 0, t \in (t_0, t_1), x_2(t_1) = 0\}$ , что соответствует  $k = 1$  и аналогично для  $k = 2, 3, \dots$ . Получаем сначала две последовательности:

$$\begin{aligned} \beta_k &= A(\mu, \delta_1)\alpha_k + \frac{1 + A(\mu, \delta_1)}{1 - \delta_1} \cdot \delta_1, \\ \alpha_{k+1} &= B(\mu, \delta_1)\beta_k + \frac{1 + B(\mu, \delta_1)}{1 + \delta_1} \cdot \delta_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В результате имеем два предела  $\beta^*$  и  $\alpha^*$  ( $\beta^* < \alpha^*$ ):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k &= \alpha^* = \frac{\delta_1}{1 - A \cdot B} \left( \frac{(1+A)B}{1 - \delta_1} + \frac{1+B}{1 + \delta_1} \right), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k &= \beta^* = \frac{\delta_1}{1 - A \cdot B} \left( \frac{1+A}{1 - \delta_1} + \frac{(1+B)A}{1 + \delta_1} \right), \end{aligned}$$

и окончательно получаем скалярную дискретную систему, соответствующую сжимающему отображению Пуанкаре

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= A(\mu, \delta_1)B(\mu, \delta_1)\alpha_k + \\ &+ \left( \frac{1 + B(\mu, \delta_1)}{1 + \delta_1} + \frac{B(\mu, \delta_1)(1 + A(\mu, \delta_1))}{1 - \delta_1} \right) \delta_1, \end{aligned}$$

где  $-\beta^* < 0 < \alpha^* < 1$ ,  $\beta^* < \alpha^*$ , и глобально орбитально устойчивый предельный цикл [5], в отличие от Задачи 2, расположенный несимметрично относительно оси  $x_2$ .

В случае синтеза наихудшего возмущения  $v_1^0 = \text{sign}(\dot{x}_1)$  система (16) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + (2\mu\dot{x}_1 - \delta_1 \text{sign}(\dot{x}_1)) + (1 + \delta_1 \text{sign}(\dot{x}_1))x_1 = 0$$



При  $\delta_1 \in (0, \delta_1^*)$  (см. Рис. 4) получаем аналитическое выражение для  $\max_{0 \leq t \leq t_1(\delta_1)} \|x(t, v_1(\cdot))\| = \max_{0 \leq t \leq t_1(\delta_1)} \max_{1 \leq i \leq 2} \{|x_i(t, v_1^0(\cdot))|\}$ , являющееся наилучшаемой оценкой  $D_\infty$ :

$$\|x(t, v_1(\cdot))\| \leq \frac{\delta_1 \left( 1 + \frac{1+\delta_1}{1-AB} \left[ \frac{1+A}{1-\delta_1} + \frac{(1+B)A}{1+\delta_1} \right] \right)}{\sqrt{1+\delta_1}} \cdot e^{\frac{-\mu}{\sqrt{1+\delta_1-\mu^2}} \cdot \arctg \frac{\sqrt{1+\delta_1-\mu^2}}{\mu}} \quad (18)$$

Здесь  $t_1(\delta_1)$  – период предельного цикла и  $\{x_1(t, v_1^0), x_2(t, v_1^0)\}$  – точки, расположенные на его орбите (18). Для малых  $\delta_1$  оценкой качества будет

$$\chi_2 = \left( 1 + \frac{1 + e^{-\frac{\pi\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}}}{1 - e^{-\frac{\pi\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}}} \right) \cdot e^{-\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \arctg \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}}. \quad (19)$$

Таким образом, аналогично следствию из теоремы Малкина [16] получаем: если  $\mu$  удовлетворяет неравенству (17) при  $\delta_1 < \delta_1^*$ , то тривиальное решение  $x \equiv 0$  однородной подсистемы (16) абсолютно устойчиво и невозмущаемое состояние  $x \equiv 0$  системы (16) робастно устойчиво с оценкой качества (19).

Из рассмотренных трех задач следует, что область притяжения точечного аттрактора при наличии малого по амплитуде, но постоянно действующего возмущения может остаться прежней, если имеет место только параметрическое возмущение (здесь область притяжения — вся фазовая плоскость). Во всех остальных случаях (аддитивное влияние или комбинация рассмотренных вариантов) происходит уменьшение области притяжения. В рассмотренных примерах это уменьшение удается определить точно, построив предельный цикл, являющийся границей множества достижимости  $D_\infty$ . Синтезированный предельный цикл является асимптотически устойчивым по Пуанкаре (орбитально устойчивым).

Наличие двух областей на фазовой плоскости — области притяжения точечного аттрактора стабильной (нелинейной) системы и множества достижимости системы, полученной при линеаризации исходной — позволяет при наличии еще одного (периодического) аттрактора поставить задачу о переходе из области притяжения одного (точечного) аттрактора в область притяжения другого (периодического) аттрактора.

### 3. Постановка задачи о переходе и нахождение расстояния Хаусдорфа

**3.1.** В последнее время большое внимание уделяется возмущаемым динамическим системам на плоскости, имеющим два точечных аттрактора, разделенных седловой точкой. В работе [14] с помощью метода Мельникова было показано, что возможны переходы из области притяжения одного аттрактора в область притяжения другого аттрактора при наличии малых постояннодействующих возмущений (см. Часть 2). В рамках стабильных систем [4], являющихся подмножеством грубых систем и не имеющих в своем арсенале седловых точек, также возможна постановка задачи о переходе.

Рассмотрим стабильную систему, имеющую два аттрактора. Будем называть ее в этом случае бистабильной системой. Во избежание путаницы бистабильные системы при наличии седловых точек будем называть гиперболическими бистабильными системами. Все обозначения следуют работе [4].

**3.2. Постановка задачи о переходе.** Предположим, что бистабильная система:

$$\dot{y} = \phi^0(y), \quad y \in G \subset R_2 \quad (20)$$

имеет асимптотически орбитально-устойчивый предельный цикл (периодический аттрактор), внутри которого расположен точечный аттрактор – устойчивый фокус со своей областью притяжения  $A$  (Рис. 5), ограниченной предельным циклом, асимптотически орбитально-устойчивым в обратном времени. Областью притяжения первого (периодического) аттрактора является  $R_2 \setminus A$  (Рис. 5).

Пусть второй аттрактор – устойчивый фокус (в прямом времени) – расположен в начале координат  $y^0 = (0, 0)^T$  (Рис. 5). Рассмотрим тогда возмущаемую бистабильную систему (20) при наличии малого постояннодействующего возмущения:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, v_1(t)) = \phi^0(y) + \phi^1(y)v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}. \end{cases} \quad (21)$$

В соответствии с [4] рассмотрим уравнение в малых отклонениях  $x = y - y^0$  для системы (21):

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + A_1 v_1(t))x + b v_1(t), \\ v_1(\cdot) \in V = \{v_1(\cdot) \in KC \mid |v_1(t)| \leq \delta_1 < 1\}. \end{cases} \quad (22)$$

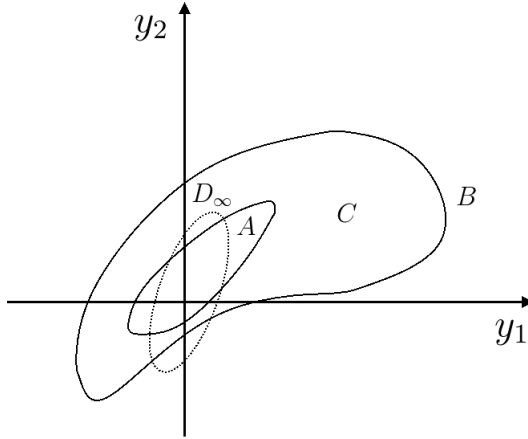


Рис. 5

Здесь  $A_0$  – гурвицева матрица,  $A_0 = \frac{\partial \phi^0(0)}{\partial y}$ ,  $A_1 = \frac{\partial \phi^1(0)}{\partial y}$ ,  $b = \phi^1(0)$ . Предположим, что  $b \neq 0$  и матрица  $A = A_0 + A_1 v_1$  гурвицева при любом постоянном значении  $v_1 \in [-\delta_1, \delta_1]$ .

Построим область достижимости  $D_\infty$ , решив задачу Булгакова о накоплении возмущений [1] для системы (22). Пересечение двух замкнутых множеств  $A$  и  $D_\infty$  непусто. Найдём дистанцию Хаусдорфа между этими множествами:

$$d(D_\infty, A) = \max_{x \in D_\infty} \min_{y \in A} \rho(x, y), \quad (23)$$

где  $\rho$  – является расстоянием между точками  $x, y$ .

Если дистанция Хаусдорфа (23) положительна, то можно говорить о возможности перехода под воздействием  $v_1(t)$  из области притяжения точечного аттрактора в область притяжения предельного цикла, аналогичного переходу в гиперболической бистабильной системе (когда дистанция Мельникова [14] положительна). Рассмотрим эту ситуацию на примере конкретной задачи.

#### 4. Модифицированная модель Ходжкина–Хаксли активности афферентного первичного нейрона (АПН) вестибулярного механорецептора

4.1. Структура вестибулярных механорецепторов в простейшем варианте состоит из двух клеток – волосковой клетки и пер-

вичного афферентного нейрона (Рис. 6). Задача, которую должен выполнить вестибулярный механорецептор – инерциальный биосенсор – это преобразование относительного движения чувствительных масс (в полукружном канале или отолитовом органе вестибулярной системы) в выходной сигнал и его передача в центральную нервную систему (ЦНС). Вестибулярная система (ВС) содержит два вида чувствительных масс: масса отолитов, состоящая из кристаллов кальция и расположенная в 4-х отолитовых органах ВС; масса специальной жидкости, называемой эндолимфой, в полукружных каналах ВС [11]. Смещения чувствительных масс приводят к деформации волосковых пучков – их наклону. Волосковый пучок состоит из опорного волоска – киноцилии и 60–100 волосков, называемых стереоцилиями, связанных между собой, внутри которых расположены каналы проводимости ионов калия, находящихся в эндолимфе (специальная жидкость вне волосковой клетки). При наклоне пучка стереоцилий происходит открытие этих каналов и поступлении ионов калия в клетку, что приводит к нарушению баланса ионов натрия и ионов калия внутри клетки. Это, в свою очередь, приводит к изменению мембранного потенциала этой рецепторной клетки. В результате функционирования механизма синаптической передачи [11] в синаптической щели между волосковой клеткой и первичным афферентным нейроном – биполярной нервной клеткой, возникает синаптический ток, передающий информацию о механическом воздействии (относительном движении чувствительных масс). Наличие входного синаптического тока активирует внутри нейрона динамику ионных токов  $K$  и  $Na$ , что приводит к формированию импульсов мембранного потенциала в принимающем аксоне этой биполярной нервной клетки. Амплитуда этих сигналов почти постоянна и равна  $20\text{ mV}$ . Изменение расстояния

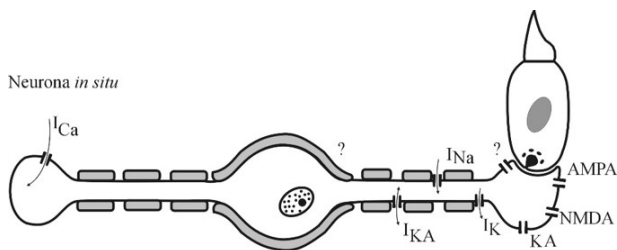


Рис. 6

между импульсами является выходной информацией, которая в дальнейшем должна передаваться в ЦНС. Для постановки задачи перехода в бистабильной системе ограничимся математической моделью типа Ходжкина–Хаксли активности нейрона [11] с учетом модификаций, произведенных по результатам экспериментов на млекопитающих [6].

**4.2.** Рассмотрим математическую модель активности АПН, полученную Ходжкином и Хаксли в 1949–54 гг. с модификациями по результатам экспериментов [6].

В соответствии с 1-м правилом Кирхгофа синаптический ток равен сумме трансмембранных токов нервной клетки АПН [11]. Общий ток через мембрану равен сумме емкостного тока, ионных токов (потоков катионов  $K^+$  и  $Na^+$ ) и тока фоновой утечки:

$$I_{syn} = C_m \frac{dV}{dt} + I_K + I_{Na} + I_L = I + C \frac{dV}{dt}, \quad (24)$$

$I_K$  – ток калия,  $I_{Na}$  – ток натрия,  $I_L$  – ток фоновой утечки,  $C_m \frac{dV}{dt}$  – конденсаторный ток,  $V$  – потенциал действия АПН,  $C_m$  – мембранная емкость. В соответствии с законом Ома  $I_i = g_i(V - V_i)$ , где  $g_i$  – проводимость мембраны для данного вида ионов.

Будем считать, что каждый канал проводимости может находиться только в двух состояниях: открыт или закрыт. Предположим, что ансамбль (множество) каналов тока калия, находящихся в открытом состоянии, соответствует испытаниям Бернулли, и тогда среднее число открытых каналов равно  $(S_0 p)$ , где  $S_0$  – число каналов  $K^+$  в ансамбле и  $p$  – вероятность нахождения одного канала в открытом состоянии. Будем считать, что  $p(t)$  – марковский непрерывный процесс с двумя состояниями – ”открыто”  $p_1(t)$  и ”закрыто”  $p_0(t)$  – при наличии пуассоновского потока перехода из одного состояния в другое с интенсивностями  $\lambda$  и  $\mu$  (Рис. 7) в соответствии с гипотезами:

а) для любого промежутка времени  $(t, t + \Delta t)$  вероятность наступления хотя бы одного события пропорциональна  $\Delta t$  и задается выражением

$$p\{t < \tau < t + \Delta t\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$$

вне зависимости от характера протекания потока до момента  $t$  (другими словами, поток является марковским процессом и  $\lambda$  называется интенсивностью в общем случае нестационарного потока);

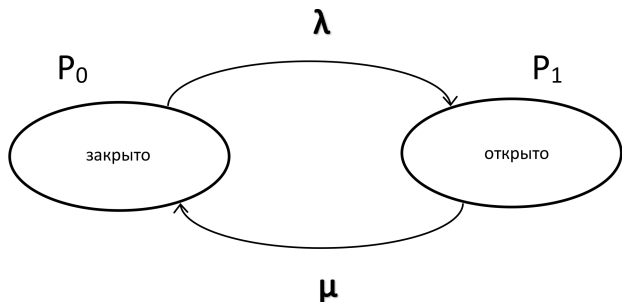


Рис. 7

б) вероятность наступления более чем одного события потока в промежутке времени  $(t, t + \Delta t)$  есть  $o(\Delta t)$ .

Используя эти постулаты марковского процесса с пуассоновскими потоками интенсивностей  $\lambda$  и  $\mu$  и свойства несовместимости и независимости соответствующих событий, получим выражения для вероятностей  $p_0(t)$ ,  $p_1(t)$  при малых  $\Delta t$ . Вероятность того, что канал будет открыт в момент времени  $(t, t + \Delta t)$ , равна сумме вероятностей двух несовместимых событий: канал был открыт в момент  $t$  и не изменил свое состояние за время  $\Delta t$  или он был закрыт в момент  $t$  и за время  $\Delta t$  произошло его открытие. При этом вероятность первого из этих событий равна произведению вероятностей независимых событий, то есть

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)(1 - \mu\Delta t) + p_0(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Аналогично

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t + o(\Delta t).$$

Добавим, что  $p_0(t) + p_1(t) = 1$ .

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\mu p_1 + \lambda p_0, \\ \frac{dp_0}{dt} = -\lambda p_0 + \mu p_1, \\ p_0(t) + p_1(t) = 1 \end{cases} \quad (25)$$

Введя параметры  $\tau = \frac{1}{\lambda + \mu}$ ,  $p_{1\infty} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ , получим уравнение для  $p_1(t)$

$$\tau \frac{dp_1}{dt} + p_1 = p_{1\infty}. \quad (26)$$

А.Ходжкин и А.Хаксли предложили две гипотезы для токов  $K$  и  $Na$  [11]:

1) вероятность открытия канала  $K$  определяется присутствием 4-х частиц активации

$$p_K = n^4,$$

где  $n$  – вероятность присутствия одной частицы активации, определяемая уравнением (26) с потенциалзависимыми интенсивностями  $\lambda(V)$ ,  $\mu(V)$

$$\tau_n(V) \frac{dn}{dt} + n = n_\infty(V); \quad (27)$$

2) вероятность открытия канала  $Na$  определяется присутствием 3-х частиц активации и отсутствием 1-й частицы инактивации

$$p_{Na} = m^3(V)h_{Na}(V).$$

Здесь  $m$  – вероятность присутствия частицы активации;  $h_{Na}$  – вероятность отсутствия частицы инактивации. Уравнения для  $m(t)$  и  $h_{Na}(t)$  аналогичны уравнению (27).

В дальнейшем существование такого рода частиц было подтверждено экспериментально [11]. Таким образом, классическая модель Ходжкина–Хаксли описывается дифференциальными нелинейными уравнениями относительно 4-х переменных  $V(t)$ ,  $n(t)$ ,  $m(t)$ ,  $h(t)$ . С течением времени физиологи стали добавлять еще один параметр – фактор температуры  $Q$ , возникающий при проведении экспериментов с теплокровными животными (млекопитающими). Далее в соответствии с экспериментальными результатами были сделаны два упрощения:

- а) наличие малого параметра  $\tau_m(V) \ll 1 \rightarrow \tau_m(V) \equiv 0$ ;
- б) наличие интеграла  $n(t) + h_{Na}(t) \approx 0,85$ .

В 1999–2006 годах в лаборатории нейрофизиологии Автономного университета штата Пуэбла (Мексика) были проведены эксперименты на первичном нейроне млекопитающих (крыса) и получены модификации упрощенной модели Ходжкина–Хаксли. Функциональные параметры были получены по экспериментальным данным. При обработке результатов экспериментов также был введен параметр инактивации  $h_K$  и первый интеграл представлен в форме  $n(V) + h_{Na}(V) = C(V)$ .

Таким образом, упрощенная модель Ходжкина–Хаксли при модификациях [6] имеет следующий вид

$$C_m \cdot \frac{dV}{dt} = I_{\text{syn}} - I_{\text{Na}} - I_{\text{K}} - I_L, \quad (28)$$

$$\tau_n(V) \cdot \frac{dn}{dt} = (n_\infty(V) - n)Q, \quad (29)$$

где  $I_{\text{Na}} = g_{\text{Na}}m_\infty^3(V)(C(V) - n)(V - V_{\text{Na}})$ ,  $I_{\text{K}} = g_{\text{K}}n^4h_{\text{K}}(V - V_{\text{K}})$ ,  $I_L = g_L(V - V_L)$ ,

$$C(V) = n_\infty(V) + h_{\text{Na}\infty}(V),$$

$$m_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(V+33,8)}{5,2}\right)}, \quad h_{\text{Na}}(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{V+60,5}{9,9}\right)},$$

$$n_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-(V+35)}{5}\right)}, \quad \tau_n(V) = \frac{68}{\exp\left(\frac{25+V}{-15}\right) + \exp\left(\frac{30+V}{20}\right)}.$$

Здесь  $I_{\text{syn}}$  – синаптический ток;  $I_L$  – ток утечки;  $V$  – мембранный потенциал афферентного нейрона;  $C_m$  – емкость мембраны нервной клетки;  $n$  – вероятность присутствия частицы активации калиевого тока;  $h_{\text{K}}$  – параметр, описывающий процесс инактивации калиевого тока, являющийся вероятностью отсутствия частиц инактивации калиевого тока, здесь  $h_{\text{K}} = h_{\text{K}\infty}$ ;  $h_{\text{Na}}$  – параметр, описывающий процесс инактивации натриевого тока, являющийся вероятностью отсутствия частиц инактивации натриевого тока;  $\tau_n$  – постоянная времени процесса активации калиевого тока;  $n_\infty$ ,  $m_\infty$  – стационарные значения процессов активации калиевого и натриевого тока соответственно;  $h_{\text{Na}\infty}$ ,  $h_{\text{K}\infty}$  – стационарные значения процессов инактивации натриевого и калиевого тока соответственно;  $Q$  – “температурный фактор” – коэффициент температурной зависимости, необходимость его введения связана с разностью физиологической температуры и комнатной (20–25°C), при которой проводились эксперименты по определению параметров модели.

Параметры модели приведены в Таблице.



Таблица

Параметр	Значение	Доверительный интервал	Единица измерения
$C_m$	1	–	$\mu\text{F}/\text{cm}^2$
$V_{\text{Na}}$	52	–	mV
$V_{\text{K}}$	-84	–	mV
$V_L$	-63	–	mV
$g_{\text{Na}}$	2.3	2–8	$\text{mS}/\text{cm}^2$
$g_{\text{K}}$	2.4	1–2.6	$\text{mS}/\text{cm}^2$
$g_L$	0.03	0.02–0.16	$\text{mS}/\text{cm}^2$
$Q$	8.4	6.4–10.6	–

Единицей измерения всех входящих в уравнения (28)–(29) токов  $I$  выбирается  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ .

В результате численного анализа модели (28), (29) при постоянном синаптическом токе получены следующие результаты (Рис. 8):

а) найдена точка бифуркации Андронова–Хопфа  $I_{\text{syn}}^* = 1,147 \text{ мкА}/\text{см}^2$ , в правой окрестности которой существует орбитально асимптотически устойчивый предельный цикл – периодический аттрактор;

б) в левой окрестности  $(0,7; 1,147)$  точки бифуркации существует точечный аттрактор–асимптотически устойчивый фокус;

в) часть левой окрестности  $(0,99; 1,147)$  является интервалом бифуркации, где существуют оба аттрактора с соответствующими областями притяжения.

Таким образом, в интервале бифуркации, когда существуют два аттрактора с соответствующими областями притяже-

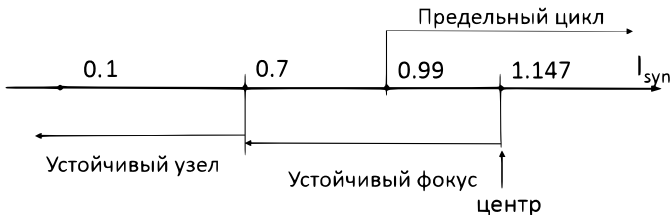


Рис. 8. Аттракторы в бистабильной модели АПН для разных значений постоянного синаптического тока

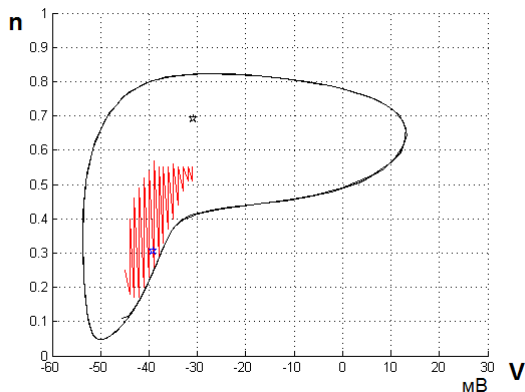


Рис. 9. Особые точки системы (28), (29): верхняя особая точка — неустойчивый фокус  $(-30,957 \text{ мВ}; 0,692)$ , нижняя — устойчивый фокус  $(-39,113 \text{ мВ}; 0,305)$  с областью притяжения (показана штриховой линией)

ния (Рис. 9), система (28), (29) при постоянном входном синаптическом токе, принадлежащем этому интервалу, является бистабильной грубой динамической системой (по классификации Понтрягина – Андропова).

## 5. Решение задачи о переходе из области ожидания механического стимула в область генерации информационного ответа первичного нейрона

**5.1. Коррекция активности афферентного первичного нейрона вестибулярного аппарата.** Одной из базовых частей бионавигационной системы человека являются вестибулярные механорецепторы [6]. Рассмотрим выходной блок любого из них, представленный в виде упрощенной и модифицированной модели Ходжкина–Хаксли (28), (29) при наличии микротока коррекции  $P(t)$ , создаваемого с помощью гальванической стимуляции при  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m \frac{dV}{dt} = I_{\text{syn}} + \gamma_1 P(t) - g_L(V - V_L) - \\ \quad - g_{\text{Na}}(m_\infty(V))^3(C(V) - n)(V - V_{\text{Na}}) - \\ \quad - g_K n^4 h_K(V - V_K), \\ \frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(V) - n}{\tau_n(V)} Q_{10}. \end{array} \right. \quad (30)$$

В левой окрестности точки бифуркации имеем асимптотически устойчивый фокус и асимптотически орбитально-устойчивый предельный цикл, в правой окрестности – глобально асимптотически орбитально-устойчивый предельный цикл. На интервале бифуркации  $I_{\text{syn}} \in [0, 99; 1, 147)$  устойчивый фокус находится внутри предельного цикла.

На Рис. 10 представлены эти два аттрактора при  $I_{\text{syn}} = 0,99 \frac{\mu A}{cm^2}$ :

а) устойчивый фокус ( $V_0 = -39,113$  мВ,  $n_0 = 0,305$ ) с областью притяжения  $A$ , полученной построением предельного цик-

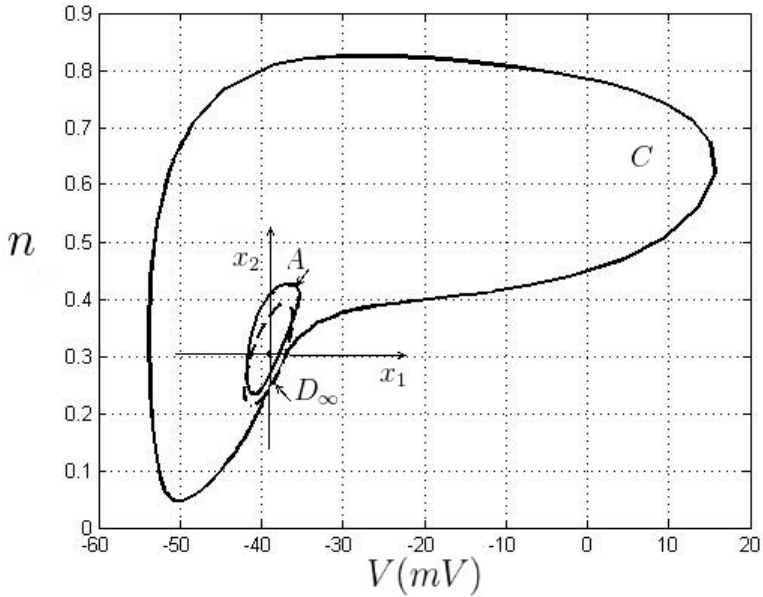


Рис. 10

ла, являющегося асимптотически орбитально-устойчивым в обратном времени;

б) глобально орбитально-устойчивый предельный цикл  $C$  — основной аттрактор, формирующий релаксационные автоколебания (спайки) системы (30).

Построим множество достижимости устойчивого фокуса в рамках линейной модели. Введем локальную систему координат  $\{x_1, x_2\}$  с центром в устойчивом фокусе  $(y_1^0, y_2^0)$  (Рис. 10). В этой системе рассмотрим точки, принадлежащие множеству достижимости  $D_\infty$  возмущаемой стабильной системы в отклонениях (22) при  $A_0 = \frac{\partial \phi^0(y^0)}{\partial y}$ ,  $A_1 = 0$ .

Решая задачу Булгакова о максимальном отклонении [1], получаем множество достижимости  $D_\infty$ , представленное на Рис. 10 и Рис. 11 пунктирной линией, и находим точки  $M(x_1^0, x_2^0)$  и  $N(\Delta y_1^0, \Delta y_2^0)$  (Рис. 11), соответствующие положительной дистанции Хаусдорфа, что является решением задачи перехода.

Алгоритм гальванической коррекции активности первичного нейрона в соответствии с решением этой задачи о переходе — это периодическая функция, частота которой равна частоте обычного резонанса для колебательной системы в отклонениях (22) при  $I_{\text{syn}} = 0,99 \frac{\mu A}{\text{cm}^2}$ ,  $P(t) = \frac{1}{2} I_{\text{syn}} \text{sign}(\sin \omega t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ . Интенсивность гальванического тока (30)  $\gamma_1 = 0,2$ .

Математическая модель (22) соответствует первой гипотезе о влиянии гальванического стимула на изменение синаптического тока. Существует и вторая гипотеза, согласно которой гальвани-

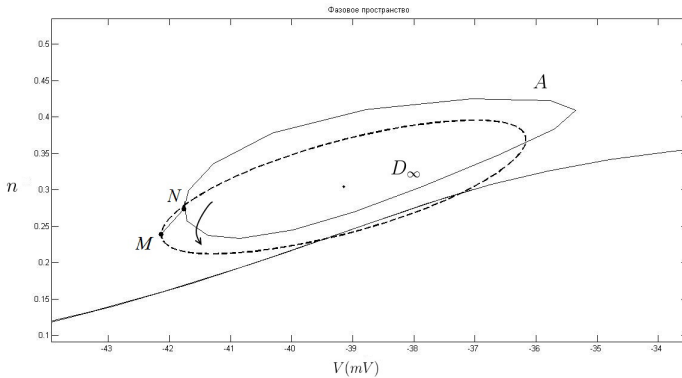


Рис. 11

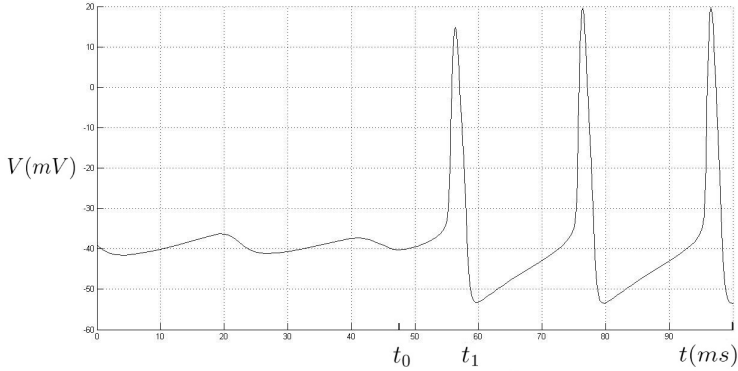


Рис. 12

ческая стимуляция влияет и на проводимость ионных каналов, что соответствует системе (22) при  $A_1 \neq 0$ .

Выше представлено возможное решение задачи гальванической коррекции активности первичного афферентного нейрона. В начальный момент система (30) находится в области притяжения  $A$  в процессе ожидания механического стимула. Ввиду его отсутствия на входе вестибулярного механорецептора гальваническая стимуляция (при  $t \in [t_0, t_1]$ ) выходного блока, каковым является первичный нейрон, позволяет реализовать активность этого первичного нейрона в виде пачки спайков (Рис. 12). Реализация данной активности соответствует в технике коррекции инерциальной навигационной системы по выходу при наличии дополнительной информации. Таким образом, сделан первый шаг в обосновании гальванической коррекции вестибулярного аппарата.

В рамках модифицированной модели Ходжкина–Хаксли показано, что возможна коррекция активности афферентных первичных нейронов вестибулярного аппарата. На практике это может соответствовать двум вариантам:

1. Коррекция активности, для возможной гальванической имитации механического воздействия на биосенсоры вестибулярного аппарата пилота при тренировках на динамическом стенде, когда алгоритм динамической имитации не может реализовать механическое воздействие в силу ограниченности геометрических ресурсов [6].

2. Коррекция активности с целью уменьшения запаздывания в установке взора космонавта при визуальном управлении космическим объектом на орбите в условиях микрогравитации [13], когда наличие вестибулярного конфликта приводит к нарушению функционирования вестибулярного аппарата.

При этом коррекция в первом варианте является программной, зависящей от алгоритма динамической имитации управляемого полета, а коррекция во втором варианте зависит от сигнала с микроакселерометра (или микровиброгироскопа), установленного на шлеме космонавта. Таким образом, имеем два варианта коррекции – программный и формируемый по показаниям технического сенсора.

**5.2.** Следует отметить, что второй вариант также имеет место и на Земле, когда у людей пожилого возраста при нарушениях функционирования вестибулярного аппарата происходит потеря вертикальной позы.

Если система (28)–(29) при  $I_{syn} \equiv \text{const} \in [0,99; 1,147)$  находится в области притяжения устойчивого фокуса, то можно говорить о режиме ожидания механического воздействия. Наличие такого режима функционирования составляет принципиальное отличие вестибулярного механорецептора, являющегося инерциальным механорецептором, от технических инерциальных сенсоров.

## **6. Порядок выполнения лабораторной работы компьютерного практикума**

**6.1.** Нахождение особых точек при  $I_{syn} = 0,97; 0,98; \dots; 1,15$  (19 точек) с точностью до 3 знака после запятой и определение собственных чисел матрицы  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 19$ ).

**6.2.** Нахождение в интервале  $I_{syn} (1,14 - 1,15)$  точки бифуркации Андронова–Хопфа с точностью до 4 знака после запятой.

**6.3.** Нахождение асимптотически устойчивого по Пуанкаре предельного цикла в обратном времени при  $I_{syn} = 0,99; \dots; 1,05$  и начальных условиях в окрестности особой точки, найденной в пункте 6.1.

**6.4.** Нахождение асимптотически устойчивого по Пуанкаре предельного цикла в прямом времени при  $I_{syn} = 0,99; \dots; 1,05$  и начальных условиях во внешней окрестности предельного цикла, найденного в пункте 6.3.

**6.5.** При  $I_{syn} = 0,99; \dots; 1,05$  написать уравнения в вариациях по начальным условиям в окрестности точечного аттрактора и корректирующему аддитивному параметру (гальванический ток)  $P(t) = p \sin(qt)$ , ( $p = 0,05$ ;  $q$  – собственная частота однородной системы в вариациях). Построить предельный цикл, являющийся границей множества достижимости возмущаемой неоднородной системы в вариациях.

**6.6.** Найти расстояние Хаусдорфа между двумя множествами, построенными в пунктах 6.3 и 6.5.

**6.7.** При положительном значении расстояния Хаусдорфа, начальных условиях для нелинейной модели Ходжкина–Хаксли из области притяжения точечного аттрактора и корректирующем параметре из пункта 6.5 найти время перехода и построить график перехода на фазовой плоскости  $\{v, n\}$  и плоскости  $\{t, v\}$ .







(32). В системе (28)–(29) — это наличие периодического аттрактора при постоянном  $I_{\text{syn}} \in [0.99; 1.147]$  мА/см<sup>2</sup>. Следовательно, этот интервал можно назвать условно ”интервалом бифуркации”, так как область притяжения фокуса постепенно уменьшается до нуля при наличии периодического аттрактора.

## 8. Сравнение множеств достижимости линейной и билинейной систем

Сравним оценку  $\chi_1$  (15) качества робастной устойчивости невозмущенного состояния системы (13) и оценку  $\chi_2$  (19) качества робастной устойчивости невозмущенного состояния системы (16) при различных значениях  $\mu$ .

При малых  $\delta_1$  можно получить следующие оценки качества:  $\chi_1 = 6,39$ ,  $\chi_2 = 6,47$  при  $\mu = 0,1$ ;  $\chi_1 = 1,39$ ,  $\chi_2 = 1,46$  при  $\mu = 0,5$ ;  $\chi_1 = 1$ ,  $\chi_2 = 1$  при  $\mu = 0,99$ .

Сравнение предельных циклов систем (13) и (16) при различных значениях  $\mu$  для  $\delta_1 = 0.1$  представлены на Рис. 14–16. Здесь предельный цикл системы (13) показан точечной линией, а предельный цикл системы (16) показан сплошной линией.

Проведенное сравнение имеет ясный физический смысл —

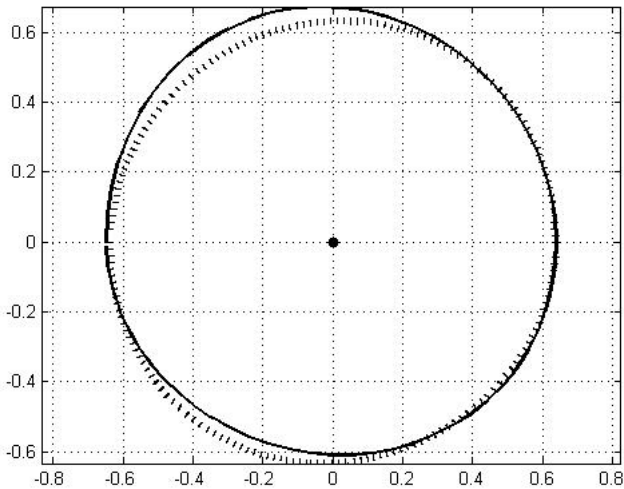


Рис. 14. Предельный цикл при  $\mu = 0,1$ .

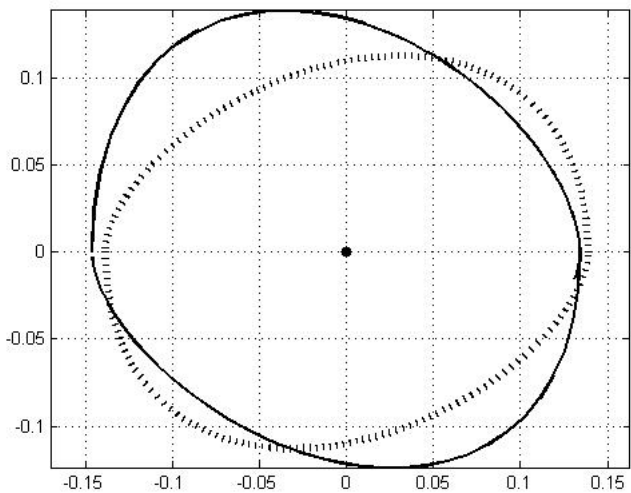


Рис. 15. Предельный цикл при  $\mu = 0,5$ .

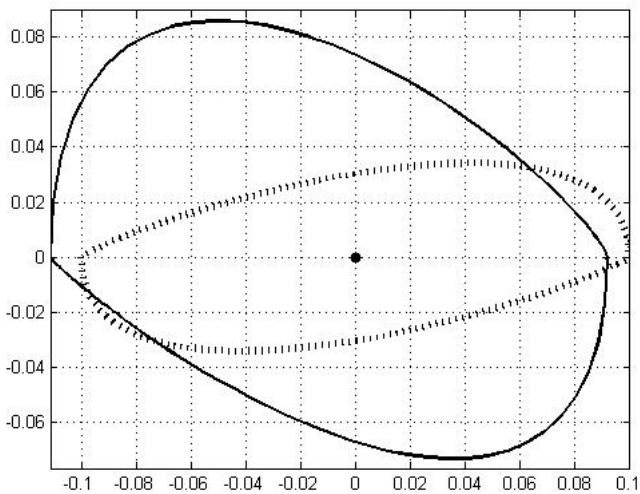


Рис. 16. Предельный цикл при  $\mu = 0,99$ .

чем больше сила трения в системе, тем лучшая получается оценка качества робастной устойчивости. Соответственно, тем меньше множества достижимости  $D_\infty$  для обеих систем. Более того, при увеличении  $\mu$  множества достижимости  $D_\infty$  обеих систем все более различаются между собой.

## 9. Построение оценки области достижимости линейной системы

Построение точной границы множества достижимости в общем случае является сложной задачей. Поэтому при решении ряда задач можно использовать аппроксимации (внутренние и внешние) этого множества. Приведем некоторые способы построения таких аппроксимаций.

Рассмотрим линейную стационарную систему вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (33)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  —  $n$ -мерный вектор координат системы;  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно;  $u = (u_1, \dots, u_m)^T$  принадлежит множеству  $L_\infty$  измеримых ограниченных функций,  $\sup_{0 \leq t < \infty} (u^T(t)u(t)) \leq 1$ . Матрица  $A$  предполагается гурвицевой, т. е. действительные части корней характеристического уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$  отрицательны, где  $E$  — единичная матрица. Требуется получить оценку множества достижимости системы (33). Следуя [10], под множеством достижимости будем понимать область в пространстве состояний динамической системы, состоящую из точек, в которые за конечное время может прийти траектория системы, выходящая из начала координат, используя допустимое управление.

Известно, что аппроксимацию сверху области достижимости можно получить, используя теорию линейных матричных неравенств [10]. Согласно этой теории, множество достижимости системы (33) содержится в эллипсоиде

$$x^T P^{-1} x \leq 1, \quad (34)$$

где  $P(\alpha) = P^T(\alpha) > 0$  — решение линейного матричного уравнения

$$AP + PA^T + \alpha P + \alpha^{-1} BB^T = 0, \quad \alpha > 0. \quad (35)$$

Далее, решая однопараметрическую задачу оптимизации

$$\min_{\alpha > 0} \text{Tr}[P]$$

или

$$\min_{\alpha > 0} \det[P]$$

мы получим матрицу, задающую инвариантный эллипсоид с наименьшим следом или наименьшим объемом. Этот эллипсоид содержит в себе множество достижимости системы (33), когда допустимое управление принадлежит множеству измеримых функций, ограниченных по норме в  $L_\infty$  единицей.

Схожим образом можно получить аппроксимацию снизу. Для этого зададим положительно-определенную функцию  $V(x) = x^T Lx$ , где матрица  $L$  симметричная, положительно-определенная, с вещественными элементами, такая, что  $L^T = L > 0$ , и найдем ее производную в силу (33):

$$\dot{V} = x^T A^T Lx + x^T LAx + 2u^T B^T Lx.$$

Пусть  $\Omega$  — множество точек, принадлежащих одновременно эллипсоиду  $x^T Lx \leq 1$  и множеству  $x^T LBB^T Lx \leq 1$ . Можно доказать утверждение, что множество  $\Omega$  целиком содержится внутри множества достижимости системы (33), если для любой точки из  $\Omega$ , за исключением начала координат, выполнено неравенство

$$\max_{u^T u \leq 1} \dot{V} = x^T A^T Lx + x^T LAx + 2 \max_{u^T u \leq 1} (u^T B^T Lx) > 0. \quad (36)$$

Последнее слагаемое в этом неравенстве представляет собой скалярное произведение векторов  $u$  и  $B^T Lx$ , и поэтому максимум на шаре  $u^T u \leq 1$  в случае  $B^T Lx \neq 0$  достигается при  $u = \frac{B^T Lx}{\sqrt{x^T LBB^T Lx}}$ , а при  $B^T Lx = 0$  можно взять  $u = 0$ , т. е.

$$\max_{u^T u \leq 1} \dot{V} = \begin{cases} x^T A^T Lx + x^T LAx + 2 \frac{x^T LBB^T Lx}{\sqrt{x^T LBB^T Lx}}, & B^T Lx \neq 0; \\ x^T A^T Lx + x^T LAx, & B^T Lx = 0. \end{cases}$$

Всюду в области  $x^T LBB^T Lx \leq 1$  имеем

$$\max_{u^T u \leq 1} (u^T B^T Lx) \leq x^T LBB^T Lx,$$

и поэтому выполнение условия

$$x^T A^T Lx + x^T LAx + 2x^T LBB^T Lx > 0 \quad (37)$$

автоматически влечет за собой выполнение условия (36) (в том числе и для случая  $B^T Lx = 0$ ). Условие (37) может быть записано в форме матричного неравенства

$$A^T L + LA + 2LBB^T L > 0, \quad (38)$$

которое после умножения слева и справа на матрицу  $Q = L^{-1} \neq 0$  превращается в линейное матричное неравенство

$$QA^T + AQ + 2BB^T > 0. \quad (39)$$

Можно показать, что множество  $S = \{x \in R^n | x^T Q^{-1} x \leq 1, x^T Q^{-1} B B^T Q^{-1} x \leq 1\}$ , где  $Q = Q^T > 0$  удовлетворяет линейному матричному неравенству (39), принадлежит множеству достижимости системы (33), если эта система вполне управляема.

**Утверждение.** Если существует матрица  $Q = Q^T > 0$ , такая, что выполняется линейное матричное неравенство (39), то множество достижимости вполне управляемой системы (33) содержит в себе множество  $S = \{x \in R^n | x^T Q^{-1} x \leq 1, x^T Q^{-1} B B^T Q^{-1} x \leq 1\}$  [7].

В некоторых случаях можно говорить о "супремальном" (предельном или граничном) решении неравенства (39), т. е. матрице  $Q^* = Q^{*T} > 0$ , такой, что

$$Q^* A^T + A Q^* + 2 B B^T = 0.$$

Тогда множество достижимости вполне управляемой системы (33) будет содержать в себе "супремальное" множество  $S = \{x \in R^n | x^T Q^{*-1} x < 1, x^T Q^{*-1} B B^T Q^{*-1} x < 1\}$ ; вопрос о принадлежности границы  $\partial S$  области достижимости должен рассматриваться отдельно.

**Пример.** Рассмотрим уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + \omega^2 x = u, \quad |u| \leq 1, \quad (40)$$

полагая  $\varepsilon > 0$ ,  $\omega^2 > 0$ . Введем переменные  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  и представим (40) в виде (33). Получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$ , тогда неравенство (39) примет вид

$$\begin{pmatrix} 2q_{12} & -\omega^2 q_{11} - 2\varepsilon q_{12} + q_{22} \\ -\omega^2 q_{11} - 2\varepsilon q_{12} + q_{22} & -2\omega^2 q_{12} - 4\varepsilon q_{22} + 2 \end{pmatrix} > 0,$$

что эквивалентно системе двух скалярных неравенств

$$q_{12} > 0,$$

$$2q_{12}(-2\omega^2 q_{12} - 4\varepsilon q_{22} + 2) > (-\omega^2 q_{11} - 2\varepsilon q_{12} + q_{22})^2,$$

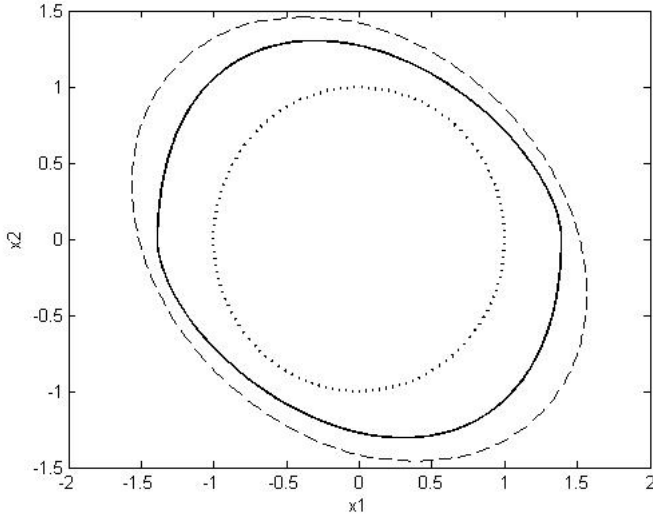


Рис. 17. Точная граница множества достижимости для системы (40), а также ее внешняя и внутренняя аппроксимации.

которую следует дополнить условиями положительной определенности матрицы  $Q$

$$q_{11} > 0, \quad q_{11}q_{22} > q_{12}^2.$$

”Супремальное” решение

$$Q^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\varepsilon\omega^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad L = Q^{*-1} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon\omega^2 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

задает внутренность эллипса

$$2\varepsilon\omega^2 x_1^2 + 2\varepsilon x_2^2 < 1. \quad (41)$$

Условие  $x^T Q^{*-1} B B^T Q^{*-1} x < 1$  превращается в условие

$$-\frac{1}{2\varepsilon} < x_2 < \frac{1}{2\varepsilon}. \quad (42)$$

Примем в системе (40)  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\omega^2 = 1$  и построим оценку для области достижимости. Заметим, что при выбранных значениях параметров область (41) целиком лежит внутри области (42).

На Рис. 17 сплошной линией показана точная граница области достижимости, построенная по методу [5], изложенному выше.

Внешняя аппроксимация (изображена на Рис. 17 пунктирной линией) построена как эллипсоидальная оценка (34) инвариантного множества [10] с численной минимизацией следа матрицы  $P(\alpha)$ , удовлетворяющей уравнению (35). С помощью пакета Matlab были найдены минимизирующее значение  $\alpha = 0,4619$  и соответствующее решение  $P(\alpha)$  уравнения (35):

$$P = \begin{pmatrix} 2,4461 & -0,5649 \\ -0,5649 & 2,1422 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4353 & 0,1148 \\ 0,1148 & 0,4971 \end{pmatrix}.$$

Внутренняя оценка области достижимости как "супремальный" эллипсоид (41) представлена на Рис. 17 точечной линией.

Для построения оценок множества достижимости можно также пользоваться условиями [9], задающими области супер- и суб-достижимости (оптимальные оценки сверху и снизу). Для построения точной границы области достижимости абсолютно колебательной системы второго порядка можно воспользоваться методом, представленным в [5] и изложенным выше.



## Литература

- [1] *Александров В.В.* К задаче Булгакова о накоплении возмущений. // Докл. АН СССР. Сер. Кибернетика. 1969. 186, №3. 70-73.
- [2] *Александров В.В., Морозова О.И.* Об абсолютной устойчивости систем 2-го порядка // Автоматика и телемеханика. 1985. № 8. 161-164.
- [3] *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М.* Оптимальное управление движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [4] *Александров В.В., Александрова О.В., Коноваленко И.С., Тихонова К.В.* Возмущаемые стабильные системы на плоскости, I // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 5. 30-36.
- [5] *Александров В.В., Александрова О.В., Приходько И.П., Темолтзи-Авила Р.* О синтезе автоколебаний. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. № 3. 41-44.
- [6] *Александров В.В., Александрова Т.Б., Тихонова К.В. и др.* Алгоритм коррекции выходного сигнала вестибулярного механорецептора для имитации пассивных поворотов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2015. № 5. 130-134.
- [7] *Бугров Д.И.* Оценка множества достижимости линейной системы с помощью линейного матричного неравенства // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 6. 51-55.
- [8] *Жермоленко В.Н.* Предельные циклы на фазовой плоскости. Сборник "Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение" под ред. В.В. Александрова. Изд-во МГУ. 1993.
- [9] *Овсеевич А.И.* "Области достижимости управляемых систем, их свойства, аппроксимации и применения": докт. дис. М., 1996.
- [10] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: "Наука", 2002.
- [11] *Рубин А.Б.* Биофизика. 2000. Т.2.

- [12] *Садовничий В.А., Александров В.В., Тихонова К.В. и др.* Математическое моделирование коррекции выходного сигнала с гравитоинерциального механорецептора вестибулярного аппарата // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 5. 54-59.
- [13] *Садовничий В.А., Александров В.В., Тихонова К.В. и др.* Патент РФ №2500375 Устройство автоматической коррекции установки взора человека при визуальном управлении движением в условиях микрогравитации. М. 2013.
- [14] *Симму Э.* Хаотические переходы в детерминированных и стохастических системах. Москва. ФИЗМАТЛИТ. 2007.
- [15] *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. 2009. М.: Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика".
- [16] *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и дифференциальное исчисление. М.: УРСС. 2000.
- [17] *Andronov, A.A. and Pontryagin, L.S.* Systemes grossieres, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1937, 14(5), 245-251.
- [18] *Konovalenko I.S.* Robust Stability of the Oscillating System with Permanent Perturbation. Thesis of Master of Science. BUAP. Mexico. 2016.

## ДЛЯ ЗАМЕТОК

*Учебное издание*

Александров Владимир Васильевич  
Бугров Дмитрий Игоревич  
Тихонова Катерина Владимировна

**Задачи о детерминированном и хаотическом переходах  
в бистабильных системах на плоскости**

**Часть 1.**

**Детерминированный переход в бистабильной системе.  
Компьютерный практикум**

*Оригинал макет изготовлен издательской группой  
механико-математического факультета МГУ*

Подписано в печать 02.10.2017 г.  
Формат 60×90 1/16. Объем 3,0 п.л.  
Тираж 100 экз.

---

Издательство Московского университета  
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр. 15  
(ул. Академика Хохлова, 11).  
Тел.: (495) 939-32-91; e-mail: secretary@msupress.com

Отдел реализации  
Тел.: (495) 939-33-23; e-mail: zakaz@msupress.com

Сайт Издательства МГУ: <http://msupress.com>

---

Отпечатано на типографском оборудовании  
механико-математического факультета МГУ