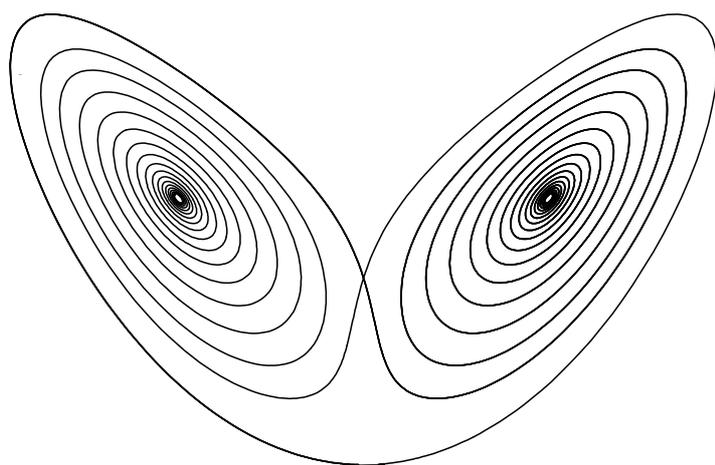


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет



АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА

ЗАДАЧА
СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКЕ

Электронная версия для damc.ru

2022

ЗАДАЧА СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА

Н.В. Куликовская, В.М. Морозов

Под редакцией

*профессора Владимира Васильевича Александрова, профессора
Юрия Владимировича Болотина*

Рецензент Игорь Леонидович Антонов

Редактор	Степан Степанович Лемак
Верстка	Маргарита Дмитриевна Белоусова Анна Павловна Кручинина
Иллюстрации	Алена Павловна Кручинина

Исправления и пожелания принимаются на a.kruch@moids.ru

АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА

Н.В. Куликовская, В.М. Морозов

Целью работы является ознакомление с явлением возникновения хаотического поведения в автономных динамических системах с детерминированными уравнениями движения. Изучение этого явления осуществляется методами теории колебаний и с помощью моделирования уравнений аттрактора Лоренца на аналоговой и цифровой вычислительных машинах.

Введение

О хаотических движениях детерминированных динамических систем правомерно рассказывать с позиций теории колебаний, используя такие ее общие методы исследования, как определение координат особых точек, проверку их устойчивости, нахождение возможных периодических режимов. Ранее считалось, что случайность в изменении выхода динамических систем обусловлена только случайностью внешних воздействий, когда система только преобразует одни случайные процессы в другие, и что с исчезновением входного случайного сигнала (например, если его дисперсия стремится к нулю) исчезает и случайность процесса на выходе. Основной задачей при исследовании таких систем является определение статистических характеристик выхода по известным статистическим характеристикам входного воздействия. Выяснилось, однако, что иногда при стремлении дисперсии входного сигнала к нулю дисперсия выхода остается конечной. Это означает, что существуют детерминированные системы, которые являются генераторами стохастичности. Статистические характеристики их выхода целиком определяются динамическими свойствами самой системы. Как правило, в таких системах при одних значениях ее параметров нет хаоса и система имеет простейшие состояния равновесия или периодические режимы, но при других параметрах появляются хаотические движения. Возможность существования непериодических установившихся движений у системы третьего порядка описана в работе Э. Лоренца в 1963 году. (Имеется перевод этой работы [1]). Но еще в 50–60-х годах учеными горьковской школы теории нелинейных колебаний применялись методы точечных отображений для теоретического исследования механизма возникновения хаотических движений в конкретных системах. Эти методы позволили получать результаты без

применения вычислительных машин (которых не было в то время). Термины «хаотические движения» и «странный аттрактор» появились позднее, во второй половине 70-х годов.

§1. Аттракторы в системах с одной степенью свободы

В математической литературе можно найти ряд строгих формулировок термина «аттрактор». Мы будем использовать определение в следующей форме: Аттрактор (англ. attract — привлекать, притягивать) — ограниченное, замкнутое подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$.

Существуют ли такие «притягивающие» объекты в динамической системе с одной степенью свободы?

Рассмотрим поведение фазовых траекторий консервативных систем. Простейшим из таких уравнений является уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1.1)$$

решением которого являются функции: $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \Delta_0)$, описывающие колебания с постоянной круговой частотой ω_0 и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Амплитуда a и фаза Δ_0 зависят от начальных условий, причем малое изменение величин $x(0)$ и $\dot{x}(0)$ приводит к малому изменению решения на всей временной полуоси ($0 \leq t < \infty$).

В начале XX века стало ясно, что для описания многих явлений и процессов в физике, технике и биологии линейных моделей недостаточно. Начала развиваться теория нелинейных колебаний. Во многих задачах периодические процессы уже не представлялись простыми гармоническими колебаниями, а имели периоды, зависящие от амплитуды колебаний, которая, в свою очередь, определялась начальными условиями. Простейшим примером такого типа колебаний является движение математического (физического) маятника, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (1.2)$$

где φ — угол отклонения плоского маятника от нисходящей вертикали, $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ (g — ускорение свободного падения, l — длина маятника). При малых углах φ (когда $\sin \varphi \approx \varphi$) уравнение (1.2) переходит в уравнение (1.1) и период колебаний не зависит от амплитуды. Для конечных углов отклонения, когда $a = \varphi_0$, $\varphi_0 < \pi$, период колебаний зависит от

амплитуды и может быть выражен в виде ряда

$$T = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right], \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.3)$$

Если ограничиться в формуле (1.3) двумя первыми членами, то, полагая $\sin \frac{\varphi_0}{2} \cong \frac{\varphi_0}{2}$, получим приближенное выражение:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right],$$

т. е. чем больше начальное отклонение, тем больше период (например, когда маятник колеблется с амплитудой 90° , период составит $1,154 T_0$).

Уравнения (1.1), (1.2) представляют собой частные случаи дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (1.4)$$

Эти уравнения описывают движение консервативных систем с одной степенью свободы, когда полная энергия системы сохраняется. Интеграл энергии для уравнения (1.4) имеет вид:

$$h = T(\dot{x}) + \Pi(x) = \text{const},$$

где $\Pi(x) = \int_{t_0}^t f(x) \dot{x} dt = \int_{x_0}^x f(x) dx$ — потенциальная энергия, $T(\dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2}$ — кинетическая энергия.

Если в консервативной системе существует периодическое колебательное движение, то таких движений бесконечно много и определяются они значением полной энергии при заданных начальных условиях. На фазовой плоскости (x, \dot{x}) этим периодическим движениям соответствуют замкнутые траектории, расположенные «всюду плотно», т. е. на сколь угодно малом расстоянии от данной замкнутой кривой находятся другие замкнутые траектории. Такая картина на фазовой плоскости соответствует окрестности особой точки типа «центр», т. е. у консервативных систем (1.1), (1.2), (1.4) аттрактора нет, так как нет траекторий, притягивающих к себе соседние.

Диссипация энергии, обусловленная наличием потерь энергии, изменяет характер движения систем. Если в уравнения (1.1), (1.2), (1.4) ввести член, соответствующий потере энергии в системе с вязким трением, то начало координат на фазовой плоскости превратится в устойчивый фокус — единственное глобально устойчивое состояние равновесия. Независимо от начальных условий в системе будут наблюдаться затухающие колебания или аperiodическое движение к началу координат, т. е.

в неконсервативной системе есть притягивающее состояние (аттрактор) в виде устойчивого состояния равновесия. Кроме этого, в задачах о колебаниях нелинейных неконсервативных систем с одной степенью свободы, описываемых уравнениями вида

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad (1.5)$$

важную роль играют замкнутые изолированные траектории на фазовой плоскости, которые называются *предельными циклами*. Наличие устойчивого предельного цикла свидетельствует о том, что в системе возможно установление незатухающих периодических колебаний. Амплитуда и период этих колебаний зависят только от факта принадлежности начальных условий определенной области фазового пространства, которое определяется значениями параметров системы. Такие периодические движения А.А. Андронова назвал *автоколебаниями* [2].

Автоколебательные системы могут при некоторых значениях своих фазовых координат получать порцию энергии от внешнего постоянного источника, чтобы пополнить запас энергии, расходуемой на остальной части колебательного цикла. Классическим примером нелинейной колебательной системы, обладающей предельным циклом, является уравнение Ван дер Поля [3]:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.6)$$

В течение нескольких десятилетий модели линейных колебаний и модели нелинейных колебаний с предельными циклами были достаточны для решения инженерных задач. Тому способствовали и математические результаты, полученные для автономных систем второго порядка. Известная теорема Пуанкаре—Бендиксона утверждает, что единственно возможные виды изолированных, ограниченных стационарных движений в этих системах — это либо состояния равновесия, либо предельные циклы. Эти два вида асимптотически устойчивых стационарных движений являются простейшими аттракторами — притягивающими множествами в пространстве состояний систем с одной степенью свободы.

§2. Хаотические аттракторы

В 70-х годах XX века, когда было обнаружено, что в нелинейных автономных детерминированных системах третьего и более высокого порядка могут возникать нерегулярные колебания, напоминающие случайные, в науку вошло понятие «детерминированный хаос». Такие системы были названы хаотическими, а их притягивающие множества (отличающиеся от положений равновесий и предельных циклов) были названы странными аттракторами. В последующие годы было установлено, что хаотическое поведение присуще большому числу природных и технических систем. Движение таких систем не всегда возможно предсказать на большой интервал времени. Еще А. Пуанкаре в очерке «Наука и метод» отмечал: «Иногда небольшая разница в первоначальных состояниях вызывает большие различия в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем, поэтому предсказание становится невозможным».

Прекрасной иллюстрацией системы, в которой возникают нерегулярные, хаотические движения, служат маятники в различных подвесах, забавные механические игрушки, движения которых приковывают к себе взгляд и завораживают, подобно текущей воде и огню костра. Следует подчеркнуть, что такое поведение не является ни следствием случайного возмущающего воздействия (такие воздействия не предусмотрены в конструкции систем), ни следствием бесконечного числа степеней свободы (эти конструкции описываются системами с конечным числом степеней свободы).

Причина появления хаотических движений состоит в существенной нелинейности динамической системы, которая обуславливает различные свойства ее решений в локальных окрестностях состояний равновесия и при достаточно большом удалении от них. Условием возникновения *странного аттрактора* является сочетание локальной неустойчивости всех состояний равновесия находящихся внутри области аттрактора с глобальным сжатием фазового пространства системы, приводящим все траектории в эту область. Глобальную ограниченность траекторий изображающей точки можно связать со свойством диссипативности системы, которое означает, что для каждого ее решения существует момент времени, после которого оно навсегда погружается в фиксированную сферу радиуса R [4]. Достаточным признаком сжатия фазового объема динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = F(t)$, является отрицательность дивергенции вектора фазовой скорости [8]:

$$\operatorname{div}F(x) < 0.$$

Неустойчивость состояний равновесия приводит к тому, что не сохраняется близость невозмущенной и возмущенной фазовых траекторий. В хаотической системе сколь угодно малое начальное расхождение между двумя траекториями не остается малым, а в течение некоторого времени растет экспоненциально. Интересно отметить, что поскольку система детерминирована, то хаотическая траектория может быть полностью повторена, только если воспроизвести абсолютно точно начальные условия. Однако на практике это невозможно, так как начальные условия можно знать лишь с определенной точностью, так же как и проводить вычисления, а поэтому невозможно предсказать поведение хаотической системы на большом интервале времени.

Размерность три — наименьшая размерность гладкой (т. е. с дифференцируемыми правыми частями) автономной динамической системы, в которой возможна хаотизация движений.

§3. Аттрактор Лоренца

В качестве системы, обладающей хаотическим поведением, рассмотрим ставший классическим пример — так называемый «аттрактор Лоренца».

В 1963 году специалист по физике атмосферы Е. Н. Лоренц из Массачусетского технологического института предложил простое описание тепловой конвекции в атмосфере, которое, как впоследствии выяснилось, стало хорошей моделью для изучения турбулентности и решения вопроса о том, возможен ли долгосрочный прогноз погоды.

Фактически до работы Лоренца ненадежность прогноза погоды объясняли тем, что лаборатория имеет не последнюю, а предпоследнюю модель компьютера и, к тому же, сотрудники лаборатории не очень трудолюбивы. Иными словами, раньше полагали, что в детерминированной системе при наличии мощной ЭВМ всегда возможно предвидеть состояние системы (например, дать надежный прогноз погоды), несмотря на малые погрешности измерения начальных условий, которые всегда существуют на практике. Однако, как мы теперь понимаем, никакой компьютер не сможет дать точный прогноз погоды на основе математической системы со *странным аттрактором*.

Прежде чем исследовать систему Лоренца, рассмотрим явление конвекции в жидкости (под жидкостью мы будем понимать и газообразную, и жидкую среду). Пусть слой жидкости толщиной H , ограниченный двумя горизонтальными поверхностями, располагается в гравитационном поле. На верхней поверхности поддерживается температура T_0 , а на

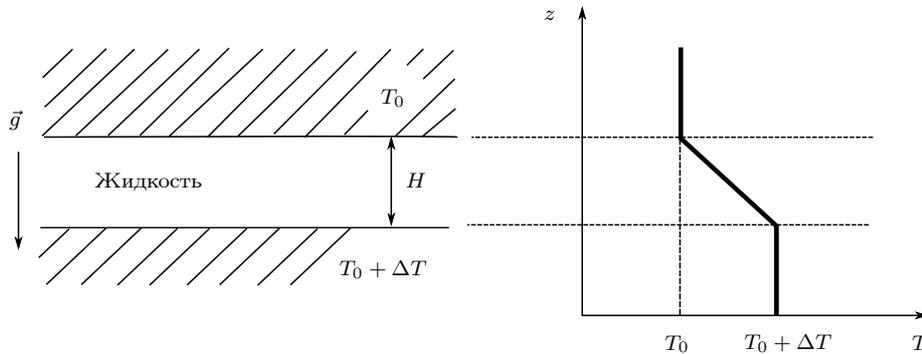


Рис. 1.1. Схема опыта Рэлея — Бенара [5]

нижней — $T_0 + \Delta T$, $\Delta T > 0$ (рис. 1.1). Таким образом, в слое жидкости существует постоянный градиент температуры, что иллюстрируется графиком на рис. 1.1.

В жидкости с определенным коэффициентом теплового расширения разность температур порождает разность плотностей. Поэтому жидкость между пластинами будет подвержена двум противоборствующим тенденциям. Холодная, более плотная, жидкость, которая располагается в верхней части слоя, стремится опуститься, в то время как нижняя часть слоя, более теплая и менее плотная, стремится подняться. Возникающее при этом движение жидкости называют тепловой конвекцией.

Конвективное движение жидкости впервые отчетливо наблюдалось в экспериментах 1901 года французского врача Бенара, который изучал роль вязкого трения в тепловой конвекции. Бенар наблюдал появление на поверхности подогреваемого снизу слоя жидкости ячеистой структуры, напоминающей пчелиные соты. Оказалось, что такая структура поверхности связана с движением, возникающим в первоначально покоящейся жидкости, когда жидкость в центре ячеек поднимается вверх, а на границах ячеек опускается вниз. Это явление было названо конвекцией Рэлея — Бенара, так как получило теоретическое объяснение в работах 1916 года английского физика, лауреата Нобелевской премии сэра Дж. Рэлея (1842–1919), который провел линейный анализ устойчивости стационарных состояний подогреваемого снизу бесконечного горизонтального слоя жидкости.

Если разность температур ΔT достаточно мала, то конвективное движение не возникает из-за стабилизирующих эффектов вязкого трения. При достижении определенной разности температур ΔT_C состояние покоя жидкости теряет устойчивость и начинается конвекция.

В атмосфере при значениях $\Delta T > \Delta T_C$ в результате конвекции формируется стационарная структура из восходящих и нисходящих потоков воздуха в виде валов с параллельными горизонтальными осями (рис. 1.2).

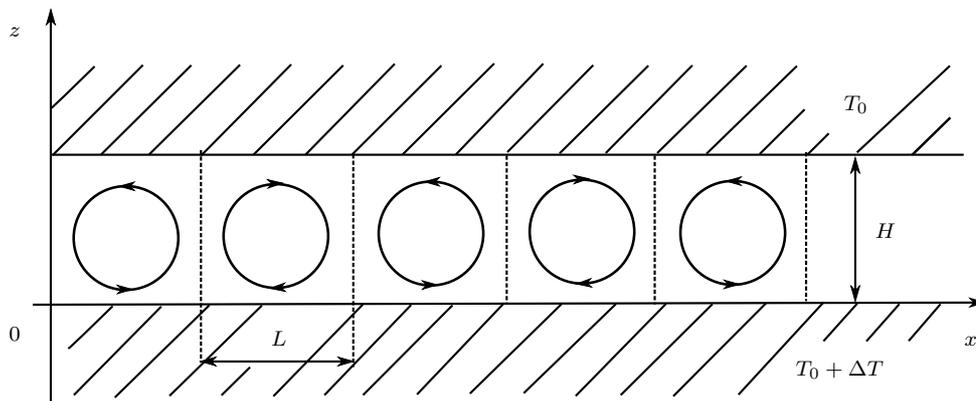


Рис. 1.2. Схема движения жидкости в конвективных валах [5]

Потоки расположены эквидистантно с пространственным периодом L . Два соседних вала вращаются в противоположные стороны; скорость и температура описываются функциями, не зависящими от времени. При дальнейшем увеличении разности ΔT структура становится более сложной, но сохраняет определенную регулярность. Однако при еще большем увеличении разности ΔT структура полностью разрушается и на смену упорядоченной стационарной структуре приходит непрерывно изменяющаяся неупорядоченная конфигурация: движение становится турбулентным [1].

Движение жидкости описывается системой уравнений с частными производными, а именно: уравнением Навье — Стокса, уравнением теплопроводности и уравнением неразрывности с соответствующими граничными условиями. Э. Лоренц сделал ряд допущений, которые позволили упростить исходную постановку задачи. Мы не будем рассматривать эти допущения и сам вывод уравнений. Отметим лишь, что в ходе вывода была получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно бесконечные системы решают методом редукции, т. е. ограничиваются определенным числом уравнений. Лоренц рассмотрел предельно возможное усечение бесконечной системы уравнений. В результате была получена система из трех обыкновенных нелинейных

дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= rx_1 - mx_2 - x_1x_3, \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= -bx_3 + x_1x_2.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Безразмерный вид (1.7) называют уравнениями Лоренца.

Физический смысл безразмерных параметров и переменных, входящих в систему (1.7), таков:

- $\sigma = \frac{\nu}{k}$ — число Прандтля — это отношение коэффициента кинематической вязкости ν к коэффициенту температуропроводности k (размерности коэффициентов ν и k одинаковы — $\text{м}^2/\text{с}$);
- $r = \frac{Ra}{Ra_c}$ — нормированное число Рэлея;
- $Ra = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{k\nu}$ — число Рэлея;
- g — гравитационная постоянная;
- β — коэффициент теплового расширения;
- $b = \frac{4}{1+a^2}$;
- безразмерное время в (1.7) введено как $\tau = \frac{\pi(1+a^2)kt}{H^2}$.

Переменная x_1 характеризует скорость вращения конвекционных валов; переменная x_2 определяет разность температур между восходящими и нисходящими потоками; переменная x_3 — отклонение вертикального температурного профиля от линейной зависимости.

Рэлей показал, что условию возникновения течения в виде валов отвечает определенное значение параметра $Ra_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$, где коэффициент $a = \frac{H}{L}$ определяется геометрией конвекционной ячейки, а именно, отношением ее вертикального H и горизонтального L размеров.

Замечание. В системе уравнений Лоренца (1.7) параметр m принимался равным единице, мы рассматриваем случай $0 \leq m \leq 1$.

Параметр r , который пропорционален разности температур ΔT между нижней и верхней поверхностями слоя, — управляющий параметр. Известно, что если r мало, то температура линейно меняется с высотой (т. е. $x_3 = 0$). Когда r возрастает, это решение становится неустойчивым, вместо него возникают устойчивые конвективные ячейки, внутри которых жидкость движется по замкнутым кривым. При дальнейшем росте

r эти ячейки теряют устойчивость, и движение жидкости становится хаотическим.

§4. Основные свойства системы уравнений Лоренца

Перечислим основные свойства уравнений Лоренца.

1. Замена переменных x_1, x_2, x_3 на $-x_1, -x_2, x_3$ не меняет вида уравнений, поэтому фазовый портрет симметричен относительно оси x_3 .

2. Область, где расположен аттрактор системы Лоренца, ограничена. Рассмотрим величину V квадрата длины радиуса-вектора от точки (x_1, x_2, x_3) до точки $(0, 0, \sigma + r)$:

$$V = x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - (\sigma + r))^2.$$

В силу уравнений Лоренца (1.7)

$$\frac{dV}{dt} = -2\sigma x_1^2 - 2mx_2^2 - 2b\left(x_3 - \frac{\sigma + r}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\sigma + r}{2}\right)^2.$$

Область F , где $\frac{dV}{dt} > 0$, ограничена поверхностью эллипсоида. Вне этой области $\frac{dV}{dt} < 0$. Рассмотрим сферу $S: V = K^2$ с таким большим радиусом, чтобы внутри нее оказался эллипсоид F . Тогда на поверхности S всюду $\frac{dV}{dt} < 0$, т. е. величина V убывает с течением времени. Это значит, что все траектории, пересекающие границу S , ведут внутрь ограниченной ею области. Поэтому аттрактор обязан располагаться внутри S .

3. Диссипативность системы Лоренца. Рассмотрим ансамбль областей, в которых располагаются начальные условия траекторий решений одинаковых уравнений Лоренца. Пусть Z_0 — начальный объем этого ансамбля, тогда во времени объем будет изменяться по закону $Z = Z_0 \exp(Dt)$, где $D = \operatorname{div}\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = -(m + b + \sigma) < 0$, и траектории начавшиеся во всех областях ансамбля должны оказаться внутри ограниченной области фазового пространства — аттракторе.

4. Состояния равновесия системы (1.7) определяются алгебраической системой уравнений:

$$\begin{cases} \sigma(x_2^0 - x_1^0) = 0, \\ rx_1^0 - mx_2^0 - x_1^0 x_3^0 = 0, \\ -bx_3^0 + x_1^0 x_2^0 = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

При любых значениях параметров однородная система (1.8) имеет нулевое решение:

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0. \quad (1.9)$$

При $r > m$ существуют еще два действительных решения:

$$O_1 : x_1^0 = x_2^0 = \sqrt{b(r-m)}, x_3^0 = r-m \quad (1.10)$$

и

$$O_2 : x_1^0 = x_2^0 = -\sqrt{b(r-m)}, x_3^0 = r-m. \quad (1.11)$$

5. Для исследования устойчивости решений (1.9), (1.10), (1.11) линеаризуем уравнения (1.7), полагая $x_1 = x_1^0 + \xi_1$, $x_2 = x_2^0 + \xi_2$, $x_3 = x_3^0 + \xi_3$ и пренебрегая произведениями ξ_i после подстановки их в исходные уравнения (1.7).

Линеаризованная в окрестности любого положения равновесия система уравнений движения имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\sigma\xi_1 + \sigma\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = (r-x_3^0)\xi_1 - m\xi_2 - x_1^0\xi_3, \\ \dot{\xi}_3 = x_2^0\xi_1 + x_1^0\xi_2 - b\xi_3. \end{cases} \quad (1.12)$$

В окрестности нулевого решения (1.9) линейная система (1.12) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\sigma\xi_1 + \sigma\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = r\xi_1 - m\xi_2, \\ \dot{\xi}_3 = -b\xi_3, \end{cases} \quad (1.13)$$

а в окрестности решений (1.10) и (1.11) в виде:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\sigma\xi_1 + \sigma\xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = m\xi_1 - m\xi_2 \pm \sqrt{b(r-m)}\xi_3, \\ \dot{\xi}_3 = \pm\sqrt{b(r-m)}\xi_1 \pm \sqrt{b(r-m)}\xi_2 - b\xi_3. \end{cases} \quad (1.14)$$

Характеристические уравнения линейных систем (1.13) и (1.14) запишем в виде $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$.

По критерию Гурвица действительные части всех корней соответствующих уравнений будут отрицательными при выполнении условий:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \quad (1.15)$$

Для тривиального решения (1.9) характеристическое уравнение системы (1.13):

$$\Delta(\lambda) = (\lambda + b)(\lambda^2 + (\sigma + m)\lambda + \sigma(m - r)) = 0 \quad (1.16)$$

и условия (1.15) выполняются при $0 < r < m$.

Для нетривиальных состояний равновесия (1.10) и (1.11) характеристическое уравнение системы (1.14) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + m)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - m) = 0, \quad (1.17)$$

и при $\sigma, b, m > 0, r > m$ критерий (1.15) приводит к следующему необходимому и достаточному условию асимптотической устойчивости:

$$(m + b - \sigma)r + \sigma(\sigma + b + 3m) > 0. \quad (1.18)$$

Условие (1.18) может нарушиться, только если $r \geq r^*$, где

$$r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3m)}{\sigma - m - b} \quad (1.19)$$

в предположении, что $\sigma > m + b$.

Значения параметра $r = r^*$ и $r = m$ соответствуют локальным бифуркациям, так как при этих значениях меняется состав и характер состояний равновесия системы.

§5. Результаты численных расчетов

Область аттрактора в рассматриваемой модели Лоренца имеет сложную топологическую структуру. Получить наглядную картину поведения фазовых траекторий во всем пространстве можно при моделировании уравнений на аналоговой или цифровой вычислительных машинах.

В исходной работе Лоренца приняты следующие числовые значения параметров уравнений Лоренца: $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, m = 1$.

Проведем численное и аналоговое моделирование при других значениях параметров: $\sigma = 0,2, b = 0,06, m = 0,003$.

Рассмотрим изменения характера фазовых траекторий уравнений системы Лоренца (1.12):

1. При $0 < r < m$ характеристическое уравнение (1.16) для линеаризованной системы около единственного состояния равновесия в начале координат имеет корни

$$\lambda_1 = -b; \lambda_{2,3} = -\frac{\sigma + m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma + m}{2}\right)^2 - \sigma(m - r)}, \quad (1.20)$$

которые все отрицательны, и, следовательно, начало координат есть особая точка типа «устойчивый узел», т.е. решение (1.9) системы (1.7) асимптотически устойчиво. На рис. 1.3 приводится вид проекций траекторий изображающей точки на плоскость (x_1, x_3) в окрестности начала координат для этого случая. Для того чтобы окрестность особой точки типа «узел» рассмотреть подробнее, приводится ее изображение в более крупном масштабе (на последнем кадре масштаб увеличен в 500 раз).

2. Значение параметра $r = m$ — точка локальной бифуркации, если $r > m$, то один из корней (1.20) становится положительным, состояние

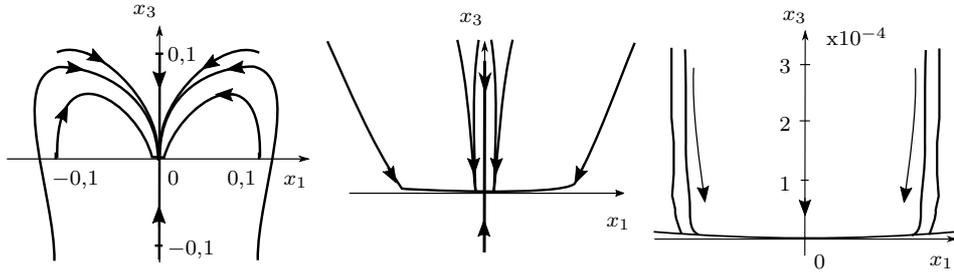


Рис. 1.3. Начало координат — устойчивый узел при $0 < r < m$

равновесия в начале координат становится неустойчивым седло-узлом и появляются еще два состояния равновесия (1.10), (1.11).

На рис. 1.4 построены три траектории $x_3(x_1)$ при $r = 0,24$. Одна из них начинается на оси x_3 и входит в начало координат, две другие симметричны и выходят из малой окрестности начала координат. Такие неустойчивые траектории седла называются *неустойчивыми сепаратрисами*. Они составляют одномерное (так как только один корень отрицателен) неустойчивое многообразие начала координат.

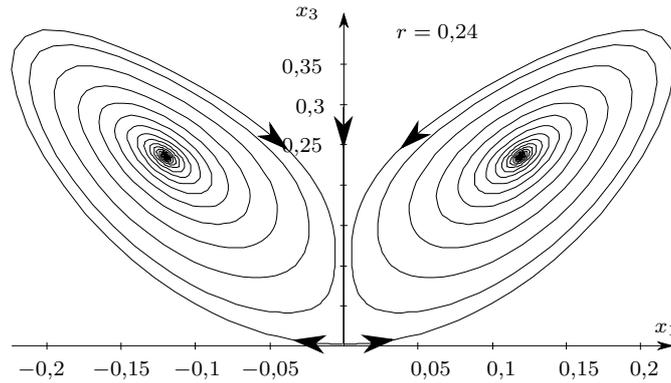


Рис. 1.4. Начало координат — седло-узел при $r > m$

Характеристическое уравнение (1.17) для линеаризованной системы уравнений Лоренца, около вновь появившихся состояний равновесия, имеет один действительный корень и пару комплексно-сопряженных корней. На рис. 1.5 показаны результаты численного исследования зависимости этих корней от параметра r . Действительный корень λ_1 уравнения (1.17) отрицателен. Его абсолютная величина растет с ростом r ; действительная часть комплексно сопряженных корней сначала отрицательна, с ростом r она уменьшается по абсолютной величине (что приводит ко все более медленному затуханию колебаний около состояний равновесия) и меняет знак при $r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3m)}{\sigma - m - b}$. Мнимая часть комплексно

сопряженных корней увеличивается с ростом r , т. е. растет частота колебаний около каждого из состояний равновесия (рис. 1.5).

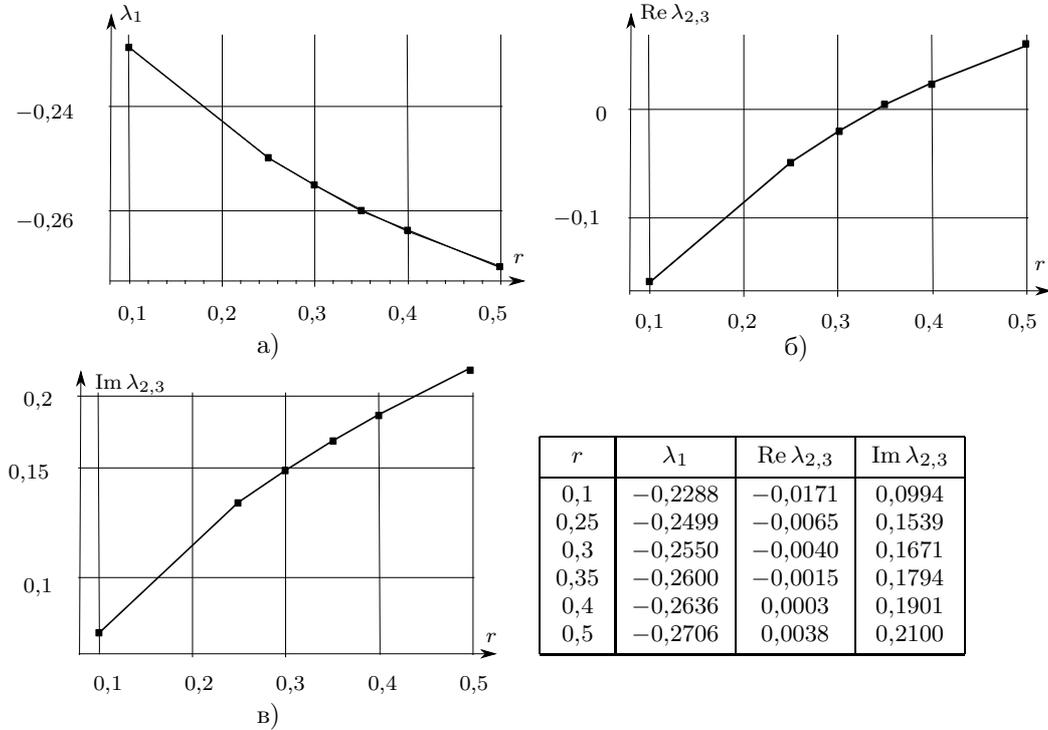


Рис. 1.5. Изменение корней характеристического уравнения (1.17) в зависимости от параметра r

На рис. 1.6 показан вид зависимости x_3 от x_1 при постепенном увеличении параметра r от 0,005 до 0,25 (в этом диапазоне состояния равновесия (1.10) и (1.11) устойчивы). Начальные значения всех координат сохранялись неизменными. На рисунке видно, что с ростом r амплитуда спиралевидных траекторий растет и увеличивается число оборотов вокруг каждого из устойчивых стационарных состояний.

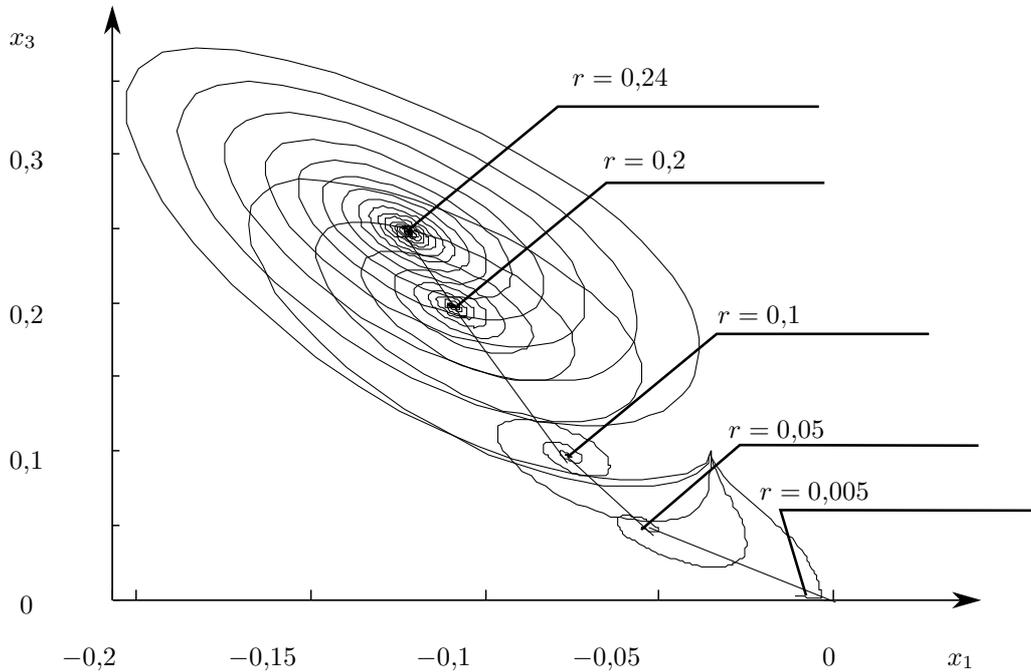


Рис. 1.6. Разбухание траекторий с ростом r от 0,005 до 0,24

§6. Возникновение гомоклинических траекторий

Понятие *гомоклинической траектории* означает, что траектория выходит и приходит в одно и то же положение равновесия. Рисунок 1.4 иллюстрирует ход двух симметричных траекторий ($r = 0,24$), начинающихся в окрестности начала координат при $x_1(0) = x_2(0) = \pm 0,005$, $x_3(0) = 0$, образующих два выходящих луча, и траектории с начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0,3$, которая входит в начало координат по устойчивому лучу седло-узла в начале координат.

Очевидно, что при дальнейшем увеличении параметра r две выходящие из окрестности нуля траектории попадут на входящую в нуль траекторию и могут образовать две гомоклинические траектории, которые будут иметь точки касания на входящем луче. То есть если траектория выходит из начала координат, то, совершив полный оборот вокруг одной из особых точек, она за бесконечное время вернется обратно в начальную точку: возникают две симметричные гомоклинические петли. В рассматриваемом случае это происходит при $r \approx 0,245818$ (см. рис. 1.7).

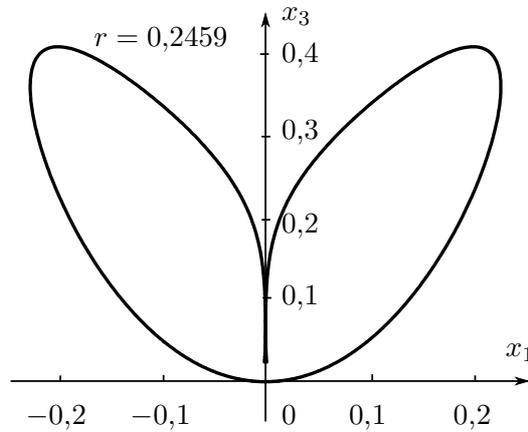


Рис. 1.7. Гомоклинические петли

Значение параметра r является точкой нелокальной бифуркации, когда состояния равновесия не меняют своего характера, но перестраивается структура потока фазовых траекторий. При дальнейшем увеличении r начавшаяся на стороне O_2 траектория перейдет на сторону O_1 , и наоборот (рис. 1.8).

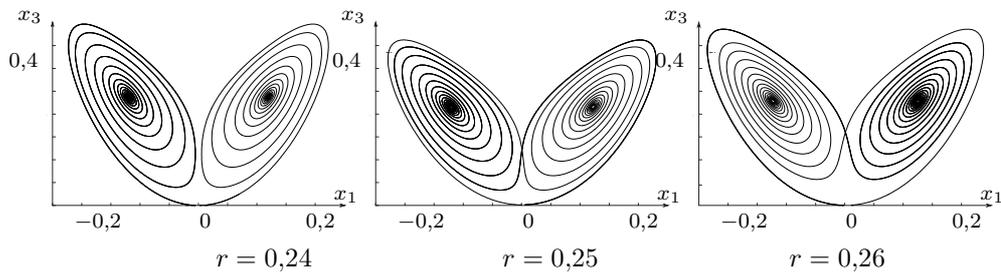


Рис. 1.8. Вид проекции фазовых траекторий на плоскость (x_1, x_3) до и после нелокальной бифуркации, которая происходит при $r \approx 0,25$

Еще одна нелокальная бифуркация происходит при $r = 0,35$. Если до этого значения параметра r сепаратрисы вели в неподвижные точки O_1 и O_2 , то при $r > 0,35$ они асимптотически приближаются к неустойчивым периодическим орбитам, от которых дальнейший путь фазовой точки может привести либо в устойчивую точку, либо к движению по «восьмеркам» (рис. 1.9).

Существование гомоклинических траекторий обеспечивает условия возникновения странного аттрактора. Некоторые авторы предлагают называть странный аттрактор *хаотическим*, если гомоклинические траектории имеют точки касания, или *стохастическим*, если касания нет.

По этой классификации аттрактор Лоренца нужно считать хаотическим странным аттрактором «восьмерочного типа» [4, 6, 7].

Странный аттрактор — это аттрактор, имеющий два существенных отличия от обычного аттрактора: траектории такого аттрактора непериодические (они не замыкаются) и неустойчивы (малые отклонения между соседними траекториями нарастают).

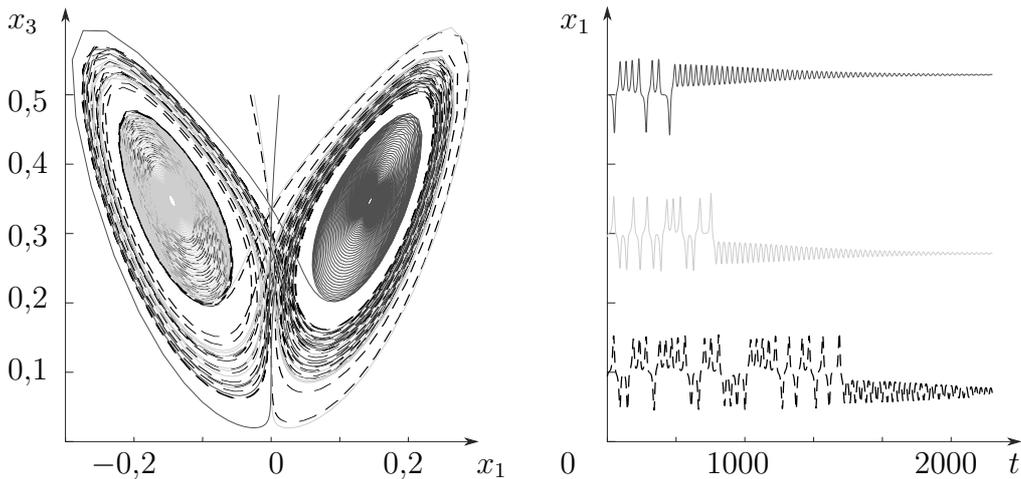


Рис. 1.9. Появление неустойчивого периодического движения

Интересно проследить за поведением фазовых траекторий при сильном возрастании параметра r . Из математической теории аттракторов известно, что при этом аттрактор разрушается, и появляется периодическое движение, охватывающее все неустойчивые состояния равновесия. Это означает, что при очень больших r система переходит в режим автоколебаний. Уменьшение параметра приведет к хаосу через последовательность удвоений периода колебаний.

§7. Моделирование уравнений Лоренца на аналоговой вычислительной машине

При интегрировании уравнений динамической системы на аналоговой вычислительной машине АВК-31 мы фактически осуществляем эксперимент именно в тех условиях, когда на макродинамику оказывает влияние микромир. Так как при повторных запусках, когда начальные условия могут быть лишь приблизительно равны предыдущим и в процессе решения действуют помехи, траектории быстро расходятся.

Подготовка к решению задачи на АВК начинается с составления электрической схемы, напряжения в различных точках которой заменяют идентификаторы исследуемой системы и изменяются согласно за-

данной системе дифференциальных уравнений. Обычно бывает необходимо ввести масштабные коэффициенты, чтобы обеспечить изменение всех напряжений в полном возможном для данной установки диапазоне. Для АВК-31 этот диапазон составляет $(-10 \cdots +10)$ вольт (В).

Одна из возможных схем для моделирования системы уравнений Лоренца изображена на рис. 1.10. Схема составлена так, чтобы можно было наблюдать за величинами напряжений соответствующих производным $U_{\dot{x}_1}$, $U_{\dot{x}_2}$, $U_{\dot{x}_3}$ на выходах сумматоров и за самими переменными U_{x_1} , U_{x_2} , U_{x_3} на выходах соответствующих интеграторов. Вычисления выполняются при значениях параметров: $b = 0,06$, $\sigma = 0,2$, $m = 0,003$. Параметр r может изменяться от 0 до 1. При этих значениях параметров характерные периоды колебаний имеют порядок нескольких секунд, поэтому масштаб времени можно изменить, чтобы все процессы проходили в 10 раз быстрее. Масштабы переменных выберем равными:

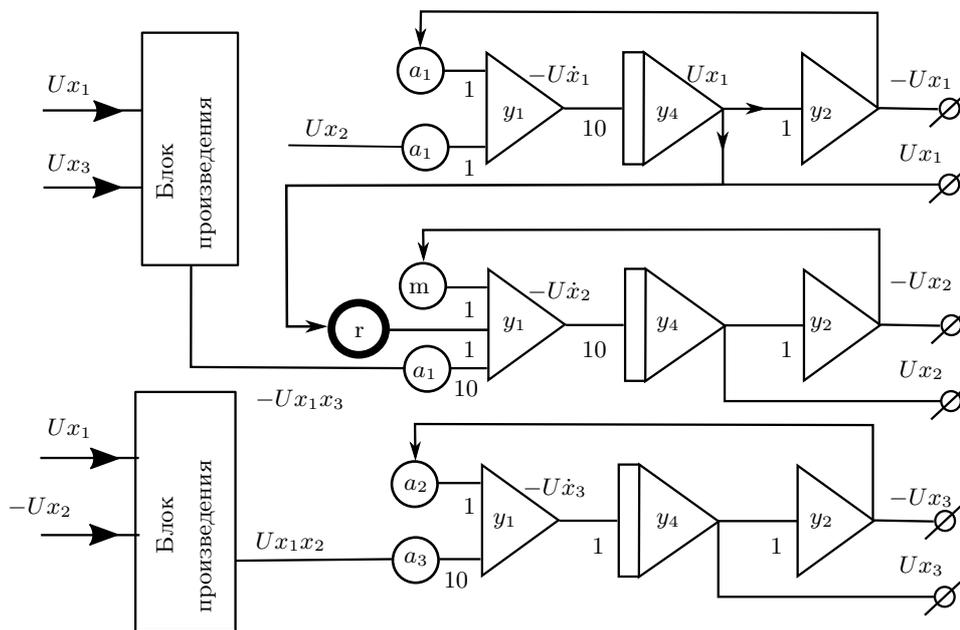
$$\begin{aligned} M_{x_1} &= M_{x_2} = 20 \text{ В/нат. ед.} \\ M_{x_3} &= 5 \text{ В/нат. ед.} \end{aligned}$$

При этих условиях машинные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} U_{\dot{x}_1} &= -0,2U_{x_1} - 0,2U_{x_2}, & U_{x_1} &= 10 \int U_{\dot{x}_1} dt, \\ U_{\dot{x}_2} &= rU_{x_1} - 0,003U_{x_2} - 2U_{x_1x_3}, & U_{x_2} &= 10 \int U_{\dot{x}_2} dt, \\ U_{\dot{x}_3} &= -0,6U_{x_3} + 1,25U_{x_1x_2}, & U_{x_3} &= \int U_{\dot{x}_3} dt. \end{aligned}$$

7.1. Задание для АВМ

1. Изменяя коэффициент r , определить точки бифуркации системы.
2. При тех значениях r , когда существуют две устойчивые особые точки, найти их координаты. Полученные результаты сравнить с теоретическими значениями.
3. В области существования аттрактора с помощью двухкоординатного самописца построить графики $x(t)$, несколько раз проведя интегрирование при одних и тех же параметрах и начальных условиях.



$a_1 = 0,2, a_2 = 0,6, a_3 = 0,125.$

Рис. 1.10. Схема коммутации для системы уравнений Лоренца на АВК-31

§8. Моделирование уравнений Лоренца на ЭВМ

8.1. Исследование траекторий системы уравнений Лоренца.

Провести на ЭВМ исследование решений уравнений динамических систем, в которых возможны хаотические колебания, можно многими способами. Рассмотрим реализацию моделирования уравнений Лоренца в программной среде `Matlab`.

1. В программной среде в рабочей директории `WORK` размещаются оформленные в виде файлов с расширением `.m`: программа-функция инициализации `INITIAL_CONDITION3`, произвольное число файлов, задающих вид правых частей исследуемых систем, и головная программа `run3`, в которой присваиваются значения всех управляющих параметров и коэффициентов уравнений Лоренца.

2. Программа `INITIAL_CONDITION3` позволяет провести интегрирование системы уравнений (1.7) с задаваемыми при обращении параметрами r, b, σ, m для `Nvar` вариантов начальных условий, запоминание всех результатов в фиксированные моменты времени и построение графиков.

3. Результатом численного интегрирования уравнений Лоренца является векторная функция $X(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, каждая составляющая которой фиксируется как столбец матрицы `MATRICA(N, 3*Nvar+1)`, первый столбец матрицы — время (дискретная переменная с заданным шагом выдач `dtprint` изменяется от 0 до $T=N*dtprint$).

4. Значения координат $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ для каждого варианта счета записываются в последующие столбцы матрицы **MATRICA**. В программе предусмотрена возможность изменять начальные условия для координаты x_1 так, что в каждом из вариантов значение $x_1(t=0) = x_1 + \text{eps} * (\text{rand} - 0.5)$. Функция **rand** формирует случайное число, равномерно распределенное на интервале $(0, 1)$.

Когда начальные условия фиксированы, т. е. $\text{eps}=0$, все варианты идентичны. Однако при исследовании решений системы, имеющей странный аттрактор, постановка задачи Коши не может быть применена, так как в любом эксперименте начальные условия не могут быть заданы абсолютно точно. Поэтому в программе предусмотрена возможность случайным образом формировать значение $x_1(t=0)$.

5. Результаты интегрирования представляются в графическом окне (см. рис. 1.9), где слева для всех вариантов строятся графики $x_3(x_1)$, а справа — сдвинутые друг относительно друга по вертикали графики $x_1(t)$.

8.2. Задание для ЦВМ.

1. Определить точки бифуркации по параметру r в системе Лоренца с параметрами: $B = 0,06$, $SIGMA = 0,2$, $M = 0,003$.

2. Сравнить полученные значения параметра r при локальных бифуркациях с теоретическими и с найденными при моделировании на АВМ.

3. Увеличивая r , получить переход от стохастических колебаний к автоколебаниям.

4. Изменить параметры уравнений на примененные Лоренцом и определить точки локальных и нелокальных бифуркаций в этом случае.

§9. Контрольные вопросы

1. Необходимое условие сжимаемости фазового объема.
2. Определение диссипативной динамической системы.
3. Притягивающие множества для гладких динамических систем с одной степенью свободы.
4. Что такое стохастический аттрактор?
5. Чем определяются статистические характеристики выхода для преобразователей и генераторов стохастичности?
6. Различия в воспроизведении поведения странного аттрактора на АВМ и ЭВМ.
7. Устойчивость стационарных состояний системы уравнений Лоренца.
8. Гомоклинические траектории.

9. Изменение вида фазовой плоскости системы Лоренца при изменении параметра r .
10. Характер особой точки в начале координат.

Литература

1. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Магнус К.* Колебания. М.: Мир, 1982.
4. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Физматгиз, 1987.
5. *Гринченко В.Т., Маципура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. М.: МЛКИ, 2007.
6. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. МакКракен. М.: Мир, 1980. С. 317–335
7. *Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений. Нелинейная динамика. Т. 8. № 1. С. 3–28
8. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос: Курс лекций / Изд. 2, перераб. и доп., М: Физматлит, 2006.