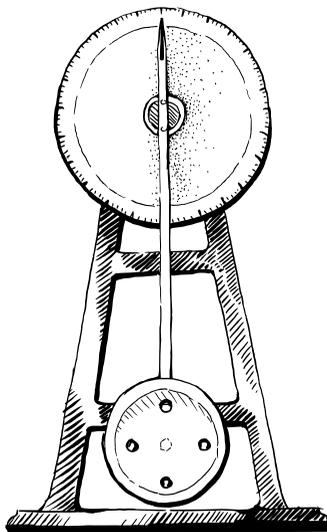


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет



УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ ПРИ ПОМОЩИ МАХОВИКА

ЗАДАЧА
СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКЕ

Электронная версия для damc.ru

2022

ЗАДАЧА СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

**УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ ПРИ
ПОМОЩИ МАХОВИКА**

*А.В. Безнос, А.А. Гришин, А.В. Ленский, Д.Е. Охоцимский,
А.М. Формальский*

*Под редакцией
профессора Владимира Васильевича Александрова, профессора
Юрия Владимировича Болотина
Рецензент Игорь Леонидович Антонов*

Редактор	Степан Степанович Лемак
Верстка	Маргарита Дмитриевна Белоусова Анна Павловна Кручинина
Иллюстрации	Алена Павловна Кручинина

УПРАВЛЕНИЕ МАЯТНИКОМ ПРИ ПОМОЩИ МАХОВИКА

*А.В. Безнос, А.А. Гришин, А.В. Ленский,
Д.Е. Охоцимский, А.М. Формальский*

Введение

В приложениях часто возникают проблемы управления движением тех или иных механических систем. Обычно требуется построить закон управления, чаще всего в виде обратной связи, который обеспечивает функционирование системы в желаемом режиме [1–3]. Определенные трудности вызывает проблема синтеза управления объектами, которые в отсутствие управления неустойчивы. Поскольку ресурсы реальных приводов так или иначе ограничены, то неустойчивый объект управления может быть выведен на желаемый режим работы не из всякого состояния.

Задачи управления маятником, стабилизации его верхнего неустойчивого положения равновесия относятся к числу классических задач механики и теории управления. В большинстве работ эти задачи решаются путем перемещения точки подвеса маятника. Так, в работах [4, 5] предложено стабилизировать перевернутый маятник путем вертикальных перемещений его точки подвеса (стабилизированный таким образом маятник часто называют маятником Капицы). В работе [6] рассматривается задача стабилизации многозвенного перевернутого маятника. Она решается путем горизонтальных перемещений точки подвеса. Такой маятник может быть смонтирован на тележке, способной перемещаться горизонтально. Всем известно, что, перемещая ладонь руки в горизонтальной плоскости, можно удерживать от падения стоящую на ней вертикально палку. Особенно легко это делать, если палка «длинная» и ее масса сосредоточена на верхнем конце.

Здесь, в отличие от многих классических работ, рассматривается плоский однозвенный маятник, точка подвеса которого неподвижна. Маятник находится в поле сил тяжести. В точке подвеса маятника (в шарнире) действуют силы трения, которые, однако, при конструировании устройства сведены к минимуму. Никакие

другие силы, кроме сил реакции опоры, в точке подвеса не действуют. Для управления колебаниями маятника на нём смонтирован маховик с электроприводом. Ротор электродвигателя жестко соединен с маховиком. Момент, развиваемый электродвигателем, приложен, с одной стороны, к его ротору, а тем самым и к маховику, с другой стороны, к статору, а тем самым и к маятнику. При помощи этого момента и осуществляется управление движением маятника. Принципиальная возможность подобного способа управления (стабилизации) может быть строго доказана при помощи теоремы об изменении момента количества движения системы относительно точки подвеса маятника [?, 7]. На основе этого же принципа осуществляется управление ориентацией спутников при помощи гироскопов; человек, который стремится удержаться от падения назад или вперед, вращает руками. В [9] подобный способ предложен для стабилизации вертикального положения двухколесного велосипеда. В статье [10] рассматривается задача стабилизации перевернутого маятника при помощи маховика при условии, что в начале процесса управления он уже находится в некоторой «малой» окрестности желаемого положения равновесия.

Целью настоящей работы является построение желаемых режимов движений плоского однозвенного маятника путем управления вращением смонтированного на нём маховика. Маховик, как уже сказано выше, приводится во вращение электродвигателем. При этом управляющим параметром является напряжение, подаваемое на двигатель.

Желаемые режимы движений маятника, которые реализуются в настоящей работе, — это стабилизация маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия, быстрое раскачивание маятника, висящего первоначально вниз, быстрое торможение колеблющегося маятника, раскачивание маятника с переводом его в верхнее неустойчивое положение равновесия и стабилизацией в этом положении. Законы изменения напряжения, при которых реализуется то или иное желаемое движение, синтезируются в виде обратной связи.

§1. Устройство маятника с маховиком

На рис. 1.1 показан однозвенный маятник *1* с маховиком *3*. Маятник способен совершать круговые движения в вертикальной плоскости. Его ось вращения *2* находится на неподвижном основании. В этой оси отсутствует какой-либо привод.

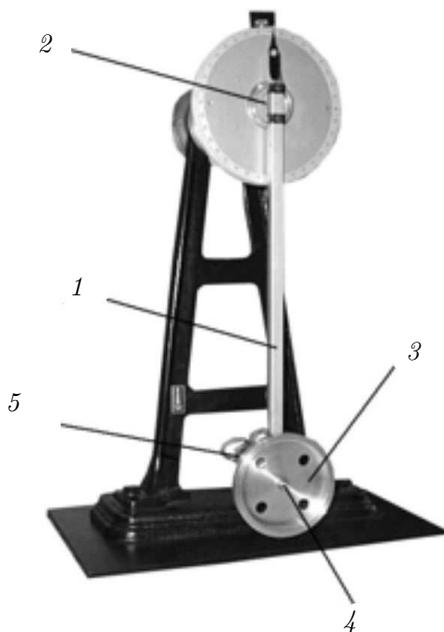


Рис. 1.1. *1* — маятник, *2* — ось маятника, *3* — маховик, *4* — ось маховика, *5* — электродвигатель.

Ось вращения маховика *4* закреплена на маятнике и параллельна оси вращения маятника. Маховик приводится во вращение электродвигателем постоянного тока *5*.

Электропривод, так же как и маховик, смонтирован на маятнике. Статор двигателя жестко скреплен с маятником, ось ротора (якоря) жестко соединена с осью маховика. Система управления двигателем включает персональный компьютер, контроллер и усилитель мощности, являющийся источником питания двигателя. При управлении используется информация об углах и скоростях поворота маятника относительно неподвижного основания и маховика относительно маятника. Эти углы измеряются импульсными датчиками.

На рис. 1.2 приведена схема маятника. Маятник OB в точке O шарнирно соединен с неподвижной опорой. Ось шарнира перпендикулярна плоскости качаний маятника (плоскости чертежа). Введем обозначения: l — длина маятника ($l = OB$), M — его масса, J — его момент инерции относительно шарнира O . Маятник представляет собой однородный стержень, поэтому его центр масс расположен в середине отрезка OB и $J = Ml^2/3$. Угол отклонения маятника от вертикали обозначается через ϕ или ψ (см. рис. 1.2).

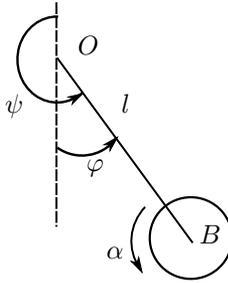


Рис. 1.2. Схема маятника с маховиком: O — точка подвеса маятника, B — центр маховика, $OB=l$

Симметричный относительно своей оси вращения маховик смонтирован на маятнике так, что его центр расположен в конце маятника OB — в точке B . На рис. 1.2 маховик изображен в виде окружности с центром в точке B . Маховик может поворачиваться в ту или иную сторону вокруг проходящей через точку B горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости качаний маятника (плоскости чертежа). Эта ось параллельна оси шарнира O . Ось вращения маховика является продолжением оси ротора электродвигателя. Таким образом, маховик вместе с якорем двигателя имеет по отношению к маятнику одну степень свободы. Вся система имеет две степени свободы. Единственный управляющий параметр в системе — напряжение u , подаваемое на электродвигатель, который вращает маховик.

Введем обозначения: m — суммарная масса маховика и электродвигателя, J_m — суммарный момент инерции маховика и ротора двигателя относительно их оси вращения. Будем считать, что в точке B маятника OB расположен центр масс маховика вместе с электродвигателем. Для того чтобы при заданной массе маховика его момент инерции был максимально возможным, его массу нужно сосредоточить по возможности на периферии. Поэтому конструкция маховика такова, что он близок к кольцу, внешний

радиус которого $R = 0,042$ м, а внутренний радиус $r = 0,036$ м. Масса маховика \mathfrak{M} равномерно распределена по кольцу. Его момент инерции вычисляется по формуле $\mathfrak{M}(r^2 + R^2)/2$.

§2. Уравнения движения маятника

Поведение описанной механической системы характеризуется двумя обобщенными координатами — углом ψ поворота маятника относительно вертикали и углом α поворота маховика вместе с якорем электродвигателя относительно маятника. Оба угла отсчитываются в направлении, противоположном вращению часовой стрелки (см. рис. 1.2). Однако угол поворота маховика — циклическая переменная. Поэтому в уравнениях движения (см. ниже) фигурирует только угловая скорость маховика $\omega = \dot{\alpha}$ относительно маятника — относительно прямой OB . С такой же скоростью ω вращается и ротор электродвигателя относительно его статора, поскольку между ротором и маховиком нет редуктора, а статор электродвигателя жестко скреплен с маятником. Заметим, что значение угла α не представляет интереса в задаче управления колебаниями маятника, поэтому уравнение $\omega = \dot{\alpha}$ отсутствует в выписанных ниже уравнениях.

Кинетическая энергия системы T , потенциальная Π и виртуальная работа δW могут быть найдены при помощи следующих выражений:

$$\begin{aligned} 2T &= J\dot{\psi}^2 + ml^2\dot{\psi}^2 + J_m(\dot{\psi} + \omega)^2, \\ \Pi &= \left(\frac{M}{2} + m\right)gl \cos \psi, \\ \delta W &= L\delta\alpha - L_f\delta\psi. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь g — ускорение свободного падения, L — момент электромагнитных сил, приложенных к ротору электродвигателя со стороны статора, L_f — момент сил трения в шарнире O . Используя метод Лагранжа второго рода [11], составим с помощью выражений (1.1) уравнения движения системы

$$(J + ml^2 + J_m)\ddot{\psi} + J_m\dot{\omega} = \left(\frac{M}{2} + m\right)gl \sin \psi - L_f, \quad (1.2)$$

$$J_m(\ddot{\psi} + \dot{\omega}) = L. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2), (1.3) можно также получить, используя теорему об изменении кинетического момента системы [?, 7]. Уравнение (1.2) как раз описывает изменение кинетического момента

системы относительно точки O под действием момента силы тяжести и момента сил трения. В левой части уравнения (1.2) стоит производная кинетического момента, в правой выписано выражение для момента относительно точки O , развиваемого силами тяжести и трения. При наличии в шарнире O сил вязкого трения момент этих сил $L_f = \kappa\dot{\psi}$, где постоянная величина κ пропорциональна коэффициенту вязкости, при наличии сил сухого трения момент $L_f = \chi \operatorname{sign} \dot{\psi}$, где постоянный коэффициент χ характеризует порог сил сухого трения. Момент L пропорционален силе тока в обмотке якоря. Пренебрежем индуктивностью в цепи якоря (электромагнитной постоянной времени), тогда этот момент можно представить в виде [12]

$$L = c_1 u - c_2 \omega. \quad (1.4)$$

Подаваемое на двигатель напряжение u ограничено по абсолютной величине

$$|u| \leq u_0 \quad (u_0 = \text{const}), \quad (1.5)$$

произведение $c_2 \omega$ описывает момент сил, возникающих из-за противо-ЭДС. Положительные постоянные коэффициенты c_1 и c_2 вычисляются по паспортным значениям пускового и номинального моментов, номинальной угловой скорости и номинального напряжения двигателя [12, стр. 123]. Они могут быть найдены также путем идентификации параметров двигателя. Множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$, удовлетворяющих неравенству (1.5), обозначим через U .

Уравнения (1.2)–(1.4) перепишем в виде

$$(J + ml^2 + J_m) \ddot{\psi} + J_m \dot{\omega} - \left(\frac{M}{2} + m \right) gl \sin \psi + L_f = 0, \quad (1.6)$$

$$J_m (\ddot{\psi} + \dot{\omega}) + c_2 \omega = c_1 u. \quad (1.7)$$

Член $J_m \dot{\omega}$ в левой части уравнения (1.6) пропорционален угловому ускорению маховика, его можно рассматривать как реактивный момент, который влияет на колебания маятника.

Пренебрегая моментом сил трения L_f , перепишем уравнения (1.6), (1.7), разрешив их относительно старших производных:

$$(J + ml^2) \ddot{\psi} = \left(\frac{M}{2} + m \right) gl \sin \psi + c_2 \omega - c_1 u, \quad (1.8)$$

$$(J + ml^2) J_m \dot{\omega} = -J_m \left(\frac{M}{2} + m \right) gl \sin \psi - \\ - (J + ml^2 + J_m) c_2 \omega + (J + ml^2 + J_m) c_1 u. \quad (1.9)$$

Введем безразмерное время τ по формуле

$$t = \vartheta\tau, \quad \vartheta^2 = \frac{J + ml^2}{\left(\frac{M}{2} + m\right)gl}. \quad (1.10)$$

Тогда уравнения (1.8), (1.9) можно записать компактно в безразмерных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi'' &= \sin \psi + e\sigma - \nu, \\ \sigma' &= -\sin \psi - je\sigma + j\nu. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по безразмерному времени τ ,

$$e = \frac{c_2}{\vartheta\left(\frac{M}{2} + m\right)gl}, \quad j = \frac{J + ml^2 + J_m}{J_m} > 1 \quad (1.12)$$

— безразмерные параметры системы, а

$$\sigma = \vartheta\omega, \quad \nu = \frac{c_1}{\left(\frac{M}{2} + m\right)gl}u = \frac{c_1\vartheta e}{c_2}u \quad (1.13)$$

— безразмерная угловая скорость маятника и безразмерное напряжение.

Неравенство (1.5) в новых обозначениях принимает вид

$$|\nu| \leq \nu_0, \quad \nu_0 = \frac{c_1\vartheta e}{c_2}u_0 = \text{const}. \quad (1.14)$$

Введение безразмерных параметров и переменных существенно упрощает математическую модель системы.

§3. Стабилизация маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия

В настоящем параграфе рассматривается задача стабилизации маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия в предположении, что в начале процесса стабилизации он уже находится в некоторой окрестности этого желаемого положения.

3.1. Линеаризованные уравнения. Система уравнений третьего порядка (1.8), (1.9) содержит единственную нелинейность — $\sin \psi$. Исключим из рассмотрения круговые движения маятника. Будем, кроме того, считать, что угол ψ в процессе стабилизации верхнего положения равновесия маятника близок к нулю.

Тогда, заменив функцию $\sin \psi$ ее аргументом ψ , получим вместо (1.8), (1.9) приближенную линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (J + ml^2) \ddot{\psi} &= \left(\frac{M}{2} + m \right) gl\psi + c_2\omega - c_1u, \\ (J + ml^2) J_m \dot{\omega} &= -J_m \left(\frac{M}{2} + m \right) gl\psi - \\ &\quad - (J + ml^2 + J_m) c_2\omega + (J + ml^2 + J_m) c_1u. \end{aligned} \quad (1.15)$$

При $u = 0$ нелинейная (1.8), (1.9), а также линейная (1.15) системы имеют тривиальное решение:

$$\psi = 0, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \omega = 0. \quad (1.16)$$

Это решение отвечает верхнему положению маятника и покоящемуся маховику. В перевернутом положении маятник неустойчив, что вытекает из физических соображений. Неустойчивость перевернутого маятника может быть доказана также и математически (см. ниже). Задачу стабилизации равновесия (1.16) при помощи управления и будем рассматривать далее.

В безразмерных переменных линеаризованная система (1.15) принимает вид

$$\psi'' = \psi + e\sigma - \nu, \quad \sigma' = -\psi - je\sigma + j\nu. \quad (1.17)$$

Уравнения (1.17) получаются при линеаризации уравнений (1.11). В матричном виде систему (1.17) можно записать так:

$$x' = Ax + b\nu, \quad (1.18)$$

где

$$x = \|\psi, \psi', \sigma\|^T, \quad A = \|a_{qs}\| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & e \\ -1 & 0 & -je \end{vmatrix}, \quad b = \|b_q\| = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ j \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

$(q, s = 1, 2, 3).$

Желаемое состояние равновесия (1.16) в безразмерных переменных записывается так:

$$x = \|\psi, \psi', \sigma\|^T = 0. \quad (1.20)$$

В формулах (1.19), (1.20) символ T означает транспонирование.

3.2. Собственные значения разомкнутой системы. Если управление «отсутствует», т. е. $\nu = 0$ ($u = 0$), то система называется разомкнутой. Выясним расположение на комплексной плоскости собственных значений разомкнутой системы, т. е. собственных значений матрицы A . Выпишем характеристическое уравнение этой матрицы третьего порядка (μ — спектральный параметр):

$$F(\mu) = \mu^3 + j e \mu^2 - \mu + e(1 - j) = (\mu + j e)(\mu^2 - 1) + e = 0. \quad (1.21)$$

Положим для начала $c_2 = 0$, тогда из (1.12) следует, что $e = 0$. Уравнение (1.21) при $e = 0$ имеет один нулевой и два ненулевых корня ± 1 , отличающихся только знаками, т. е. спектр разомкнутой системы при $e = 0$ симметричен относительно мнимой оси. Это естественно, поскольку при $c_2 = 0$ разомкнутая система консервативна. При «добавлении» противо-ЭДС ($c_2 > 0$, $e > 0$) нулевое собственное значение «сдвигается» влево, два другие также сдвигаются, но остаются положительным и отрицательным при всех значениях $e > 0$. Это утверждение справедливо, поскольку функция $F(\mu)$ трижды меняет знак при изменении ее аргумента μ от $-\infty$ до $+\infty$. Два раза ее график пересекает отрицательную полуось μ и один раз положительную. Действительно, поскольку $j > 1$ (см. неравенство (1.12))

$$\begin{aligned} F(-\infty) &= -\infty < 0; & F(-j e) &= e > 0; \\ F(0) &= e(1 - j) < 0; & F(+\infty) &= +\infty > 0. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (1.21) имеет три действительных корня: один положительный $-\mu_1 > 0$, два отрицательных $-\mu_2, \mu_3 < 0$. Собственные значения λ_q ($q = 1, 2, 3$) исходной системы (1.15) (их размерность равна c^{-1}) связаны с безразмерными собственными значениями μ_q соотношениями (см. преобразование времени (1.10)):

$$\mu_q = \vartheta \lambda_q \quad (q = 1, 2, 3). \quad (1.22)$$

Поэтому среди собственных значений λ_q ($q = 1, 2, 3$) системы (1.15) также есть одно положительное $\lambda_1 > 0$ и два отрицательных $\lambda_2, \lambda_3 < 0$.

Таким образом, рассматриваемая система в отсутствие управления, т. е. в разомкнутом состоянии, неустойчива. Тем самым доказано, что неуправляемый перевернутый маятник неустойчив. Важно подчеркнуть, что только одно действительное собственное значение системы лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости, два другие, также действительные, лежат в левой полуплоскости.

Заметим, что если параметр e (коэффициент c_2) мал, то для приближенного вычисления положительного значения μ_1 можно воспользоваться выражением

$$\mu_1 = 1, \quad (1.23)$$

которое справедливо при $e = 0$ ($c_2 = 0$). В линейном приближении по величине e (по величине c_2) выражение для μ_1 имеет вид

$$\mu_1 = 1 - \frac{e}{2}. \quad (1.24)$$

3.3. Выделение неустойчивой координаты и построение области управляемости. Известно, что при помощи линейного преобразования переменных с постоянной невырожденной матрицей K

$$y = Kx \quad (1.25)$$

матричное уравнение (1.18), (1.19) может быть представлено в жордановой форме — в виде трех скалярных уравнений, которые связаны между собой только управлением ν :

$$y'_1 = \mu_1 y_1 + d_1 \nu, \quad y'_2 = \mu_2 y_2 + d_2 \nu, \quad y'_3 = \mu_3 y_3 + d_3 \nu. \quad (1.26)$$

Здесь $y = \|y_q\|$, $d = \|d_q\| = Kb$, $KA = \Lambda K$, $\Lambda = \text{diag} \|\mu_q\|$, μ_q ($q = 1, 2, 3$) — три собственных значения матрицы A . Элементы матрицы $K = \|k_{qs}\|$ ($q, s = 1, 2, 3$) преобразования (1.25) построим в виде

$$\begin{aligned} k_{q1} &= (a_{22} - \mu_q)(a_{33} - \mu_q) - a_{32}a_{23} = \mu_q(\mu_q + je), \\ k_{q2} &= a_{32}a_{13} - a_{12}(a_{33} - \mu_q) = \mu_q + je, \\ k_{q3} &= a_{12}a_{23} - (a_{22} - \mu_q)a_{13} = e. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь k_q — q -я строка матрицы K .

Величины d_q имеют простой вид

$$d_q = k_q b = -\mu_q, \quad q = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

Поскольку $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$, $\mu_3 < 0$, то $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$. Все элементы k_{11} , k_{12} , k_{13} первой строки k_1 матрицы K положительны. Из неравенств $d_q \neq 0$ ($q = 1, 2, 3$), $\mu_q \neq \mu_s$ ($q \neq s$) вытекает, между прочим, что система (1.26), а значит и исходная система (1.18), (1.19), вполне управляема в смысле Калмана [1–3].

В пространстве $Y(y_1, y_2, y_3)$ множество начальных состояний, из которых систему (1.26) можно привести в начало координат при

ограничении (1.14) на управляющее напряжение ν , представляет собой [9, 10, 13] полосу ($d_1 = -\mu_1$)

$$|y_1| < \frac{|d_1|\nu_0}{\mu_1} \quad \text{или} \quad |y_1| < \nu_0. \quad (1.29)$$

Это множество, которое обозначим через Q , называется областью управляемости. Таким образом, область управляемости Q ограничена только по «неустойчивой» переменной y_1 . В безразмерных переменных ψ , ψ' , σ неравенство (1.29), описывающее область управляемости Q , выглядит так:

$$|k_{11}\psi + k_{12}\psi' + k_{13}\sigma| < \nu_0. \quad (1.30)$$

Элементы k_{11} , k_{12} , k_{13} первой строки преобразования (1.25) вычисляются по формулам (1.27) при $q = 1$, поэтому неравенство (1.30) можно переписать в виде:

$$|\mu_1(\mu_1 + je)\psi + (\mu_1 + je)\psi' + e\sigma| < \nu_0. \quad (1.31)$$

При помощи неравенства (1.31) выпишем ограничения на начальные значения по каждой из трех фазовых переменных $\psi(0)$, $\psi'(0)$ и $\sigma(0)$ при условии, что две другие переменные в начальный момент времени равны нулю:

$$|\psi(0)| < \frac{\nu_0}{\mu_1(\mu_1 + je)}, \quad |\psi'(0)| < \frac{\nu_0}{\mu_1 + je}, \quad |\sigma(0)| < \frac{\nu_0}{e}. \quad (1.32)$$

В исходных размерных переменных $\psi(0)$, $\dot{\psi}(0)$ и $\omega(0)$ неравенства (1.32) приобретают вид:

$$|\psi(0)| < \frac{c_1 u_0 e^{\vartheta}}{c_2 \mu_1 (\mu_1 + je)}, \quad |\dot{\psi}(0)| < \frac{c_1 u_0 e}{c_2 (\mu_1 + je)}, \quad |\omega(0)| < \frac{c_1 u_0}{c_2}. \quad (1.33)$$

Из рассмотрения неравенств (1.33) следует, что размер диапазона начальных состояний, при которых возможна стабилизация верхнего неустойчивого положения равновесия маятника, пропорционален величине c_1 и максимально возможному напряжению u_0 , подаваемому на двигатель, что естественно.

3.4. Синтез закона стабилизации. Задача синтеза управления, стабилизирующего неустойчивое состояние равновесия (1.20) (или (1.16)), состоит в нахождении закона управления напряжением в виде обратной связи:

$$\nu = \nu(\psi, \psi', \sigma) \quad (\text{или} \quad u = u(\psi, \dot{\psi}, \omega)), \quad (1.34)$$

при которой это равновесие становится асимптотически устойчивым решением системы (1.18), (1.19).

В инженерной практике часто используется линейный закон управления. Будем поэтому искать стабилизирующее управление (1.34) также в виде линейной обратной связи

$$\nu = g_1\psi + g_2\psi' + g_3\sigma, \quad (1.35)$$

где g_1, g_2, g_3 — искомые постоянные коэффициенты. Реализовать, однако, «чисто» линейную обратную связь (1.35) при наличии ограничения (1.14) на управляющее напряжение ν невозможно. При учете ограничения (1.14) управление (1.35) превращается в линейную обратную связь с насыщением:

$$\nu = \begin{cases} -\nu_0 & \text{при } g_1\psi + g_2\psi' + g_3\sigma \leq -\nu_0, \\ g_1\psi + g_2\psi' + g_3\sigma & \text{при } |g_1\psi + g_2\psi' + g_3\sigma| \leq \nu_0, \\ \nu_0 & \text{при } g_1\psi + g_2\psi' + g_3\sigma \geq \nu_0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Коэффициенты g_1, g_2, g_3 могут быть найдены при помощи неравенств Гурвица, которые выделяют в трехмерном пространстве этих коэффициентов целую область возможных значений. При выборе коэффициентов из этой области можно пользоваться какими-нибудь дополнительными соображениями, например, стараться по возможности улучшить качество переходных процессов или (и) увеличить область притяжения. Областью (зоной) притяжения здесь называется, как обычно, множество V начальных состояний, из которых система асимптотически (при $t \rightarrow \infty$) приходит в начало координат. Опишем не связанный с критерием Гурвица способ «почти» однозначного выбора коэффициентов обратной связи, при котором обеспечивается асимптотическая устойчивость состояния равновесия (1.20) и одновременно реализуется максимально возможная область притяжения V .

В системе (1.26) при $\nu = 0$ «неустойчива» только одна координата y_1 . «Подавить» ее неустойчивость можно при помощи линейной обратной связи вида

$$\nu = \gamma y_1 = \gamma(k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3) = \gamma(k_{11}\psi + k_{12}\psi' + k_{13}\sigma) \quad (1.37)$$

при условии, что постоянный коэффициент γ удовлетворяет неравенству (см. первое из уравнений (1.26) и выражение (1.28))

$$\mu_1 + d_1\gamma < 0 \quad \text{или} \quad \gamma > 1. \quad (1.38)$$

Коэффициенты k_{11}, k_{12}, k_{13} в обратной связи (1.37) определяются выражениями (1.27). Положительное собственное значение μ_1 разомкнутой (в случае $\nu = 0$) системы (1.26) при замыкании системы обратной связью (1.37) «превращается» в отрицательное

значение $\mu_1 + d_1\gamma = \mu(1 - \gamma)$, поскольку $\gamma > 1$. Собственные значения μ_2 и μ_3 остаются при этом без изменений, они зависят только от конструктивных параметров системы.

С учетом ограничения (1.14) на управляющее напряжение ν линейная обратная связь (1.37) принимает вид:

$$\nu = \begin{cases} -\nu_0 & \text{при } \gamma y_1 \leq -\nu_0, \\ \gamma y_1 & \text{при } |\gamma y_1| \leq \nu_0, \\ \nu_0 & \text{при } \gamma y_1 \geq \nu_0. \end{cases} \quad (1.39)$$

Нетрудно убедиться в том, что при условии (1.38) интервал оси y_1 , на котором обратная связь (1.39) остается линейной, лежит внутри интервала (1.29). Следовательно, функция (1.39) имеет в интервале (1.29) линейный участок, а также два участка постоянства. С ростом абсолютной величины коэффициента γ отрезок оси y_1 , где функция (1.39) остается линейной, сужается и при $|\gamma| \rightarrow \infty$ стягивается в точку $y_1 = 0$.

Рассмотрим первое из трех скалярных дифференциальных уравнений (1.26). Знак правой части этого уравнения при управлении (1.39) противоположен знаку переменной y_1 в интервале (1.29). А тогда нетрудно убедиться в том, что при всех начальных условиях $y_1(0)$ из интервала (1.29) решение этого уравнения $y_1(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Но если $y_1(t) \rightarrow 0$, то и определяемое формулой (1.39) управление $\nu(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Собственные значения $\mu_2, \mu_3 < 0$. Поэтому если $\nu(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то решения второго и третьего уравнений (1.26) $y_2(t) \rightarrow 0$ и $y_3(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, какими бы ни были начальные условия $y_2(0)$ и $y_3(0)$ [14]. Таким образом, из любых начальных состояний, принадлежащих области управляемости Q , система (1.26) при управлении (1.39) асимптотически стремится в состояние равновесия $y = 0$. Итак, при управлении (1.39) область притяжения V совпадает с областью управляемости, т. е. $V = Q$. Значит, построенное управление реализует максимально возможную область притяжения, и в этом смысле оно является оптимальным. Эта максимально возможная область притяжения описывается неравенством (1.31).

Закон управления (1.39) в переменных ψ, ψ', σ имеет вид

$$\nu = \begin{cases} -\nu_0 & \text{при } \gamma(k_{11}\psi + k_{12}\psi' + k_{13}\sigma) \leq -\nu_0, \\ \gamma(k_{11}\psi + k_{12}\psi' + k_{13}\sigma) & \text{при } |\gamma(k_{11}\psi + k_{12}\psi' + k_{13}\sigma)| \leq \nu_0, \\ \nu_0 & \text{при } \gamma(k_{11}\psi + k_{12}\psi' + k_{13}\sigma) \geq \nu_0. \end{cases} \quad (1.40)$$

и тем самым искомые постоянные коэффициенты g_q ($q = 1, 2, 3$) обратной связи (1.35) или (1.36) таковы:

$$\begin{aligned} g_1 &= \gamma k_{11} = \gamma \mu_1 (\mu_1 + je), \\ g_2 &= \gamma k_{12} = \gamma (\mu_1 + je), \\ g_3 &= \gamma k_{13} = \gamma e, \quad \gamma > 1. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Из рассмотрения этих выражений следует, что все коэффициенты $g_q > 0$ ($q = 1, 2, 3$).

Таким образом, коэффициенты g_q обратной связи определяются «почти» однозначно. Единственным параметром, выбор которого допускает произвол, является общий коэффициент усиления γ , который, однако, должен быть больше единицы. Используя соотношения (1.41), можно легко вычислить коэффициенты обратной связи, если заданы численные значения параметров системы. Предварительно нужно, конечно, решив кубическое уравнение (1.21), найти положительное собственное значение μ_1 . Для нахождения приближенного значения μ_1 можно воспользоваться формулами (1.23) или (1.24).

Используя формулы (1.10), (1.13) для перехода к безразмерным переменным, выпишем теперь закон управления (1.40) в исходных размерных переменных u , ψ , $\dot{\psi}$, ω :

$$u = \begin{cases} -u_0 & \text{при } n_1\psi + n_2\dot{\psi} + n_3\omega \leq -u_0, \\ n_1\psi + n_2\dot{\psi} + n_3\omega & \text{при } |n_1\psi + n_2\dot{\psi} + n_3\omega| \leq u_0, \\ u_0 & \text{при } n_1\psi + n_2\dot{\psi} + n_3\omega \geq u_0, \end{cases} \quad (1.42)$$

здесь

$$\begin{aligned} n_1 &= \Gamma \mu_1 (\mu_1 + je), \quad n_2 = \Gamma (\mu_1 + je) \vartheta, \quad n_3 = \Gamma e \vartheta, \\ \Gamma &> \frac{c_2}{c_1 \vartheta e}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Собственные значения разомкнутой системы действительны. Собственные значения замкнутой с помощью обратной связи (1.40) системы также действительны. В самом деле, положительное собственное значение разомкнутой системы «становится» при ее замыкании отрицательным, а два отрицательных собственных значения разомкнутой системы остаются без изменения. Отсюда вытекает, что переходный процесс в замкнутой при помощи управления (1.40) системе может на начальном промежутке времени иметь несколько колебаний. Далее этот процесс будет апериодическим при любых начальных условиях из области притяжения V . Таким образом, описанный способ стабилизации равновесия (1.20) обеспечивает не только максимально возможную зону притяжения (для

линеаризованной системы), но и аperiodичность переходного процесса.

В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, состояние (1.20) при управлении (1.40) является асимптотически устойчивым состоянием равновесия не только линейной системы (1.17), но и нелинейной (1.11). Линейная система (1.17) близка к нелинейной (1.11) при значениях угла ψ , близких к нулю, поэтому управление (1.40) гарантирует сходимость переходного процесса нелинейной системы (1.11) к равновесию (1.20) при тех начальных условиях, при которых угол ψ в переходном процессе остается близким к нулю. В то же время область притяжения (1.31) включает начальные состояния, при которых угол ψ в переходном процессе «сильно» отклоняется от нуля. Поэтому нельзя утверждать, что при всех начальных условиях из области (1.31) решение нелинейной системы (1.11), (1.40) сходится к равновесию (1.20). Таким образом, построенное управление (1.40) гарантирует лишь локальную стабилизацию перевернутого маятника. Ниже, в разделах §5, §6, это управление «достроено» так, что обеспечивается глобальная стабилизация перевернутого маятника.

Заметим, что маятник с соответствующей системой управления может быть использован для стабилизации вертикального положения башенного крана.

§4. Гашение установившейся угловой скорости маятника

Как показывают эксперименты, после приведения маятника в верхнее положение равновесия маятник продолжает вращаться со средней ненулевой скоростью. Дело в том, что при установке нулевого положения датчика угла ψ довольно трудно избежать ошибки. Ноль датчика угла отклонения маятника от вертикали устанавливается перед началом эксперимента. Для этого, поместив маятник в нижнее устойчивое состояние равновесия, нужно положить, что сигнал, поступающий с датчика угла, отвечает значению $\psi = \pi$. Пусть при этой установке возникает ошибка $\Delta\psi$, которая остается постоянной в течение всего процесса регулирования. При наличии

этой ошибки закон управления (1.36) приобретает вид

$$\nu = \begin{cases} -\nu_0 & \text{при } g_1(\psi + \Delta\psi) + g_2\psi' + g_3\sigma < -\nu_0, \\ g_1(\psi + \Delta\psi) + \\ \quad + g_2\psi' + g_3\sigma & \text{при } |g_1(\psi + \Delta\psi) + g_2\psi' + g_3\sigma| \leq \nu_0, \\ \nu_0 & \text{при } g_1(\psi + \Delta\psi) + g_2\psi' + g_3\sigma > \nu_0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Стационарное решение нелинейной системы (1.11) при управлении (1.44), а также линейной (1.17) при этом управлении описывается, в отличие от (1.16), соотношениями (в предположении, что $\Delta\psi = \text{const}$):

$$\psi = \psi' = 0, \quad \sigma = \frac{g_1\Delta\psi}{e - g_3}, \quad \nu = e\sigma = \frac{eg_1\Delta\psi}{e - g_3}. \quad (1.45)$$

Это решение имеет место при условии, что управление в стационарном режиме определяется средней строчкой в соотношении (1.44). Другими словами, формулы (1.45) описывают стационарное решение, если ошибка $\Delta\psi$ такова, что значение напряжения ν , определяемое последним равенством (1.45), удовлетворяет условию (1.14), т. е.

$$\left| \frac{eg_1\Delta\psi}{e - g_3} \right| \leq \nu_0.$$

Важно отметить, что, несмотря на наличие ошибки в начальной «выставке» датчика угла отклонения маятника от вертикали, в установившемся режиме этот угол ψ равен нулю, как и в отсутствие такой ошибки. Наличие ошибки сказывается лишь на угловой скорости маховика и напряжении, которые в установившемся режиме отличны от нуля. Эксперименты показывают, что маховик в установившемся режиме вращается в ту или иную сторону, быстро или медленно, в зависимости от знака и величины ошибки выставки датчика угла.

Чем больше коэффициент g_3 обратной связи по угловой скорости σ , тем меньше абсолютная величина этой скорости в установившемся режиме. В соответствии с описанным в настоящей работе способом синтеза управления (см. формулы (1.41)), коэффициент g_3 может быть изменен только путем изменения общего коэффициента усиления γ . Но при изменении коэффициента усиления γ изменяется и коэффициент g_1 . Поэтому, как следует из рассмотрения второго выражения (1.45), с увеличением общего коэффициента усиления γ установившееся значение угловой скорости σ не уменьшается. Это значение можно, однако, уменьшить, увеличив через некоторое время после начала процесса управления маятником только один коэффициент g_3 .

Для того чтобы вообще прекратить вращение маховика в установившемся режиме, можно к сигналу линейной обратной связи в управлении (1.44) добавить сигнал, пропорциональный с некоторым постоянным коэффициентом g_4 углу поворота маховика α , отсчитываемому от какого-то положения α^* , т. е. сигнал:

$$g_4 [\alpha(\tau) - \alpha^*] = g_4 \int_{\tau^*}^{\tau} \frac{d\alpha}{d\xi} d\xi = g_4 \int_{t^*}^t \omega(\zeta) d\zeta = g_4 [\alpha(t) - \alpha^*]. \quad (1.46)$$

Это легко показать теоретически при помощи системы уравнений (1.11), (1.44) (или линеаризованной системы (1.17) с управлением (1.44)). Начало отсчета α^* значения не имеет, если угловое положение маховика не представляет интереса. Сигнал (1.46) можно вводить в управление по истечении некоторого времени $t^* = \vartheta\tau^*$ после начала процесса регулирования и положить при этом $\alpha^* = \alpha(\tau^*) = \alpha(t^*)$. В этом случае «исходная» область притяжения V не уменьшается. Сигнал (1.46) пропорционален интегралу от скорости вращения маховика. При введении в обратную связь интегрального члена возникает, как известно, тенденция к неустойчивости процесса регулирования. Для того чтобы избежать неустойчивости, коэффициент g_4 нужно выбирать не «слишком» большим. Допустимые, с точки зрения устойчивости, значения этого коэффициента можно найти, пользуясь, например, критерием Гурвица. При этом коэффициенты g_1 , g_2 , g_3 можно считать заданными, поскольку они вычисляются описанным выше способом. Эксперименты показывают, что при использовании в обратной связи дополнительного члена (1.46) средняя скорость вращения маховика в установившемся режиме действительно обращается в ноль.

§5. Раскачивание и торможение маятника

Перепишем первое из уравнений (1.11) в виде

$$\psi'' - \sin \psi = -w. \quad (1.47)$$

Здесь через w обозначен развиваемый электродвигателем момент (в безразмерном виде):

$$w = \frac{L}{\left(\frac{M}{2} + m\right) gl} = \frac{\vartheta eL}{c_2}. \quad (1.48)$$

Величина момента L , как видно из соотношения (1.4), зависит от управляющего напряжения u и угловой скорости маховика ω . Рассмотрим, однако, для простоты величину w , описываемую

соотношением (1.48), в качестве независимого управляющего параметра, который будем считать ограниченным по величине константой w_0 :

$$|w(\tau)| \leq w_0 \quad (w_0 = \text{const}). \quad (1.49)$$

Пусть при этом $w_0 < 1$. Кусочно-непрерывные функции $w(\tau)$, удовлетворяющие условию (1.49), будем называть допустимыми управлениями. Множество таких функций обозначим через W .

Устойчивое нижнее положение равновесия маятника описывается равенствами

$$\psi = \pi, \quad \psi' = 0. \quad (1.50)$$

Введем в рассмотрение переменную φ , которая характеризует угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, отсчитываемый против часовой стрелки (рис. 1.2):

$$\psi = \pi + \varphi. \quad (1.51)$$

Тогда соотношения (1.50) примут вид

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad (1.52)$$

а уравнение (1.47) — вид

$$\varphi'' + \sin \varphi = -w. \quad (1.53)$$

Рассмотрим задачу об оптимальном управлении раскачиванием маятника.

Условие неположительности угла $\varphi(0)$ не ограничивает общности постановки задачи. Требуется отыскать функцию $w(\tau) \in W$, при которой достигается максимум угла φ ($\max[\varphi(\theta)]$) в момент θ , когда угловая скорость $\varphi'(\theta) = 0$. Здесь θ — первый после нулевого момента времени, когда угловая скорость φ' обращается в нуль. Эту формулировку задачи при заданных для уравнения (1.53) начальных условиях запишем так:

$$\max_{|w| \leq w_0} [\varphi(\theta)], \quad \varphi'(\theta) = 0, \quad \theta > 0. \quad (1.54)$$

Рассматривая задачу (1.54), будем считать начальное состояние и величину w_0 такими, что при любом управлении $w(\tau) \in W$ существует ненулевой момент времени θ , при котором угловая скорость φ' обращается в нуль: $\varphi'(\theta) = 0$. В противном случае маятнику сразу можно сообщить круговое движение. Будем предполагать также, что оптимальное управление, при котором достигается максимум угла $\varphi(\theta)$, существует. Если $w_0 > 1$, то, как нетрудно убедиться, при любом значении $\varphi(0)$ маятнику можно придать круговое движение, избежав его колебаний около нижнего положения равновесия.

Момент времени θ заранее не задается, он определяется условием $\varphi'(\theta) = 0$ и для каждой управляющей функции $w(\tau) \in W$ принимает свое значение.

Наряду с задачей об оптимальном управлении раскачиванием рассмотрим задачу об оптимальном управлении торможением маятника, которую запишем в виде:

$$\min_{|w| \leq w_0} [\varphi(\theta)], \quad \varphi'(\theta) = 0, \quad \theta > 0. \quad (1.55)$$

В задаче (1.55) требуется найти функцию $w(\tau) \in W$, при которой достигается минимум угла φ ($\min[\varphi(\theta)]$) в первый после нулевого момента θ , когда $\varphi'(\theta) = 0$.

Если

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0, \quad (1.56)$$

то маятник в начальный момент времени находится в равновесии, и постановка задачи торможения не имеет смысла. В то же время задача раскачивания маятника имеет смысл и при условии (1.56).

Введем обозначение $\frac{d\varphi}{d\tau} = p$, тогда уравнение (1.53) второго порядка можно переписать в виде уравнения первого порядка:

$$\frac{dp}{d\varphi} p + \sin \varphi = -w. \quad (1.57)$$

При оптимальном управлении, которое, по предположению, существует, угол $\varphi(\tau)$ растет строго монотонно на интервале времени

$$0 < \tau < \theta, \quad (1.58)$$

и, следовательно, на этом интервале времени угловая скорость $p > 0$ ($\varphi'(\tau) > 0$). При этом уравнение (1.57) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{d\varphi} = -\frac{w + \sin \varphi}{p}. \quad (1.59)$$

Рассматривая уравнение (1.59), легко убедиться в том, что оптимальное управление, решающее задачу (1.54), должно максимизировать производную $\frac{dp}{d\varphi}$ при каждом значении φ [15]. Действительно, именно при таком управлении производная p обращается в нуль, когда угол φ принимает максимально возможное значение. Правая часть уравнения (1.59) зависит линейно от управляющего параметра w , и, чтобы максимизировать производную $\frac{dp}{d\varphi}$, нужно положить

$$w = -w_0.$$

Рассматривая следующий полупериод колебаний маятника (при $\tau > \theta$), заключаем, что оптимальное управление, которое

максимально раскачивает маятник на каждом полупериоде колебаний, имеет вид

$$w = -w_0 \operatorname{sign} p = -w_0 \operatorname{sign} \varphi' = -w_0 \operatorname{sign} \psi'. \quad (1.60)$$

Выражение (1.60) означает, что при оптимальном управлении прикладываемый к маховику момент L максимален по модулю, а его направление противоположно направлению движения маятника. К маятнику при этом прикладывается момент, направление которого совпадает с направлением его движения, что и понятно с физической точки зрения. При управлении (1.60) полная энергия маятника на каждом полупериоде возрастает, и после нескольких колебаний маятник придет во вращение по или против часовой стрелки.

Оптимальный закон торможения является «обратным» закону (1.60):

$$w = w_0 \operatorname{sign} p = w_0 \operatorname{sign} \varphi' = w_0 \operatorname{sign} \psi'. \quad (1.61)$$

Управление (1.61) эквивалентно введению сухого трения в точке подвеса маятника с порогом трения, равным w_0 .

Приведенные выше для упрощенной постановки задачи результаты об оптимальных законах раскачивания (1.60) и торможения (1.61) наталкивают на мысль, что релейный закон управления изменением напряжения ν вида

$$\nu = -\nu_0 \operatorname{sign} \varphi' = -\nu_0 \operatorname{sign} \psi' \quad \left(u = -u_0 \operatorname{sign} \frac{d\varphi}{dt} = -u_0 \operatorname{sign} \frac{d\psi}{dt} \right) \quad (1.62)$$

также приводит к раскачиванию маятника, а релейный закон управления вида

$$\nu = \nu_0 \operatorname{sign} \varphi' = \nu_0 \operatorname{sign} \psi' \quad \left(u = u_0 \operatorname{sign} \frac{d\varphi}{dt} = u_0 \operatorname{sign} \frac{d\psi}{dt} \right) \quad (1.63)$$

— к его торможению (в полной постановке задачи), хотя, быть может, и не оптимальному с точки зрения максимизации или минимизации амплитуды маятника в конце полупериода. Математическое моделирование и экспериментальные исследования показывают, что управление (1.62) действительно приводит к раскачиванию, а управление (1.63) — к торможению маятника.

Заметим, что способ торможения маятника при помощи маховика может быть использован для гашения колебаний груза, подвешенного на тросе к стреле подъемного крана.

§6. Перевод маятника из нижнего положения равновесия в верхнее

Для перевода маятника из нижнего в верхнее положение равновесия его нужно сначала раскачать, а затем, «поймав» в верхнем положении равновесия, стабилизировать.

При раскачивании маятника ему нужно сообщить энергию, достаточную для перевода в верхнее положение равновесия. Полная энергия маятника E , без учета вращения относительно него маховика, описывается выражением

$$E = \frac{1}{2} (J + ml^2 + J_m) \dot{\psi}^2 + \left(\frac{M}{2} + m \right) gl \cos \psi. \quad (1.64)$$

Энергия E_0 маятника, покоящегося в верхнем положении равновесия, равна $(M/2 + m)gl$. В математической модели (1.8), (1.9) не учтен момент сил трения L_f в шарнире O , поскольку его характеристику трудно идентифицировать. При управлении (1.62) маятник раскачивается, набирая энергию. Если сообщить маятнику энергию, равную величине E_0 , то в дальнейшем в отсутствие трения при достаточно малой угловой скорости маховика ω он попадет в зону притяжения (1.31), откуда оптимальный закон управления вида (1.40) уже приведет его в желаемое верхнее положение равновесия и стабилизирует его в этом положении. При наличии же трения прекращение «подкачки» энергии приводит к ее диссипации, в результате чего маятник может не попасть в область притяжения. Если прекратить подкачку энергии в момент, когда она несколько превосходит величину E_0 , то маятник может «проскочить» желаемое положение равновесия. В этих условиях целесообразным представляется следующий способ перехода в режим стабилизации с управлением (1.40).

В процессе раскачивания маятника вычисляем в каждый текущий момент времени его энергию (1.64). Раскачивание прекращается, когда энергия достигает значения, равного E_0 или близкого к нему. После достижения желаемого значения энергии поддерживаем ее значение до момента попадания маятника в область притяжения. Это удастся делать при помощи закона управления вида

$$u = k(E - E_0) \operatorname{sign} \dot{\psi}, \quad (1.65)$$

где $k > 0$ — коэффициент обратной связи. Слежение за заданным значением E_0 энергии в соответствии с законом управления (1.65) прекращается, когда система попадает в область притяжения (1.31). После этого закон управления (1.40) уже «доводит»

маятник в желаемое верхнее положение равновесия и стабилизирует его в этом положении.

§7. Численные значения параметров маятника с маховиком

Численные значения параметров показанного на рис. 1.1 устройства примерно таковы:

$$\begin{aligned}M &= 0,04 \text{ кг}, \quad m = 0,312 \text{ кг}, \quad l = 0,3 \text{ м}, \\J_m &= 0,0000803 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad c_1 = 0,0069 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{B}, \\c_2 &= 0,000099 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad u_0 = 19 B.\end{aligned}\tag{1.66}$$

При помощи соотношений (1.43) можно найти коэффициенты обратной связи (1.42).

Математическое моделирование показывает, что область притяжения V по крайней мере по углу ψ для нелинейной системы (1.8), (1.9), несколько больше, чем для линеаризованной (1.15). Дело в том, что момент силы тяжести (опрокидывающий маятник), если моделировать его, как это и положено, «синусоидальной» функцией, меньше, чем момент, вычисляемый при замене синуса его аргументом. Вместе с тем различие между зонами притяжения для нелинейной и линейной систем незначительно, если в этих зонах разность $\sin \psi - \psi$ мала. Если значение u_0 , ограничивающее управляющий сигнал, увеличить, то зона притяжения увеличится, и различие между зонами притяжения для линеаризованной и точной систем может оказаться более существенным.

§8. Порядок выполнения работы

1. Численно (например, в среде Matlab):

а) Решить характеристическое уравнение (1.21) при численных значениях параметров (1.66) и найти собственные значения разомкнутой системы. Сравнить найденное собственное значение μ_1 с приближенными значениями (1.23) и (1.24).

б) Используя соотношения (1.43), найти численные значения коэффициентов обратной связи n_1 , n_2 , n_3 . Найти ограничение на общий коэффициент усиления Γ .

в) При помощи формул (1.33) найти численно область притяжения системы (с обратной связью) по углу отклонения маятника ψ , по его угловой скорости $\dot{\psi}$ и по угловой скорости маховика ω .

2. Поместив маятник в устойчивое нижнее положение равновесия, положить, что сигнал, поступающий с датчика угла, отвечает значению $\psi = \pi$ ($\varphi = 0$).

3. Установить найденные численно коэффициенты обратной связи в программе управления маятником, найти экспериментально область притяжения по углу ψ и сравнить ее с найденной теоретически. Вывести на экран дисплея и записать график изменения угла отклонения маятника ψ от вертикали при начальном его отклонении, близком к предельно возможному.

4. Ввести в закон управления ошибки $\Delta\psi = \pm 2^\circ$ измерения угла отклонения маятника ψ и убедиться в том, что средняя скорость вращения маховика в установившемся режиме не равна нулю и он вращается в ту или иную сторону в зависимости от знака ошибки $\Delta\psi$. Добавить в закон управления интегральный член с коэффициентом g_4 и убедиться в том, что, несмотря на наличие ошибки, средняя скорость вращения маховика обращается в нуль.

5. Убедиться в том, что при управлении (1.62) маятник действительно раскачивается. Вывести на экран дисплея и записать процесс раскачивания маятника (угол ψ) до момента, когда он начнет переворачиваться.

6. Слегка отклонить маятник от верхнего положения равновесия и отпустить его. Записать процесс свободных колебаний до момента, когда их амплитуда станет меньше 2° . То же самое повторить, используя закон управления (1.63). Убедиться в том, что при этом управлении затухание происходит быстрее.

7. Вычислить коэффициент усиления k в законе управления (1.65), при котором маятник, будучи вначале в устойчивом нижнем положении равновесия, попадает при описанном выше алгоритме управления в верхнее положение равновесия и остается в нем. Записать процесс изменения угла ψ при управлении маятником.

§9. Контрольные вопросы

1. Обосновать возможность управления колебаниями маятника путем управления вращением маховика.
2. Составить выражения для кинетической и потенциальной энергии маятника с маховиком и двигателем, выражение для виртуальной работы и затем методом Лагранжа составить уравнения движения управляемой системы. Выписать линеаризованные уравнения движения системы.
3. Провести анализ спектра разомкнутой системы управления.

4. Показать, что система, полученная путем линеаризации уравнений движения маятника «около» верхнего положения равновесия, управляема по Калману.
5. Объяснить способ синтеза обратной связи, при которой область притяжения является максимально возможной.
6. Вывести неравенство, описывающее максимально возможную область притяжения.
7. Вывести формулу для момента инерции J тонкого однородного стержня относительно его конца; длина стержня l , а его масса M . Вывести формулу для момента инерции J_m маховика, выполненного в виде однородного кольца, масса которого \mathfrak{M} , внешний радиус R , внутренний радиус r .

Литература

1. Александров В.В., Болтянский В.Г. и др. Оптимизация динамики управляемых систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
2. Ройттенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1993.
3. Калман Р.Е., Фалб П., Арbib М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
4. Stephenson A. On a New Type of Dynamical Stability // Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, 1908. Vol. 52. No 8. Part II. P. 1–10.
5. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал exper. и теор. физики. 1951. Т. 21. Вып. 5. С. 588.
6. Schaefer I.F., Cannon R.H. On the Control of Unstable Mechanical Systems // Proc. of the Third Congress of IFAC, 1966. Vol. 1. Pp. 6с-1.
7. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. Модельные задачи динамики и управления. М.: Наука, 1984.
8. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000.
9. Охоцимский Д.Е., Гурфинкель Е.В., Лавровский Э.К., Ленский А.В., Татарский С.Л., Формальский А.М. Стабилизация вертикального положения двухколесного велосипеда при помощи маховика // Доклады научной школы-конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы». Москва, 1999.
10. Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевернутый маятник // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. Т. 5. С. 14–24.

11. *Аппель П.* Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 2.
12. *Гориневский Д.М., Формальский А.М., Шнейдер А.Ю.* Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях. М.: Физматлит, 1994.
13. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
14. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
15. *Лавровский Э.К., Формальский А.М.* Оптимальное управление раскачиванием и торможением качелей // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. № 2. С. 92–101.