

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет



# ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧЕЛОВЕКА ПРИ СПОКОЙНОМ СТОЯНИИ

ЗАДАЧА  
СПЕЦПРАКТИКУМА  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКЕ

Электронная версия для [damc.ru](http://damc.ru)

2022

ЗАДАЧА СПЕЦПРАКТИКУМА  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧЕЛОВЕКА ПРИ  
СПОКОЙНОМ СТОЯНИИ**

*П.А. Кручинин*

*Под редакцией  
профессора Владимира Васильевича Александрова, профессора  
Юрия Владимировича Болотина  
Рецензент Игорь Леонидович Антонов*

Редактор	Степан Степанович Лемак
Верстка	Маргарита Дмитриевна Белоусова Анна Павловна Кручинина
Иллюстрации	Алена Павловна Кручинина

# ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЧЕЛОВЕКА ПРИ СПОКОЙНОМ СТОЯНИИ

*П.А. Кручинин*

## Введение

Целью настоящей работы является знакомство студентов с современными представлениями о системе управления движениями человека. Рассмотрен пример стабилизации человеком вертикальной позы. Этот пример характерен тем, что центральной нервной системе приходится решать задачу стабилизации с помощью мышечных усилий неустойчивого положения равновесия.

Функционирование кардиореспираторной системы влияет на позу человека и является одной из причин колебаний, наблюдаемых в процессе удержания позы. Изменение амплитуд этих колебаний при изменении сенсорной информации легко наблюдается с использованием стабилومترической аппаратуры и наглядно иллюстрирует роль сенсорных систем при стабилизации позы.

Сложность описания системы управления движениями человека во многих случаях не позволяет использовать при анализе движения детерминированные модели. Одним из наиболее эффективных методов исследования скрытых периодичностей в сигнале измерительных датчиков представляется спектральный анализ, который используется в ходе выполнения задачи практикума. Знакомство с практическими приемами спектрального оценивания на примере исследования колебаний человека при удержании вертикальной позы также является целью настоящей работы.

## §1. Механизмы удержания вертикальной позы

**1.1. Позные колебания.** Характерной чертой процесса поддержания невозмущенной позы спокойно стоящего человека является наличие непрекращающихся позных колебаний — малых изменений суставных углов на величины порядка градуса.

Одно из первых подробных исследований колебаний спокойно стоящего человека было проведено в ИППИ под руководством В. С. Гурфинкеля [1].

Принято считать, что человек при удержании вертикальной позы решает задачу управления при наличии возмущений как внешних (ветер, движение опоры и др.), так и внутренних (дыхание, сердцебиение и др.). Наибольший интерес представляют позные колебания в плоскости переднезаднего направления (сагиттальной плоскости) — в основном из-за того, что для нее применимы относительно простые модели, описывающие биомеханику движений человека. Подробнее этот вопрос обсуждается в Приложении 1. Использование этих моделей позволяет определить принадлежащую системе управления составляющую процесса поддержания позы.

Считается, что в позных колебаниях в отсутствии внешних возмущений подвижность имеет место преимущественно в голеностопном суставе. Наиболее широко для описания движений в сагиттальной плоскости используется модель перевернутого маятника, в которой тело человека моделируется одним жестким стержнем, проходящим через центр масс человека и шарнирно соединенным со стопой. Предполагается, что стопа неотрывно связана с опорой. Основой применения модели перевернутого маятника является предположение, что основной задачей стабилизации вертикальной позы является поддержание проекции центра тяжести тела внутрь опорного контура стоп. Обсудим составляющие такой управляемой системы.

**1.2. Мышцы.** Скелетные мышцы представляют собой очень своеобразные двигатели, которые преобразуют химическую энергию непосредственно в механическую работу и теплоту [2]. В связи с особенностями молекулярных механизмов сокращения развитие силы мышцей автоматически сопровождается изменением упругости и вязкости мышечного волокна. Кроме того, напряжение мышечного волокна зависит от его длины и скорости удлинения (или укорочения). Опишем кратко некоторые особенности управления мышцей со стороны нервной системы. Мотонейрон (один двигательный нейрон) иннервирует не всю мышцу, а лишь небольшую часть составляющих её волокон. Эти волокна рассредоточены по мышце так, что между волокнами, управляемыми одним мотонейроном, как правило, расположены волокна, управляемые другими мотонейронами. Мотонейрон и группа управляемых им двигательных волокон образуют двигательную единицу.

Силу мышцы можно увеличить одним из двух способов:

- повышением частоты нервных импульсов, поступающих к каждой из двигательных единиц;
- вовлечением (рекрутированием) новых двигательных единиц.

Двигательные единицы даже в одной мышце неодинаковы. Они различаются как по скорости сокращения (медленные и быстрые), так и по устойчивости к утомлению (устойчивые к утомлению и быстро утомляемые). Порядок рекрутирования двигательных единиц в обычных условиях определяется размерами мотонейронов. Первыми вовлекаются мотонейроны меньших размеров, активирующие медленные двигательные единицы. При увеличении уровня возбуждения рекрутируются также и быстрые двигательные единицы, развивающие большую силу. Такое функционирование системы, с одной стороны, позволяет очень точно дозировать двигательный ответ, но одновременно значительно усложняет работу системы управления. Такая особенность приводит к тому, что точное описание управляющих усилий в мышце представляется затруднительным, и при моделировании используются стохастические подходы и приближенные соотношения для осредненных величин. В первом приближении можно принимать модель, в которой в соответствии с [3] мышцы моделируются упругими элементами, а нервная система управляет «длиной нерастянутой пружины» и жесткостью этого элемента.

**1.3. Биологические сенсоры.** Считается, что основные колебания спокойно стоящего человека происходят в среднем на частотах порядка 0,35 Гц, а соответствующие им колебания положения центра давления имеют характерные величины порядка 2 мм. В статике это соответствует отклонениям перевернутого маятника на угол порядка  $0,1-0,2^\circ$ . Наличие столь малых колебаний для спокойно стоящего человека указывает на то, что соответствующие им изменения углов или удлинения мышц отслеживаются биологическими сенсорами и используются для коррекции мышечных усилий с целью обеспечения устойчивости.

Принято считать, что в стабилизации позы участвуют три системы биологических сенсоров, называемые модальностями: вестибулярный аппарат, зрение и кинестезия (суставно-мышечная чувствительность, осуществляемая проприоцепторами). Кратко изложим общие сведения о каждой из систем и обсудим вопросы их взаимодействий.

**Вестибулярный аппарат.** Простейшее описание функционирования вестибулярного аппарата приведено в [4]. Вестибулярный аппарат состоит из отолитовых органов и полукружных каналов. Отолитовый орган состоит из плотного тела, называемого отолитовой мембраной, которая упругим образом крепится к основанию посредством чувствительного эпителия, содержащего рецепторные

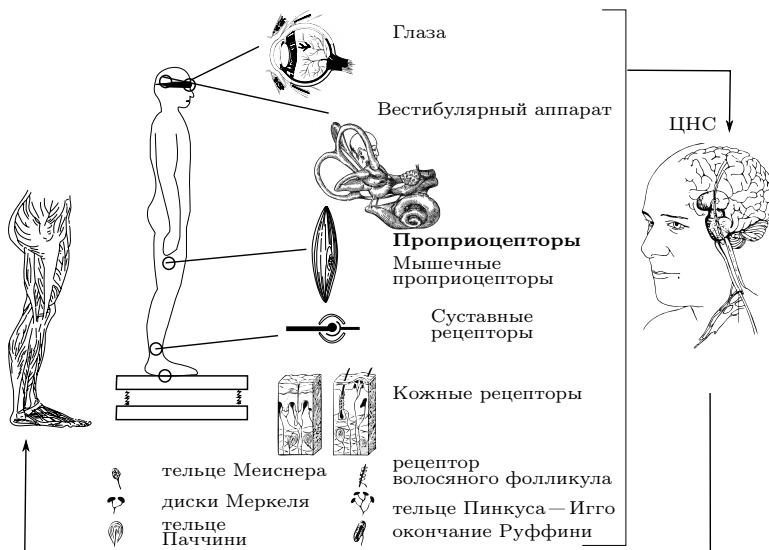


Рис. 1.1. Схема информационных потоков в цепи обратной связи управления удержанием вертикальной позы

волосковые клетки, чувствительные к малым отклонениям. Смещение отолитовой мембраны вызывает малое отклонение волосковых пучков рецепторных клеток, которые передают информацию о нём в центральную нервную систему. Можно приблизительно считать, что отолитовый орган измеряет удельную силу, действующую на чувствительную массу, т. е. является гравитоинерциальным механорецептором.

Полукружные каналы заполнены вязкой жидкостью, называемой эндолимфой. В ампуле полукружного канала располагается сложная структура, называемая купулой. При возникновении углового ускорения эндолимфа оказывает на купулу давление, приводящее к ее деформации, которая также отслеживается волосковыми рецепторными клетками.

Подробно с математическими моделями работы вестибулярного аппарата можно познакомиться в работе [5].

**Зрение.** Зрение поставяляет сигналы рассогласования, на основании которых производятся текущие коррекции движений. Рецепторные клетки глаза (палочки и колбочки), расположенные на сетчатке, реагируют на освещенность чувствительного слоя в диапазонах длин световых волн, характерных для каждого вида клеток. Изменение освещенности приводит к изменению рецепторного

потенциала и формированию импульсации в нервных окончаниях. Дальнейшее преобразование и «обработка» информации осуществляется биологической сетью нейронов. Очевидным результатом этих преобразований является формирование в мозгу образа наблюдаемых объектов и окружающей среды, что позволяет судить об изменении положения головы относительно окружающих предметов и может использоваться для определения изменения ориентации человека в пространстве.

Помимо сознательного аспекта зрения, являющегося достаточно сложным и медленным процессом, существуют более простые и быстрые механизмы. Проведенные исследования [6] показали, что потенциалы отдельных узлов первичной зрительной коры головного мозга изменяются, отслеживая движение изображения и в том числе направление этого движения. На основании этого можно предположить, что мозг, помимо положения объекта, с той или иной степенью точности оценивает и скорость движения объекта наблюдения. При спокойном стоянии человека подобные механизмы могут использоваться для быстрой оценки собственного движения.

Поставляемая таким образом от глаз информация представляет собой комбинацию информации о перемещении и скорости перемещения.

**Кинестезия.** Кинестезия — так называемое «мышечное чувство», чувство положения и перемещения как отдельных сегментов, так и всего человеческого тела. Это способность головного мозга постоянно осознавать положение и движение мышц различных частей тела, которая достигается за счёт проприоцепторов, которые посылают в головной мозг импульсы от мышц, суставов и сухожилий. Без такой способности человек не мог бы выполнять координированных движений с закрытыми глазами.

В понятие кинестезии входит большое число различных рецепторов, расположенных в мышцах и суставах. К таким рецепторам относятся, например, мышечные веретена. Основной рабочей единицей мышцы являются мышечные волокна, задача которых — создание стягивающих усилий в мышце. Помимо них существуют так называемые интрафузуальные мышечные волокна, играющие несколько иную роль: к ним крепятся мышечные веретена. Мышечные веретена являются специальными эластичными структурами, предназначенными для измерения удлинения и скорости удлинения мышцы. Суть их работы следующая. При удлинении мышцы происходит также удлинение интрафузуальных мышечных волокон, что, в свою очередь, приводит к деформации мышеч-

ного веретена. Мышечные веретена содержат окончания нервных клеток. При деформации веретена изменяется сопротивление мембраны нервных клеток, что приводит к зарождению в них нервного импульса (спайка) или серии импульсов.

В мышечных сухожилиях вблизи крепления мышечных волокон располагаются окончания Гольджи, которые «измеряют» деформацию в различных точках сухожилия. По этим деформациям определяются усилия, возникающие в соответствующих участках мышцы. Существуют также рецепторы, расположенные в суставах и сигнализирующие о значении суставного угла и о скорости его изменения. Рецепторы стопы по соотношению давления в носочных и пяточных отделах определяют положение центра давления — точки приложения реакции опоры. В рамках модели перевернутого маятника можно показать, что если пренебречь движением стопы, формируемые по распределению давления показания пропорциональны моменту, создаваемому мышцами в голеностопном суставе. Такое представление, в частности, вытекает из соображений аналогично модели стабилметрических показаний, проанализированной в Приложении 1. Поскольку момент сил в голеностопном суставе компенсирует момент силы тяжести, который пропорционален отклонению перевернутого маятника от вертикали, в статике показания рецепторов стопы позволяют судить об отклонении тела от вертикали.

Упрощенно все показания кинестетической чувствительности можно разделить на четыре группы: информация о взаимном положении звеньев тела; о скорости изменения взаимоположения звеньев тела; о силах, действующих со стороны одного звена тела на другое; о силах реакции, действующих на участок тела со стороны внешнего мира.

**1.4. Взаимодействие сенсорных систем.** Совместное использование разнородной сенсорной информации в процессе регуляции вертикальной позы исследовалось преимущественно посредством анализа реакции на внешнее возмущение. Были сформулированы две основные гипотезы: первая принадлежит М. Нашнеру [7], вторая — В. С. Гурфинкелю [1].

В соответствии с гипотезой Нашнера система регуляции позы организована по принципу обратной связи по показаниям трех систем: вестибулярной, зрительной и кинестетической. Показания каждой сенсорной системы входят приблизительно аддитивно с некоторыми весами, регулируемые в зависимости от того, какая из этих систем в текущей ситуации предоставляет более достоверные данные.



В. С. Гурфинкель высказал уточняющее предположение, что основной задачей системы регуляции вертикальной позы является поддержание проекции центра масс тела внутри опорного контура стоп. Нервная система определяет положение центра масс тела по показаниям различных сенсорных систем с использованием некоторого неосознаваемого внутреннего представления о структурной организации тела, его динамических характеристиках, текущем и изменяющемся положении его частей. Это представление называется схемой тела. Принято считать, что схема тела содержит сведения о длинах и массах различных звеньев и их взаимном расположении. Обзор фактов, подтверждающих эту точку зрения, приведен в [8]. Так, например, при наклоне платформы в сагиттальной плоскости по синусоидальному закону активность мышц голени стоящего на ней человека коррелирует не с изменением угла в голеностопном суставе, как это следовало бы ожидать при работе рефлекса на растяжение, а с отклонением центра масс тела. Если же с помощью растяжек ограничивались отклонения в переднезаднем направлении, так что пропадала необходимость активной стабилизации позы, то наблюдалась корреляция с углом в голеностопном суставе. Другое важное подтверждение этой гипотезы было получено по результатам исследований позы человека в невесомости [9]. Так, космонавты надевали специальные ботинки, крепившиеся к перегородке космической станции, после чего закрывали глаза и пытались принять «вертикальную» позу, полагая, что стенка горизонтальна. Суставные углы, характерные для позы в невесомости, сильно отличались от углов в земных условиях, в то время как проекция на основание положения центра масс практически не смещалась относительно положения на Земле. Было также выдвинуто предположение, что второй по важности задачей для системы регуляции позы является поддержание вертикальной ориентации корпуса. При этом использовались кинематические данные, полученные при стоянии человека на пресс-паше, анализ которых обнаруживал малые отклонения корпуса от вертикали по сравнению с отклонениями других частей тела.

Эти гипотезы подтверждены экспериментами, в которых использовались заметные возмущения вертикальной позы, что не позволяет напрямую применять их при описании процесса спокойного стояния. Характерные для невозмущенной позы основные колебания имеют амплитуды порядка  $0,1-0,2^\circ$ . По видимому, столь малые отклонения являются подпороговыми по крайней мере для вестибулярного аппарата.

Как обсуждалось выше, обратная связь при поддержании основной стойки использует зрительную, проприорецептивную и вестибулярную информацию. Однако вестибулярная система участвует в высокоамплитудных движениях, которые проявляются при значительных временах спокойного стояния здорового человека. Основная система управления балансом построена на сигналах, поступающих от зрения, мышечных и суставных механорецепторов. Существенность влияния соответствующих сенсорных систем можно проанализировать на простых тестах, часть которых и предлагается провести в ходе выполнения практической части работы.

Роль зрения при удержании вертикальной позы традиционно проверяется с использованием теста Ромберга, в ходе которого обследуемый стоит сначала с открытыми глазами, а потом такое же время с закрытыми. По результатам обследований оцениваются амплитуды колебаний корпуса человека. При нормальном функционировании системы удержания вертикальной позы амплитуды колебаний человека с открытыми глазами несколько меньше амплитуд при обследовании с закрытыми глазами. Усиления эффекта добьёмся в результате проведения этого теста для неустойчивой позы, в которой одна нога стоит впереди другой.

Простейшие прямые тесты, подтверждающие роль кинестезии в регуляции вертикальной позы, используют вибрацию отдельных участков, содержащих кинестезические биосенсоры. Наиболее вероятно, что такая вибрация «портит» информацию соответствующих сенсоров, и нервная система не использует эту информацию. В результате, например, вибрация ахиллова сухожилия приводит к отклонению тела назад, так как не поступает информация о натяжении сухожилия. Аналогичным образом можно объяснить рефлекторное отклонение туловища вперед при вибрации рецепторов стопы, расположенных в пятках, и рефлекторное отклонение туловища назад при вибрации рецепторов стопы, расположенных в её передней части [10].

Косвенно о важнейшей роли проприоцепции свидетельствует факт заметного снижения амплитуд позных колебаний в том случае, если один из пальцев руки касается неподвижной опоры, хотя бы ногтем [11]. Этот тест и предлагается провести при выполнении практикума.

## **§2. Стабилометрия**

Для анализа позных колебаний используем традиционные для биомеханики стабиллометрические обследования [12].

Первым исследователем устойчивости тела человека при стоянии считают одного из основателей клинической невропатологии — Морица Ромберга (1795—1873 гг.). Первопроходцы постурологии создавали различные способы регистрации колебаний тела при стоянии. Использовались методики, при которых колебания тела регистрируются при помощи рычажных передач или нитей, укрепляемых на различных частях тела (кефалография), методики, основанные на регистрации перемещений подвижной платформы, на которой стоит испытуемый, и методики, при которых исследуются колебания центра давления тела человека, стоящего на неподвижной платформе.

В 1952 году В. С. Гурфинкель совместно с Е. Б. Баевским, Э. Л. Ромелем и Я. С. Якобсоном предложил неподвижную платформу, площадка которой опирается на четыре металлические опоры, деформация которых, вызываемая перемещениями центра давления тела испытуемого, стоящего на приборе, регистрируется проволочными датчиками сопротивления, соединенными с электрорегистрирующими приборами. Эта методика обеспечивает возможность точного количественного, пространственного и временного анализа стояния и получила название стабиллографии.

Интерес к стабиллографии возрос с начала 1980-х гг. в связи с компьютеризацией научных исследований, которая позволила решить проблему обработки и визуализации сложных сигналов. В связи с тем, что в основе компьютерной обработки лежит уже не графический, а измерительный метод регистрации сигнала с датчиков стабиллоплатформы, то и название метода трансформировалось в термин «стабилометрия».

Стабилометрия как метод исследования приобрела большое значение в самых различных областях и используется как диагностическое средство широкого спектра заболеваний и преморбидных состояний (предзаболеваний), как средство контроля и объективизации воздействий на человека, а также как средство реабилитации нарушения статокINETической функции человека и тренировки его координации.

**2.1. Компьютерный стабиллоанализатор.** Комплекс стабиллоанализатора составляют: стабиллометрический помост, компьютер и программное обеспечение.

Стабиллометрический помост представляет собой жесткую плиту на трех или четырех опорах, которые механически связаны с датчиками силы. Датчики силы регистрируют вертикальные составляющие реакции опор, по которым вычисляются координаты

точки приложения реакции опоры (центра давления (ЦД)) на ступни испытуемого со стороны плоскости плиты. Внешний вид стабилметрического помоста представлен на рис. 1.2.

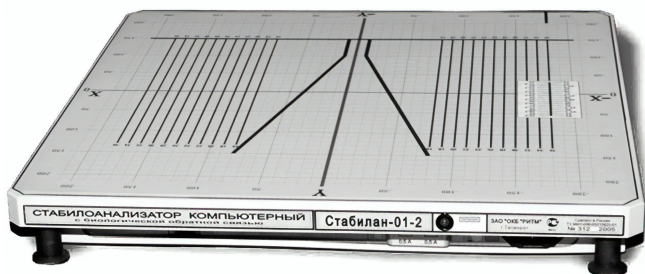


Рис. 1.2. Внешний вид помоста компьютерного стабиланализатора Стабилан

В качестве датчиков для измерения реакций опор в стабилметрии нашли применение датчики усилий на основе трех или четырех тензодатчиков, установленных в опорах измерительной платформы. Чаще используются платформы с четырьмя датчиками и регулируемой по высоте четвертой опорой, так как использование дополнительного датчика силы позволяет существенно расширить диапазон измерения отклонений проекции ЦД испытуемого. Связь координат ЦД человека с параметрами его колебаний во фронтальном и сагиттальном направлениях более подробно освещена в Приложении 1.

Для исследования удержания вертикальной позы используем компьютерный стабиланализатор Стабилан и его программное обеспечение — пакет **Stabmed**. Дискретность сигнала стабиланализатора составляет одно измерение в 0,02 секунды, что соответствует частоте 50 Гц. В соответствии с результатами, изложенными в Приложении 2, видно, что частота Найквиста для такого дискретного сигнала равна 25 Гц. Составляющие сигнала с более высокими частотами могут проявляться в сигнале как паразитные и подавляюся аналоговым контуром системы. На практике частота среза аналогового контура составляет  $\sim 12$  Гц. Таким образом, полоса полезного сигнала стабиланализатора вписывается в диапазон 0,05–12 Гц.

Из всего многообразия показателей и параметров, вычисляемых программой, используем следующие:

Статокинезиограмма (СКГ) — графическое представление траектории движения центра давления во время стабилметрическо-

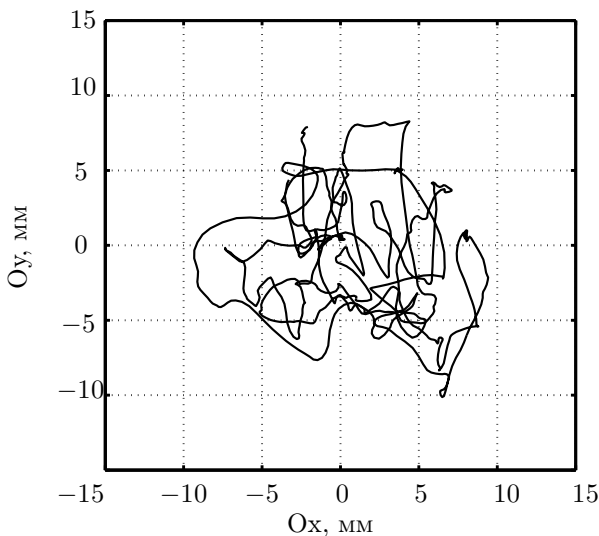


Рис. 1.3. Пример статокинезиграммы

го исследования в системе координат платформы. Она показывает зону колебаний центра давления на плоскости опоры (рис. 1.3)

Проекции статокинезиграммы на координатные оси  $OX$  и  $OY$  платформы называются стабิโลграммой во фронтальном направлении ( $X$ ) и стабילוграммой в сагиттальном направлении ( $Y$ ). Движения ЦД вперед и вправо имеют положительное значение. Зависимость от времени веса человека, т. е. той силы, с которой он действует на опору, принято называть баллистограммой обследования.

**2.2. Анализ стабิโลметрического сигнала.** Обозначим отсчеты координат центра давления (ЦД) в момент времени  $t_i$  через  $X_i$  и  $Y_i$ .

Программное обеспечение пакета Stabmed вычисляет следующие параметры, которые мы будем использовать при анализе движений.

Оценка смещения ЦД ( $M(X), M(Y)$ ) — среднее значение положения ЦД по фронтали и сагиттали соответственно. Смещения определяют центр облака отсчетов кривой стабילוграммы и характеризуют изменения координат ЦД в процессе проведения обследования после предварительной «центровки». Центрирование — совмещение положения ЦД человека с началом координат или вычитание из координат ЦД некоторых констант. Эти константы опре-

деляются как усредненные значения координаты ЦД на интервале времени 2 с.

Разброс  $\sigma$  — оценка среднеквадратического отклонения ЦД по соответствующему направлению относительно смещения:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [X_i - M(X)]^2},$$

$$\sigma_y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [Y_i - M(Y)]^2},$$

где  $D(\cdot)$  — дисперсия соответствующей компоненты, а  $N$  — число отсчетов в эксперименте.

Оценку ковариации  $Cov(X, Y)$  вычисляют

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [X_i - M(X)] [Y_i - M(Y)].$$

Площадь доверительного эллипса —  $S_{el}$  (мм<sup>2</sup>):

$$S_{el} = 2 \ln \frac{1}{1-\beta} \sqrt{D(X)D(Y) - Cov(X, Y)^2},$$

где  $\beta$  — вероятность попадания точки статокинезиограммы в эллипс ( $\beta = 0,9$ ). То есть  $S_{el}$  — это основная часть площади, занимаемой статокинезиограммой без так называемых петель и случайных выбросов. Эта величина характеризует рабочую площадь опоры человека. При расчете площади эллипса предполагается, что координаты ЦД распределены по нормальному случайному закону. Для выявления периодических закономерностей используем спектральный анализ стабиллограмм и баллистограмм.

### §3. Спектральная плотность сигнала

Для анализа сложных процессов в механических системах часто используется спектральный статистический анализ — метод обработки сигналов, который позволяет выявить частотный состав сигнала, т. е. распределение энергии сигнала внутри какого-то частотного диапазона, получаемое с использованием Фурье-разложений [13]. Краткое обсуждение основных свойств преобразования Фурье непрерывных и дискретных функций, необходимых для освоения обсуждаемого материала, приведено в Приложении 2. В настоящем разделе обсудим особенности спектрального анализа показаний стабиллоанализатора.

Будем исходить из предположения, что спокойное стояние человека описывается с помощью стационарного эргодического процесса. Напомним, что:

*Случайный процесс называется стационарным, если его статистические характеристики одинаковы во всех временных сечениях.*

*Процесс называется эргодическим, если усреднения по ансамблю реализаций равняются усреднению по времени.*

Формальное применение преобразования Фурье к реализации случайной функции также будут представлять собой набор случайных чисел. На практике же интерес представляют усредненные характеристики случайных процессов. То есть **речь должна идти о вычислении спектра математического ожидания процесса, вычисленного по ансамблю его реализаций.** Поэтому под спектральной плотностью мощности  $S(\omega)$  стационарного случайного процесса  $s(t)$  понимают преобразование Фурье от корреляционной функции

$$W(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1) e^{-i\omega\tau_1} d\tau_1,$$

где

$$R(\tau) = M[s(t)s(t + \tau)].$$

Оценку этой величины для последовательности, заданной в дискретные моменты времени  $t = n\tau$ , можно получить в результате осреднения по ансамблю реализаций. Для дискретных значений частот  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N\tau}$  с учетом (1.18) спектр мощности вычисляется в виде

$$W_d(\omega_k) = M \left| \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \right|^2.$$

Традиционно используемые методы оценки спектров можно разделить на две группы:

- непараметрические, в которых используется только информация, заключенная в отсчетах сигнала, без каких-либо дополнительных предположений (их иначе называют классическими);
- параметрические, которые подразумевают наличие некоторой математической модели анализируемого случайного процесса.

Поскольку мы не имеем достаточной априорной информации о модели движения человека, используем методы первого типа.

**3.1. Оценка спектра методом Уэлча.** Периодограммой называется оценка спектральной плотности мощности, полученная по  $N$  отсчетам одной реализации случайного процесса согласно [13]:

$$\hat{W}(k) = \tau \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \right|^2.$$

Деление на частоту дискретизации  $1/\tau$  необходимо для получения оценки спектра непрерывного случайного процесса, восстановленного по отсчетам  $s(n\tau)$ .

Если при расчете спектра используется весовая функция (окно) с коэффициентами  $w(k)$ , последняя формула слегка модифицируется: вместо числа отсчетов  $N$  в знаменателе должна стоять сумма квадратов модулей коэффициентов окна. Полученная оценка называется модифицированной периодограммой:

$$\hat{W}(k) = \tau \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n) e^{-i \frac{2\pi}{N} nk} \right|^2}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right|^2}.$$

Можно показать, что периодограмма не является состоятельной оценкой спектральной плотности мощности, поскольку ее дисперсия сравнима с квадратом математического ожидания. С ростом числа используемых отсчетов значения периодограммы начинают все быстрее флуктуировать. При вычислении периодограмм по длинному фрагменту случайного сигнала она оказывается весьма изрезанной. Для уменьшения этой изрезанности необходимо применять некоторое усреднение.

Используя предположение об эргодичности случайного процесса, создадим псевдоансамбль периодограмм за счет деления последовательности из  $D$  отсчетов данных на неперекрывающихся сегментах по  $N$  отсчетов в каждом. Уэлч внес в этот метод два усовершенствования: использование весовой функции и разделение сигнала на перекрывающиеся фрагменты. Применение весовой функции позволяет ослабить растекание спектра и уменьшить смещение получаемой оценки спектральной плотности мощности ценой незначительного ухудшения разрешающей способности. Перекрывание же сегментов введено для того, чтобы увеличить их число и уменьшить дисперсию оценки. Обозначим через  $\Delta N$  величину сдвига между сегментами, которая должна удовлетворять условию



$\Delta N = T_k/\tau$ , где  $T_k$  — интервал корреляции исследуемого процесса. Разобьем сигнал на  $P = \text{int}(N - \Delta N + 1)$  сегментов. В результате мы получим  $P$  слабо коррелированных реализаций сигнала.

Отсчеты каждого сегмента взвешиваются окном  $w(k)$ , и вычисляются модифицированные периодограммы. По каждому сегменту вычисляется спектральная оценка, а затем усредняется по сегментам: если корреляционная функция сигнала на длительности сегмента затухает до пренебрежимо малых значений, то периодограммы отдельных сегментов можно считать независимыми, и в этом случае дисперсия периодограммы обратно пропорциональна числу сегментов.

На основе этих соображений алгоритм Уэлча (или метод усреднения модифицированных периодограмм) организуется следующим образом:

1. Вектор отсчетов сигнала делится на перекрывающиеся сегменты. На практике, как правило, используется 50% перекрытия. Строго говоря, оптимальная степень перекрытия зависит от характера погрешностей вида применяемого окна. В частности, можно показать, что для гауссовских случайных процессов при использовании окна Ханна минимальная дисперсия оценки спектральной плотности мощности получается при перекрытии сегментов на 65%.

2. Каждый сегмент умножается на используемую весовую функцию.

3. Для взвешенных сегментов вычисляются модифицированные периодограммы.

4. Периодограммы всех сегментов усредняются.

В методе Вэлча дисперсия оценки примерно обратна числу сегментов, но, так как сегментов за счет перекрытия больше, дисперсия меньше.

**Примечание..** Для окна Ханна из  $N$  точек коэффициенты вычисляются по формуле

$$w(k) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi(k-1)}{N-1} \right).$$

Такой метод реализован, например, в пакете **Matlab** в функции **pwelch**, которая имеет следующее обращение:

**[Pxx,F] = pwelch(x, window, noverlap, nfft, Fs).**

Здесь **x** — вектор дискретных отсчетов, **window** — количество отсчетов в сегменте, используемых для оценки периодограммы, **noverlap** — число точек при перекрытии сегментов, **nfft** —

*число отсчетов, используемых при быстром преобразовании Фурье (2<sup>q</sup>), Fs — частота дискретизации сигнала. Выходные параметры Pxx — вектор, содержащий значения отсчетов спектра мощности, F — вектор, содержащий значения частот.*

**3.2. Спектральный анализ колебаний при удержании вертикальной позы человеком.** Перед выполнением работы обсудим те колебания, которые можно наблюдать в результате расчета спектров показаний стабиланализатора.

Прежде всего значимое влияние на спектр показаний стабиланализатора оказывают колебательные движения тела, обусловленные динамикой мышечного сокращения. Эти движения оказывают наиболее существенное влияние на стабилметрический сигнал. Анализ этого сигнала в большинстве случаев позволяет судить именно об этой составляющей движений. При выполнении практической части работы используем анализ стабิโลграмм для исследования влияния различных сенсорных систем на удержание вертикальной позы.

Наряду с этим у человека наблюдаются ещё два периодических процесса, которые могут проявляться в сигналах стабиланализатора. Наибольшие изменения позной конфигурации тела человека вызывает дыхание. Частота дыхания здорового человека лежит в диапазоне 0,15–0,4 Гц. Амплитуды изменения окружности груди при глубоком дыхании составляют величины порядка 4–10 см. Такие изменения конфигурации человеческой фигуры могли бы отражаться на показаниях стабилметра, для которого чувствительность при определении центра давления достигает величин порядка 1 мм. Тем не менее для здорового человека в спектре сигналов стабиланализатора проявлений дыхания, как правило, не наблюдается [1]. Это объясняется тем, что согласованные изменения суставных углов в коленном и тазобедренном суставах компенсируют перемещение центра масс тела, а соответственно, и центра давления. Поэтому явные проявления дыхательных движений в стабилметрическом сигнале могут являться признаком нарушений в системе стабилизации позы. Спектральные пики в этой области могут быть связаны с так называемыми «основными колебаниями» [1]. Частота этих колебаний предположительно совпадает с собственной частотой колебаний системы, в которой мышцы моделируются упругими элементами [14].

Движение крови по сосудам не приводит к столь значительным изменениям конфигурации человеческой фигуры, но сопровождается значительным перемещением масс крови. Такие изменения

вливают на величины реакций опоры, измеряемые датчиками усилий, и проявляются в спектре баллистограммы. Характерная картина электрокардиограммы, полученная с помощью электрокардиографа Варикард, приведена на рис. 1.4.

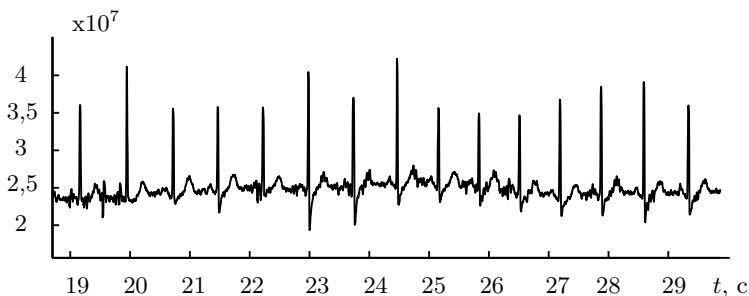


Рис. 1.4. Запись кардиограммы здорового человека

Как сигнал электрокардиограммы, так и микродвижения, вызванные сердечными сокращениями, являются почти периодическим, но не являются синусоидальными. В связи с этим спектр сигналов электрокардиограммы (см. рис. 1.5) и спектр показаний силоизмерительных датчиков (см. рис. 1.6) содержат значительные составляющие, кратные частотам сердечных сокращений, что хорошо видно при совмещении спектров на рис. 1.5. Таким образом, сигналы баллистограмм содержат информацию о механических движениях тела человека, обусловленных сокращениями сердца, перемещением крови в сосудах и состоянием активного двигательного аппарата.

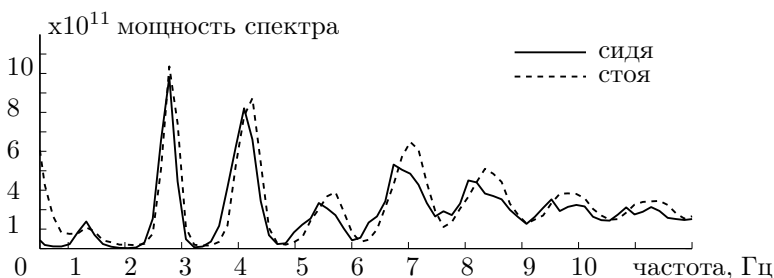


Рис. 1.5. Спектр электрокардиограммы

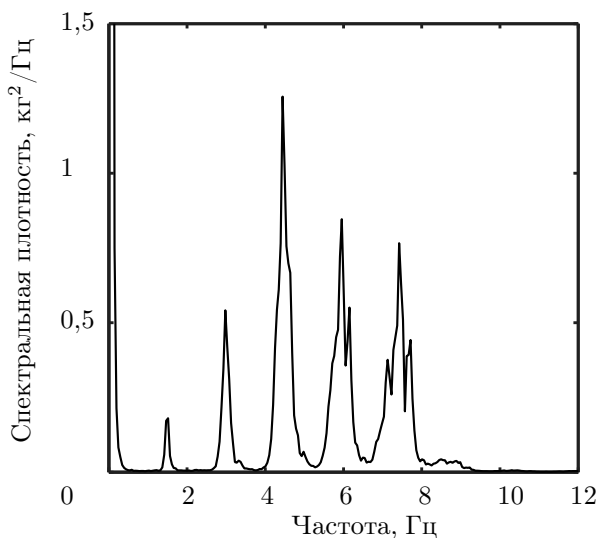


Рис. 1.6. Спектр баллистограммы здорового человека

## §4. Выполнение работы

### *Исследование роли сенсорных систем при удержании человеком вертикальной позы*

1. Включить компьютер и питание стабилоанализатора (кнопка на боковой поверхности прибора).
2. Запустить программу **Stabmed**.
3. Завести нового «пациента». Для этого в меню «Обследование» выбрать пункт «Новое обследование». На экране появится окно со списком «пациентов». В левом верхнем углу этого окна следует выбрать раздел «Новый» и ввести фамилию, имя и отчество обследуемого, его пол и дату рождения, после чего выбрать пункт «ОК».

4. Обследуемый встает на стабилограф в удобной свободной позе. Предпочтительной является поза, при которой стопы стоят параллельно, на ширине плеч.

5. В появившемся окне «Новое обследование. Шаг 2. Выбор методики» выбрать методику «Тест Ромберга» и нажать «Начать». **С этого момента обследуемый должен стоять неподвижно** (т. е. не должен совершать осознанных движений).

6. В появившемся окне отображения хода обследования следует последовательно выбрать пункты «Центровка» и «Запись».

7. По окончании записи с открытыми глазами следует попросить обследуемого закрыть глаза, выбрать пункт «Запись» и провести обследование с закрытыми глазами.

8. Результаты обследования занести в таблицу I.1 и закрыть обследование, нажав «Ctrl»+«F4».

9. Повторить обследования по пунктам 5–8 в условиях, когда обследуемый касается ногтем неподвижного предмета, например спинки стула, придвинутого к платформе стабилоанализатора. Занести результаты в таблицу.

10. Повторить обследования по пунктам 5–8 в условиях, когда обследуемый стоит в не вполне устойчивой позе: одна нога впереди другой, для ситуаций, когда он не касается никаких опор и касается ногтем одного из пальцев рук неподвижного предмета, например спинки стула, придвинутого к платформе стабилоанализатора. Занести результаты в таблицу.

Описанную серию обследований провести для нескольких человек.

Поза	Условия		$\sigma_x$	$\sigma_y$	$S_{el}$
	Глаза	Касание пальцем			
Нормальная	Открыты	Нет касания			
Нормальная	Открыты	Касание			
Нормальная	Закрыты	Нет касания			
Нормальная	Закрыты	Касание			
Неустойчивая	Открыты	Нет касания			
Неустойчивая	Открыты	Касание			
Неустойчивая	Закрыты	Нет касания			
Неустойчивая	Закрыты	Касание			

Таблица I.1. Результаты обследования

*Отыскание периодических составляющих в показаниях стабильноанализатора*

1. Для проведения этой части работы проводятся две записи стояния обследуемого в свободной стойке с открытыми и закрытыми глазами продолжительностью по одной минуте каждая. Для этого в окне «Новое обследование. Шаг 2. Выбор методики» выбрать методику «Стабилографическое обследование» и нажать «Начать». С этого момента обследуемый также должен стоять неподвижно (т. е. не должен совершать осознанных движений).

2. Как и ранее, в появившемся окне отображения хода обследования следует последовательно выбрать пункты «Центровка» и «Запись». По прошествии одной минуты выбрать пункт «Завершить». Для отсчета времени записи следует использовать показания цифрового секундомера в окне программы.

Вычисление спектральной плотности в используемой версии пакета *Stabmed* и её графическое представление проводится недостаточно аккуратно. В связи с этим для вычисления спектра необходимо:

1. Экспортировать данные из пакета *Stabmed*. Для этого следует открыть проделанное обследование («Обследование» → «Открыть» и выбрать нужное обследование из списка), выбрать раздел «Баллистограмма» и, удерживая курсор на слове «Баллистограмма», нажать правую кнопку мыши. На появившейся панели выбрать пункт «Экспорт всех сигналов», выбрать путь для экспорта файла в папку *D:/Student* и нажать «ОК».

2. Для вычисления спектра сигнала можно использовать любой вычислительный пакет. Приведем соответствующие действия для пакета `Matlab`. Установить в параметр `Current directory` путь в папку с сохраненными файлами. Прочитать файл, используя функцию `load`: `X = load('имя файла')`. После этого среди переменных появится матрица `X` с тремя столбцами. Первые два столбца содержат координаты центра давления по фронтали и сагиттале соответственно, а третий столбец — вес.

3. Для вычисления спектра мощности следует вызвать функцию `pwelch`: `[Pxx,F] = pwelch(X(:,k), window, noverlap, nfft, Fs)`.

Рекомендуемые значения параметров `window` и `nfft` — 1024, `noverlap` = 500, `Fs` = 50, `k` — номер столбца, для которого вычисляется спектр.

4. Построить графики спектральной плотности мощности для диапазона частот 0—2 Гц для координат центра давления и 0—12 Гц для веса. Для этого можно воспользоваться командами `plot(F,Pxx)`  
`set(gca, 'XLim', [0,Xmax], 'YLim', [0,Ymax]);`

Величину `Xmax` для двух первых столбцов рекомендуется выбрать равной 2 Гц, а для веса — 12 Гц. Величину `Ymax` следует выбрать таким образом, чтобы было хорошо видно поведение графика в диапазоне частот от 0 до `Xmax` Гц. Большие значения спектральной плотности в окрестности 0 отражают медленные смещения центра давления и анализу в рамках данной работы не подлежат.

5. Распечатать полученные графики.

## §5. Контрольные вопросы

1. Записать соотношения для вычисления координат центра давления по показаниям датчиков усилий, регистрирующих вертикальные составляющие реакций опор. Опоры расположены в вершинах горизонтального квадрата со стороной  $2a$ .
2. Зачем в мобильной платформе с четырьмя датчиками нужна регулируемая по высоте четвертая опора?
3. Вывести соотношения (1) и (2) из приложения 1 для описания сагиттальной составляющей координат центра давления.
4. Записать уравнения, связывающие показания стабилоанализатора, угла наклона туловища в сагиттальном направлении и момента в тазобедренном суставе для неустойчивой позы. Ноги считать неподвижными.

5. Объяснить наличие в рассчитанных спектрах нескольких пиков на частотах, кратных частоте сердечных сокращений.
6. Рассчитать спектральную плотность баллистограммы при частоте съёма информации 10 Гц (выбрано каждое пятое измерение массива данных). Пояснить отличие полученной картины и исходной, рассчитанной при частоте съёма измерений 50 Гц.

## Приложение 1

### Механические модели стабилотрии

Основной информацией, которая выдается программным обеспечением стабилотристора, являются фронтальная  $x_s$  и сагиттальная  $y_s$  координаты центра давления — точки  $O_n$  приложения равнодействующей  $N$  сил вертикальных реакций, действующих в опорах платформы, а также величина этой равнодействующей — вес.

Рассмотрим далее описание малых колебаний человека относительно положения равновесия в окрестности вертикальной позы, используя традиционный для этой задачи подход [14, 15]. Отклонения от вертикали сегментов тела человека допустимо считать малыми и рассматривать задачи анализа колебаний в сагиттальной и фронтальной плоскостях отдельно, не учитывая влияния крутильных колебаний вокруг вертикальной оси.

**Модель движений в сагиттальной плоскости.** Для описания колебаний человека в сагиттальной плоскости примем традиционную модель перевернутого маятника, изображенную на рис. 1.7. Вслед за сложившейся традицией предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым стержнем массы  $m$ , закрепленным шарнирно в точке  $O$ , соответствующей голеностопному суставу. Заметим, что в более сложном случае модели многозвенного стержня такая модель будет описывать наиболее значимую первую форму колебаний многозвенника [14].

Центр масс стержня расположен в точке  $C$  на расстоянии  $l_c$  от  $O$ . Момент инерции стержня относительно точки равен  $J$ . Отклонение стержня от вертикали опишем углом  $\theta$ . Будем считать, что обследуемый ориентирован так, что его сагиттальная ось параллельна оси чувствительности платформы. Будем считать стопу неподвижной относительно платформы.

Стержень совершает движение под действием момента в голеностопном суставе  $M_x$ . Из анализа этой системы можно получить



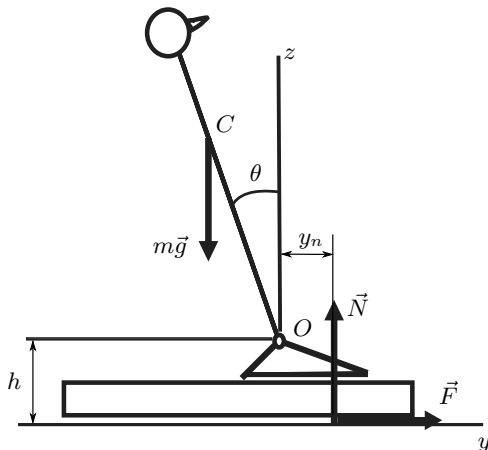


Рис. 1.7. Модель движений человека в сагиттальной плоскости

уравнение её движения в виде

$$J\ddot{\theta} = mgl_c\theta + M_x \quad (1.1)$$

и выражение для измерений стабилоанализатора в виде

$$\begin{aligned} Ny_n &= M_x - F_y h + m_p g y_p = \\ &= M_x \left( 1 + \frac{ml_c h}{J} \right) + \frac{m^2 g l_c^2 h}{J} \theta + m_p g y_p. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $m_p g$  — сила тяжести системы «платформа — стопа»,  $y_p$  — координата центра масс этой объединенной системы,  $y_n$  — сагиттальная координата центра давления, отсчитываемая от оси голеностопного сустава,  $h$  — расстояние от точки до плоскости, образованной чувствительными элементами сенсоров платформы,  $N$  и  $F_y$  — составляющие равнодействующей сил в опорах. Для грубой оценки предполагаем, что момент инерции  $J$  можно приблизительно оценивать через момент инерции стержня длиной  $2l_c$ , что приближённо соответствует известным антропометрическим данным [15].

$$Ny_n = M_x \left( 1 + \frac{3h}{4l_c} \right) + \frac{3mgh}{4} \theta + m_p g y_p.$$

Тогда переменная составляющая сагиттальной стабилограммы при условии  $N \approx mg$  совпадает с переменной составляющей величины:

$$y_s = \left[ \frac{M_x}{mg} \left( 1 + \frac{3h}{4l_c} \right) + \frac{3h}{4l_c} l_c \theta \right] \left( 1 + \frac{m_p}{m} \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

В этом соотношении  $l_c\theta$  — расстояние вдоль оси  $y$  от оси голеностопного сустава до проекции центра масс человека. Учитывая соотношения,  $\frac{m_p}{m} \ll 1$  и  $\frac{h}{l_c} \ll 1$ , бесспорно выполняющиеся для взрослых обследуемых, получим основное соотношение для переменной составляющей сагиттальной стабиллограммы:

$$\Delta y_s = \frac{\Delta M_x}{mg}, \quad (1.4)$$

где  $\Delta M_x$  — изменение момента в голеностопном суставе. Это соотношение выполняется с погрешностью порядка  $\max\left(\frac{m_p}{m}, \frac{h}{l_c}\right)$  для любых по темпу движений.

**Модель движений во фронтальной плоскости.** Простая модель перевернутого маятника не описывает полностью удержание человеком вертикальной позы во фронтальной плоскости. Наличие двух опор при привычной стойке во фронтальной плоскости и незначительные величины фронтальных моментов, развиваемые мышцами в голеностопном суставе, существенно меняют механическую схему, которую необходимо использовать при моделировании движения. Эта схема зависит от постановки ног [16]. При постановке единственной ноги на платформу стабиллоанализатора изменение фронтальной стабиллограммы, аналогично модели измерений в сагиттальной плоскости, описывает фронтальный момент в голеностопном суставе [16].

При установке обеих ног на платформу стабиллоанализатора задача существенно усложняется. Для упрощения рассмотрим только один случай движения человека, когда ступни располагаются под тазобедренными суставами. Будем считать, что опора ноги о плоскость точечная и центры тазобедренных суставов  $A_1$ ,  $A_2$  и точек  $O_1$ ,  $O_2$  опоры ног о плоскость образуют параллелограмм, как показано на рис. 1.8. Такое положение приближенно соответствует позе «ноги на ширине плеч».

Обозначим через  $l$  длину ноги  $O_iA_i$ ,  $m_b$  — массу туловища с головой и руками,  $m_f$  — массу одной ноги, т. е.

$$m = m_b + 2m_f. \quad (1.5)$$

$M_1$  и  $M_2$  — моменты, создаваемые мышцами в правом и левом голеностопных суставах соответственно.

Вывод соотношений для движений во фронтальной плоскости сложнее, поэтому рассмотрим его здесь более подробно. Примем гипотезу о том, что удержание позы во фронтальной плоскости

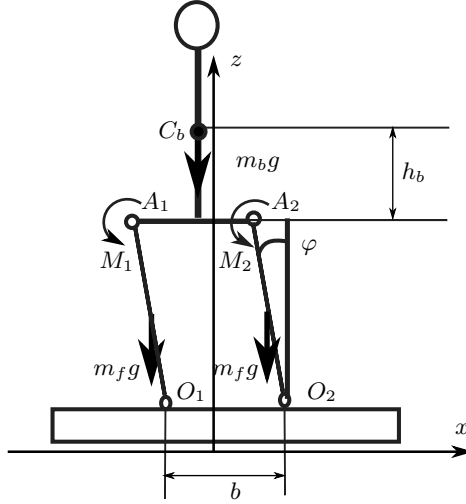


Рис. 1.8. Модель движений человека во фронтальной плоскости

осуществляется за счет мышц тазобедренного сустава. В качестве обобщенной координаты выберем угол  $\varphi$ , образованный ногой  $O_i A_i$  с вертикалью. Уравнения движения такой системы запишем, используя уравнения Лагранжа. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = 2 \frac{J_f \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_b v_b^2}{2},$$

где  $J_f$  — момент инерции ноги относительно точки  $O_i$ , а  $v_b$  — скорость центра масс «туловища». Для малых значений угла  $\varphi$  и ног, моделируемых стержнями,

$$T = \left( \frac{m_f}{3} + \frac{m_b}{2} \right) l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Обобщенную силу в этих же предположениях запишем в виде

$$Q = (m_f + m_b) gl \varphi + M_1 + M_2.$$

Уравнение Лагранжа запишем для движения системы в виде

$$\ddot{\varphi} = \frac{m_b + m_f}{m_b + \frac{2}{3}m_f} \frac{g}{l} \varphi + \frac{M_1 + M_2}{\left( m_b + \frac{2}{3}m_f \right) l^2} \varphi. \quad (1.6)$$

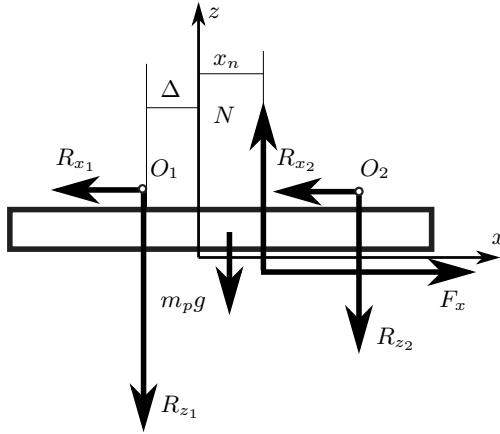


Рис. 1.9. Силы, действующие на систему «платформа — стопа» во фронтальной плоскости

Это уравнение приближённо описывает движение стоящего человека во фронтальной плоскости и имеет тот же вид, что и уравнение (1), для движений в сагиттальной плоскости.

Для выражения фронтальной составляющей стабилотограммы нам потребуются данные о горизонтальных  $R_{x1}$ ,  $R_{x2}$  и вертикальных  $R_{z1}$ ,  $R_{z2}$  составляющих реакции опорной поверхности. Для их отыскания воспользуемся теоремами о движении центра масс и об изменении кинетического момента этой системы, показанной на рис. 1.9, относительно точки  $O_1$ . Введем обозначение  $I = \left[ m_b (l + h_b) + \frac{2}{3} m_f l \right]$ . Учтём малость угла  $\varphi$ , скорости и ускорения его изменения

$$\begin{cases} (m_b + m_f) l \ddot{\varphi} = -R_{x1} - R_{x2} \\ 0 = R_{z1} + R_{z2} - (m_b + 2m_f) g, \\ I l \ddot{\varphi} = - (m_b + 2m_f) g b + \\ + (m_b + m_f) g l \varphi + 2R_{z2} b. \end{cases} \quad (1.7)$$

Из двух последних уравнений системы (1.7) и уравнения (1.6) выразим вертикальные реакции опорных поверхностей в виде

$$\begin{aligned} R_{z1} &= \frac{(m_b + 2m_f) g}{2} - \frac{\ddot{\varphi} l}{2b} I + (m_b + m_f) \frac{g l \varphi}{2b}, \\ R_{z2} &= \frac{(m_b + 2m_f) g}{2} + \frac{\ddot{\varphi} l}{2b} I - (m_b + m_f) \frac{g l \varphi}{2b}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Показания стабилотографа выразим из этих реакций, рассматривая уравнения равновесия платформы для схемы, представленной на рис. 1.9 так же, как и для сагиттальных колебаний. Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{cases} F_x - R_{x1} - R_{x2} = 0, \\ N - R_{z1} + R_{z2} - m_p g = 0, \\ Nx_n + F_x h_p - R_{z1} \Delta - R_{z2} (\Delta + 2b) - m_p g x_p = 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

где  $x_n$  — фронтальная координата центра давления;  $F_x$  — проекция реакций опор платформы на горизонтальную ось сагиттальной плоскости;  $h_p$  — расстояние от точки  $O_i$  до плоскости, образованной чувствительными элементами сенсоров платформы;  $\Delta$  — фронтальная координата точки  $O_1$  в осях стабилотоанализатора. Используем эти соотношения и выражения (1.7)–(1.8) для того, чтобы получить выражение для измерений стабилотоанализатора в виде

$$Nx_n = (m_b + 2m_f) g (b + \Delta) + m_p g x_p - (m_b + m_f) g l \varphi + \left[ m_b (b + h_p) + \frac{2}{3} m_f l + (m_b + m_f) h_p \right] l \ddot{\varphi}.$$

Выразим угловое ускорение из (1.6) и нормальную реакцию с помощью вторых уравнений систем (1.7) и (1.9), а также используем соотношение для масс (1.5). Отбросив постоянные слагаемые, получим соотношение для величины  $x_s$ , изменение которой описывает переменную составляющую фронтальной стабилотограммы:

$$x_s = \frac{\Delta M_h}{mgl} \frac{\left( m - \frac{4}{3} m_f \right) l + (m - 2m_f) h_b + (m - m_f) h_p}{m - \frac{4}{3} m_f} + \frac{(m - 2m_f) \frac{h_b}{l} + (m - m_f) \frac{h_p}{l}}{m - \frac{4}{3} m_f} x_{com}. \quad (1.10)$$

Здесь  $\Delta M_h$  — изменение суммарного момента в тазобедренных суставах, а  $x_{com} = \left( 1 - \frac{m_f}{m} \right) l \varphi$  — фронтальное перемещение центра масс. Выражение (10) для фронтальной составляющей содержит «хороший» малый параметр  $\frac{h_p}{l} \ll 1$  и отношение  $\frac{m_f}{m} \approx 0,2$ , которое также в первом приближении можно считать малым. Пренебрегая этими величинами и учитывая приближенное соотношение

$\frac{h_b}{l} \leq 0,5$ , получим грубую оценку для величины  $x_s$  в виде

$$x_s = \frac{\Delta M_h}{mg} \left( 1 + \frac{h_b}{l} \right) + h_b \varphi. \quad (1.11)$$

Чтобы сравнить слагаемые, приведем это соотношение к безразмерному виду, перейдя к переменным  $\delta M = \frac{\Delta M_h}{M_*}$ ,  $\delta x_s = \frac{x_s}{x_*}$  и  $\delta \varphi = \frac{\varphi}{\varphi_*}$ . В качестве характерного значения  $\varphi_*$  примем величину амплитуды изменения угла  $\varphi$ . Примем за  $M_*$  модуль момента в тазобедренном суставе, который обеспечивает равновесие системы при  $\varphi = \varphi_*$  и  $x_* = l\varphi_*$ :

$$M_* = (m - m_f) gl\varphi_* \approx mgl\varphi_*$$

Для новых переменных выражение (1.11) примет вид

$$\delta x = \delta M \left( 1 + \frac{h_b}{l} \right) + \frac{h_b}{l} \delta \varphi. \quad (1.12)$$

Так как  $\frac{h_b}{l} \sim 0,5$ , вклад изменения момента в тазобедренном суставе по крайней мере втрое превышает вклад прочих факторов. Таким образом, фронтальную стабиллограмму можно использовать для грубой оценки изменений момента в тазобедренном суставе.

Итак, в силу принятых предположений колебания во фронтальном и сагиттальном направлениях управляются группами мышц тазобедренного и голеностопного суставов соответственно.

Несмотря на значительные различия в структуре механической схемы для сагиттальных и фронтальных движений, приближённые уравнения (1.1) и (1.6), описывающие эти движения, однотипны. Постоянные времени для этих уравнений равны

$$T_s = \sqrt{\frac{l_c}{3g}} \text{ и } T_f = \sqrt{\frac{m_b + \frac{2}{3}m_f l}{m_b + m_f g}}.$$

Для человека ростом в 1,7 м, в соответствии с данными [15], эти постоянные времени близки по величине и приближённо составляют 0,16 с и 0,2 с. Таким образом, уравнения, описывающие удержание человеком вертикальной позы, совпадают с уравнениями колебаний активно стабилизируемого перевернутого маятника с небольшой асимметрией упругих сил во фронтальном и сагиттальном направлениях.

Соотношения (1.3) и (1.11) для изменения сагиттальной и фронтальной стабиллограмм хотя и совпадают по форме, однако весовой

вклад слагаемых, определяемых положением центра масс и моментом в суставе, в них различен. Если для саггитальных колебаний показания стабиллографа в соответствии с (4) хорошо отображают изменение момента в голеностопном суставе, то для фронтальной плоскости подобное утверждение носит приближенный характер.

## Приложение 2

### Основы спектрального анализа

Частотный (спектральный) метод основан на представлении сигналов в виде совокупности синусоидальных составляющих с различными частотами — спектра сигнала. Математической базой для спектрального представления сигналов являются аппарат рядов Фурье и интегралов Фурье.

**Преобразование Фурье.** Сигнал, обладающий свойством периодичности  $f(t) = f(t + T)$ , может быть представлен в виде ряда Фурье, запись которого в комплексной форме имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(i\omega_k) e^{\mp i\omega_k t}, \quad \text{где} \quad (1.13)$$

$$F(i\omega_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (1.14)$$

— комплексные коэффициенты ряда. В последнем интеграле пределы интегрирования от 0 до  $T$  заменены симметричными пределами от  $-T/2$  до  $T/2$ , что не изменяет его значения. Такое представление является традиционным для комплексной формы ряда Фурье. Суммирование в (1.13) включает не имеющие реального смысла «отрицательные частоты»  $\omega_{-k} = -2\pi k/T$  — члены ряда с отрицательными индексами.

Комплексные коэффициенты ряда Фурье позволяют непосредственно выразить амплитуды гармоник  $A_k = 2|F(i\omega_k)|$  и их начальные фазы  $\psi_k = \arg[F(i\omega_k)] + \pi/2$ . Отсюда следует также, что комплексные коэффициенты с положительными и отрицательными индексами являются комплексно сопряженными.

Совокупность комплексных коэффициентов  $F(i\omega_k)$  рассматриваемой функции образует ее спектр. Так как в спектре периодического сигнала присутствуют только частоты, кратные частоте основной (первой) гармоники  $\omega_k = 2\pi k/T = \omega_1 k$ , то изображение такого спектра, на котором по оси абсцисс откладывают значения

частоты, а по оси ординат — соответствующие им амплитуды, имеет дискретный характер. Поскольку амплитуда  $A_k$  является четной функцией частоты, то ее достаточно изобразить лишь для положительных значений частоты. Однако такой спектр не содержит полной информации о сигнале, которую необходимо либо дополнить частотной зависимостью начальных фаз  $\psi_k$ , либо привести распределение вещественной и мнимой частей.

Рассмотрим величину

$$W = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt,$$

которую можно ассоциировать со средней мощностью сигнала за период. Подставим в эту формулу разложение (1.13)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| A_0 + \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \psi_k) \right|^2 dt \\ &= A_0^2 + \frac{1}{T} \sum_{k=1,2,\dots} \int_{-T/2}^{T/2} A_k^2 \sin^2(\omega_k t + \psi_k) dt, \\ &= A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} A_k^2. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо утверждение: *Средняя мощность сигнала равна сумме мощностей его спектральных составляющих, выделяемых в отдельности. Она не зависит от сдвига фаз отдельных гармоник.*

$$W = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1,2,\dots}^{\infty} A_k^2. \quad (1.15)$$

Переход от спектрального представления периодического сигнала к представлению непериодического сигнала можно осуществить, рассматривая соотношения комплексной формы ряда Фурье для сигналов с периодом  $T$  при  $T \rightarrow \infty$ . Из выражения (1.14) и рассмотренного примера следует, что при таком предельном переходе интервалы между соседними частотами дискретного спектра  $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1} = 2\pi/T$  неограниченно уменьшаются, что приводит к непрерывному спектру, соответствующему непериодическому сигналу. Однако его коэффициенты Фурье  $F(i\omega_k)$  и амплитуды отдельных гармоник становятся бесконечно малыми.



В результате сумма перейдет в интеграл. Заменяя обозначение  $F_T(i\omega_k)$  на  $S(i\omega)$  запишем спектральное представление непериодического сигнала:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.16)$$

$$S(i\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(i\omega) e^{i\omega t} dt. \quad (1.17)$$

Полученные формулы определяют прямое (1.16) и обратное (1.17) интегральные преобразования Фурье. Величина  $S(i\omega)$ , характеризующая распределение отдельных частотных составляющих в спектре сигнала, называется спектральной плотностью.

**Спектр сигнала с дискретным временем.** Для краткости и наглядности рассмотрим нестрогое представление спектра сигнала с дискретным временем. Рассмотрим основные свойства преобразования Фурье на примере «решетчатой» обобщенной функции  $s_d(t)$ , заданной на конечном отрезке  $t = 0, \tau, 2\tau, \dots, (N-1)\tau$  в дискретные моменты времени  $t = 0, \tau, 2\tau \dots (N-1)\tau$ . Эта функция получается из непрерывного сигнала  $s(t)$  на

$$s_d(t) = s(t) \sum_{n=0}^{N-1} \delta(t - n\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t) \delta(t - n\tau),$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака, а  $\tau$  — интервал дискретизации.

Спектр этой функции совпадает со спектром функции, заданной в дискретные моменты времени. Вычислим спектр дискретного сигнала:

$$\begin{aligned} S_d(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_d(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} s(t) \delta(t - n\tau) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) e^{-i\omega n\tau}. \end{aligned}$$

Таким образом, расчет спектра дискретного сигнала представляется в виде суммы комплексных экспонент. Частота в рассмотренном случае меняется на всей числовой оси. Можно заметить, что комплексные экспоненты под знаком суммы в полученном выражении являются периодическими функциями частоты  $\omega$  с периодами:

$$\Omega(n) = \frac{2\pi}{n\tau}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Полученная функция будет иметь минимальный период  $2\Omega_N = \frac{2\pi}{\tau}$ . Спектр, заданный для всех действительных значений частоты  $\omega$ , можно описать с помощью  $N$  синусоид, и для его определения достаточно знать значения  $S_d(i\omega)$  в  $N$  точках. В качестве таких дискретных значений выбираются значения частот  $\omega_k = \frac{2\pi k}{N\tau}$  для  $k = 0, \dots, N-1$ .

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$S_d(i\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

ставит в соответствие  $N$  отсчетам дискретного сигнала  $N$  отсчетов дискретного спектра, при этом предполагается, что и сигнал, и спектр являются периодическими и анализируются на одном периоде.

Отметим, что это отображение взаимно однозначно и существует обратное дискретное преобразование Фурье:

$$s(n\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_d(i\omega_k) e^{i\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (1.18)$$

### Свойства дискретного преобразования Фурье.

1. Нулевой отчет спектра характеризует постоянную составляющую сигнала

$$S_d(0) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau).$$

2. Рассмотрим первую и вторую половины разложения Фурье для  $m = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ .

$$\begin{aligned} S_d(i\omega_{N-m}) &= \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) \exp \left[ -i\frac{2\pi}{N}n(N-m) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} s(n\tau) e^{-i\frac{2\pi}{N}nm} e^{-i2\pi n} = \overline{S_d(i\omega_m)}. \end{aligned}$$

То есть **вторая половина спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой** и не содержит новой информации. Значит, информативная составляющая спектра ограничена сверху частотой  $\Omega_N$ , называемой частотой Найквиста.

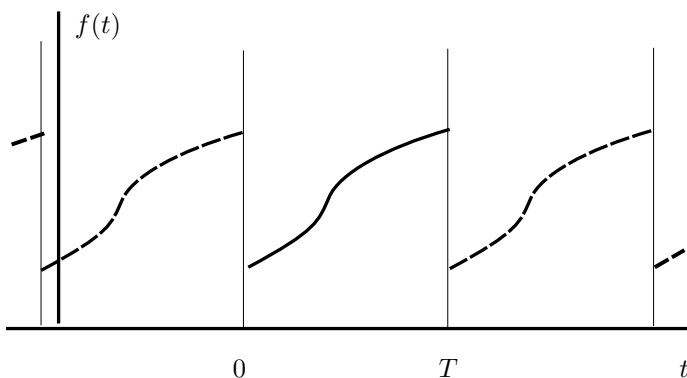


Рис. 1.10. Периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале времени

При ДПФ мы предполагали, что последовательность отсчетов анализируемого сигнала является периодически продолженной вперед и назад во времени. При этом если значения начальных и конечных отсчетов сигнала сильно отличаются (см. рис. 1.10), то при периодическом повторении на стыках сегментов возникают скачки, из-за которых спектр сигнала расширяется, т. е. проявляются высокочастотные составляющие, не свойственные самому сигналу. Традиционно этот недостаток компенсируется взвешиванием сигнала  $s(t)$  с помощью весовой функции  $w(t)$ .

## Литература

1. Гурфинкель В.С., Коц Я.М., Шик М.Л. Регуляция позы человека. М.: Наука, 1965.
2. Гурфинкель В.С., Левик Ю. С. Скелетная мышца: структура и функция. М.: Наука, 1985.
3. Фельдман А. Центральные и рефлекторные механизмы управления. М.: Наука, 1979.
4. Основы сенсорной физиологии // под ред. Р.Шмидта. М., Мир, 1984.
5. Садовничий В. А., Александров В. В., Александрова Т. Б. и др. Математическое моделирование коррекции выходного сигнала с гравитоинерциального механорецептора вестибулярного аппарата // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2013. № 5. С. 54–59.
6. Элементы теории биологических анализаторов // под ред. Н.В. Позина М., Наука, 1978.

7. *Nashner L.M.* Sensory feedback in human posture control. D.Sc. Thesis. M.I.T., Cambridge, 1970.
8. *Gurfinkel V.S.* The Mechanisms of Postural Regulation in Man // *Physiology and General Biology Rev.* Vol. 7(5). 1999. Pp. 59–87.
9. *Massion J., Popov K., Fabre J.-C. et al.* Is the erect posture in microgravity based on the control of trunk orientation or center of mass position? // *Exp. Brain Res.* 1997. No 114. P. 384–389.
10. *Григорьев А.И., Козловская И.Б., Шенкман Б.С.* Роль опорной афферентации в организации тонической мышечной системы // *Российский физиологический журнал им. И. М. Сеченова.* 2004. Т. 90. №5. С. 507–521.
11. *Jeka J.J., Lackner J.R.* Fingertip contact influences human postural control // *Exp. Brain Res.* 1994. V. 100. P. 495–502.
12. *Скворцов Д.В.* Клинический анализ движений. Стабилометрия. М.: АОЗТ «Антидор», 2000.
13. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения: В 2 т. М.: Мир, 1971.
14. *Новожилов И. В., Терехов А.В. и др.* Трехзвенная математическая модель для задачи стабилизации вертикальной позы человека // *Математическое моделирование движений человека в норме и при некоторых видах патологии.* Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004. С. 7–20.
15. *Зацюрский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н.* Биомеханика двигательного аппарата человека. М.: Физкультура и спорт, 1981.
16. *Денискина Н.В., Левик Ю.С., Гурфинкель В.С.* Сравнительная роль мышц голеностопного и бедренного суставов в регуляции позы человека во фронтальной плоскости при стоянии // *Физиология человека.* 2001. Т. 27. №3. С. 66–70.