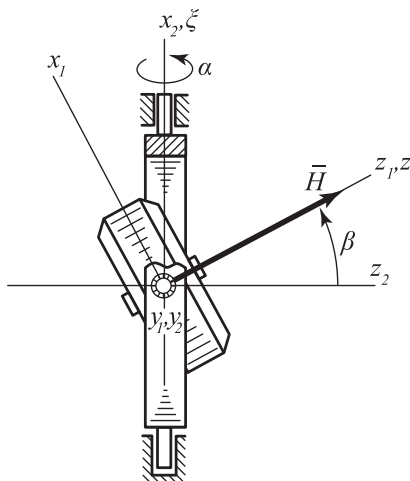


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет  
Кафедра прикладной механики и управления



## Гироскопы

ЗАДАЧА ОБЩЕГО ПРАКТИКУМА  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ  
Электронная версия для damc.ru

# Гироскопы

*Н.П. Степаненко*

## Введение

Удивительная устойчивость волчка, сообщаемая ему быстрым вращением, была замечена человеком ещё в глубокой древности. Однако долгое время это свойство быстро вращающихся тел использовалось лишь в выступлениях жонглёров и детских игрушках — волчках. Более 200 лет назад в английском флоте была предпринята попытка использовать волчок для создания на корабле устойчивого «искусственного горизонта». К сожалению, первая попытка создания гироскопического навигационного прибора окончилась неудачей. Гибель фрегата «Victory»<sup>1)</sup>, на котором проводились испытания прибора, а вместе с ним и изобретателя «искусственного горизонта» Серсона отложила решение проблемы на многие годы.

В течение следующих ста лет попытки использовать вращающийся волчок не возобновились. Новым толчком в этом направлении явились знаменитые опыты французского физика Леона Фуко. Среди других приборов, продемонстрированных Фуко Парижской Академии Наук в 1852 г., был прибор, который впервые позволял обнаружить факт суточного вращения Земли в лабораторных условиях. Основным элементом этого прибора, названного Фуко «гироскопом», был быстро вращающийся волчок. Термин «гироскоп» [1] (в буквальном переводе — «прибор, обнаруживающий вращение», от греческих слов «gyro» — вращение и «scopos» — смотрю, наблюдаю) удержался в науке. В настоящее время этот термин применяется в более широком смысле для обозначения всякого прибора, в котором использованы своеобразные свойства быстро вращающегося тела. Эти свойства принято называть гироскопическими, а устройства, основанные на свойствах гироскопа — гироскопическими приборами.

В современной технике гироскоп — основной элемент целого ряда сложных приборов, широко применяемых для автоматического управления движением самолётов, морских судов, торпед, ракет и других объектов. Гироскопы используются для определения горизонта и географической широты, для измерения угловых и поступательных скоростей движущихся объектов. При помощи гироско-

---

<sup>1)</sup>По имеющимся в открытой печати данным судно погибло в 1743 г.

пов осуществляется бурение скважин, прокладка штолен метрополитена, управление космическими объектами и многое другое.

## §1. Гироскоп в кардановом подвесе

«Гироскоп — быстро вращающееся твёрдое тело, ось вращения которого может изменять своё направление в пространстве» [2].

Чтобы ось гироскопа могла свободно изменять ориентацию, гироскоп обычно помещают в так называемый *карданов подвес* (рис. 1.1). Карданов подвес состоит из двух колец: внешнего и внутреннего. Внешнее кольцо может свободно вращаться относительно основания, то есть того объекта, на котором установлен гироскоп. Внутреннее кольцо, которое несёт ротор, может свободно поворачиваться относительно внешнего кольца. Оси вращения колец обычно взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке, которая называется *центром карданова подвеса* и является его неподвижной точкой. Обладая таким подвесом, ротор гироскопа имеет три степени свободы и может совершать любой поворот около центра подвеса. Ось вращения ротора перпендикулярна к оси вращения внутреннего кольца и, как правило, проходит через его неподвижную точку. Вращение ротора гироскопа вокруг этой оси принято называть *собственным вращением*, а саму ось — «осью собственного вращения» или просто «осью гироскопа». Если ось собственного вращения гироскопа является осью его материальной симметрии, гироскоп называется *симметричным*.

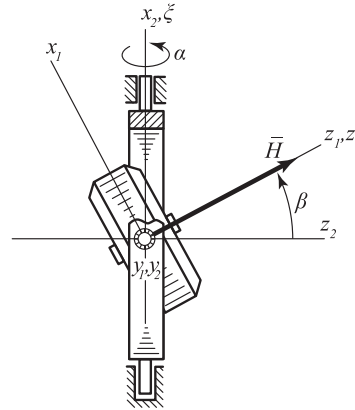


Рис. 1.1. Гироскоп в кардановом подвесе

Гироскоп называется *уравновешенным*, или *астатическим*, если общий центр тяжести гироскопа и внутреннего кольца совпадают с центром карданова подвеса, а центр тяжести внешнего кольца лежит на его оси вращения. Такой гироскоп сохраняет равновесие при любом положении его ротора.

Гироскоп с тремя степенями свободы, у которого сумма моментов всех внешних сил относительно точки подвеса равна нулю, называется *свободным*.

Применяемые в технике гироскопы представляют собой тела вращения, имеющие обычно форму маховика с утолщенным ободом или шара, массой от нескольких граммов до десятков килограммов. Быстрое вращение гироскопа (со скоростью до 60000 об./мин.) достигается тем, что ротор гироскопа делают вращающейся частью (ротором) быстроходного двигателя. Внутреннее кольцо конструктивно выполняется в форме кожуха. Статор электродвигателя крепится на крышке кожуха. Неподвижная относительно кожуха трёхфазная обмотка статора создаёт вращающееся магнитное поле, которое при взаимодействии с ротором создаёт необходимый вращающий момент. При этом скорость ротора почти достигает скорости вращения магнитного поля и практически сохраняется постоянной.

В ряде случаев вращение гироскопа поддерживается струёй сжатого воздуха — ротор гироскопа является одновременно ротором воздушной турбины. В некоторых приборах ротор, заключённый в кожух, помещают в жидкость. Подшипники кожуха (поплавки) при этом полностью разгружаются и момент трения скольжения в них существенно уменьшается.

Существуют гироскопы вовсе не имеющие карданова подвеса, например, шар-гироскоп (рис. 1.2), вращающийся на «воздушной подушке», и гироскоп с магнитным или электростатическим подвесом (рис. 1.3).

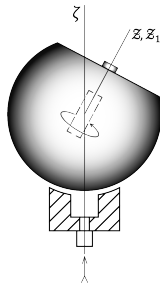


Рис. 1.2. Шар-гироскоп

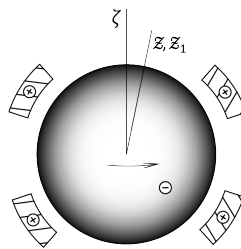


Рис. 1.3. Гироскоп с электростатическим подвесом

## §2. Уравнения движения гироскопа

Для определения положения гироскопа введём следующие системы координат (рис. 2.4):  $\xi\eta\zeta$ , связанную с основанием гироскопа,  $x_2y_2z_2$  — с его внешним кольцом,  $x_1y_1z_1$  — с его внутренним кольцом и, наконец,  $xyz$ , связанную с ротором гироскопа. Начала всех введённых систем координат поместим в центр карданова

подвеса, точку  $O$ .

Оси  $\xi$  и  $x_2$  направим по оси вращения внешнего кольца, оси  $y_2$  и  $y_1$  — по оси вращения кожуха, а оси  $z_1$  и  $z$  — по оси вращения ротора. Положение гироскопа по отношению к основанию, на котором он установлен, можно определить тремя углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  (рис. 2.4) или тремя углами Крылова<sup>1)</sup>  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (рис. 2.5). От системы координат  $\xi\eta\zeta$ , связанной с основанием, к системе  $xyz$ , связанной с ротором, можно перейти (рис. 2.5) тремя последовательными поворотами на углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , что схематично можно записать так:

$$\xi\eta\zeta \xrightarrow[\xi, x_2]{\alpha} x_2y_2z_2 \xrightarrow[y_2, y_1]{\beta} x_1y_1z_1 \xrightarrow[z_1, z]{\gamma} xyz.$$

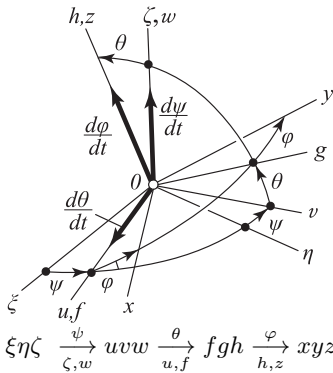


Рис. 2.4. Углы Эйлера

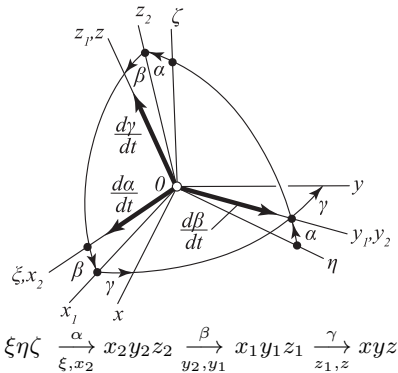


Рис. 2.5. Углы Крылова

Для гироскопа в кардановом подвесе  $\alpha$  — угол поворота внешнего кольца относительно основания,  $\beta$  — угол поворота внутреннего кольца (кожуха) по отношению к внешнему кольцу,  $\gamma$  — угол поворота ротора относительно внутреннего кольца. Углы считаются положительными, если вращение, наблюдаемое с положительного направления соответствующей оси, происходит против хода часовой стрелки. При  $\alpha=\beta=\gamma=0$  плоскости кардановых колец взаимно перпендикулярны и все введённые системы координат совпадают.

Абсолютные угловые скорости внешнего кольца  $\omega_2$ , кожуха  $\omega_1$  и ротора  $\omega$  выражаются через угловую скорость основания  $\mathbf{u}$  и относительные скорости  $\frac{d\alpha}{dt}$ ,  $\frac{d\beta}{dt}$ ,  $\frac{d\gamma}{dt}$  следующим образом

<sup>1)</sup> Углы впервые введены академиком А.Н. Крыловым при исследовании задачи о качке корабля.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_2 &= \mathbf{u} + \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{i}_2, \\
\boldsymbol{\omega}_1 &= \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_1 = \mathbf{u} + \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{i}_2 + \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_1, \\
\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{k} = \mathbf{u} + \frac{d\alpha}{dt} \mathbf{i}_2 + \frac{d\beta}{dt} \mathbf{j}_1 + \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{k},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}$  — единичные векторы осей  $x_2(\xi), y_1(y_2), z_1(z)$ .

Движение твёрдого тела с закреплённой точкой описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned}
A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= M_x, \\
B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= M_y, \\
C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= M_z.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В них  $A, B, C$  — главные моменты инерции ротора относительно закреплённой точки  $O$ ;  $M_x, M_y, M_z$  — моменты внешних сил, действующих на ротор относительно осей  $xyz$ ;  $p, q, r$  — проекции абсолютной угловой скорости ротора  $\boldsymbol{\omega}$  на эти оси. В случае, когда угловая скорость основания  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (см. рис. 2.5)

$$\begin{aligned}
p &= \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{dt} \sin \gamma, \\
q &= -\frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{dt} \cos \gamma, \\
r &= \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Динамические уравнения Эйлера (2.2) получены из теоремы об изменении кинетического момента в проекциях на оси, жёстко связанные с самим телом. В случае динамически симметричного твёрдого тела (ротора) эти уравнения удобнее записать не в осях  $xyz$ , жёстко связанных с ротором, а в осях  $x_1y_1z_1$ , связанных с кожухом и не участвующих в быстром вращении тела. Уравнения движения симметричного твёрдого тела в осях  $x_1y_1z_1$ , не принимающих участия в быстром вращении тела, называются *модифицированными уравнениями Эйлера* или *гироскопическими уравнениями*. Они имеют вид

$$\begin{array}{l|l}
A \frac{dp_1}{dt} + (C - A)q_1r_1 & +q_1H = M_{x_1}, \\
A \frac{dq_1}{dt} + (A - C)p_1r_1 & -p_1H = M_{y_1}, \\
C \frac{dr_1}{dt} & + \frac{dH}{dt} = M_{z_1}.
\end{array} \tag{2.4}$$

Здесь  $H = C \frac{d\gamma}{dt}$  — собственный кинетический момент гироскопа;  $p_1, q_1, r_1$  — проекции угловой скорости  $\omega_1$  системы координат  $x_1 y_1 z_1$  на её оси.

Для быстро вращающегося гироскопа, то есть, когда  $\frac{d\gamma}{dt} \gg p_1, q_1, r_1$ , в этих уравнениях можно пренебречь членами, стоящими слева от пунктирной черты.

Уравнения

$$\begin{aligned} q_1 H &= M_{x_1}, \\ -p_1 H &= M_{y_1}, \\ \frac{dH}{dt} &= M_{z_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

называются *укороченными* или *прецессионными уравнениями* теории гироскопов [3]. Их можно представить также в виде одного векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{H}$  — вектор, направленный по оси симметрии ротора гироскопа и по модулю равный собственному кинетическому моменту гироскопа, то есть произведению полярного момента инерции ротора  $C$  на угловую скорость собственного вращения  $\frac{d\gamma}{dt}$ .

Уравнение (2.6) является основным уравнением прецессионной теории гироскопов.

Переход к прецессионным уравнениям теории гироскопов соответствует тому, что вектор полного кинетического момента тела

$$\mathbf{K} = Ap_1 \mathbf{i}_1 + Aq_1 \mathbf{j}_1 + C\left(r_1 + \frac{d\gamma}{dt}\right) \mathbf{k}_1$$

отождествляется с составляющей  $C \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{k}$ , направленной по оси симметрии тела, в силу того, что  $\frac{d\gamma}{dt} \gg p_1, q_1, r_1$ , а моменты инерции  $A$  и  $C$  — величины одного порядка.

При исследовании переходных процессов и решении вопросов устойчивости гироскопических систем необходимо учитывать влияние инерции колец подвеса на движение оси гироскопа. В этом случае для составления уравнений движения следует рассматривать гироскоп в кардановом подвесе как систему трёх твёрдых взаимодействующих тел. Соответствующие уравнения движения являются уравнениями нутационной теории гироскопов. Их можно получить как при помощи теоремы об изменении кинетического момента, так и методом Лагранжа.

Кинетическая энергия гироскопа в кардановом подвесе в этом случае имеет вид

$$T = \frac{1}{2}[A_2 p_2^2 + B_2 q_2^2 + C_2 r_2^2 + A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2].$$

Здесь  $(p_2, q_2, r_2)$ ,  $(p_1, q_1, r_1)$ ,  $(p, q, r)$  — проекции абсолютных угловых скоростей  $\bar{\omega}_2$ ,  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}$  внешнего кольца, кожуха и ротора соответственно на оси систем координат  $x_2 y_2 z_2$ ,  $x_1 y_1 z_1$  и  $xyz$ , жёстко связанных с этими телами и являющихся для них главными осями инерции.  $A_2, B_2, C_2$  — моменты инерции внешнего кольца относительно его главных осей инерции  $x_2, y_2, z_2$ ;  $A_1, B_1, C_1$  — главные моменты инерции кожуха (моменты инерции относительно осей  $x_1 y_1 z_1$ );  $A$  и  $C$  — экваториальный и полярный моменты инерции ротора. Проекции  $(p_2, q_2, r_2)$ ,  $(p_1, q_1, r_1)$  абсолютных угловых скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_1$  вычисляются на основании формул (2.1). В случае неподвижного основания уравнения Лагранжа второго рода для гироскопа в кардановом подвесе записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ J(\beta) \frac{d\alpha}{dt} + C \left( \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right) \sin \beta \right] &= Q_\alpha, \\ B_0 \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \frac{1}{2} J(\beta) \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - \left( \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta &= Q_\beta, \\ \frac{d}{dt} \left[ C \left( \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta + \frac{d\gamma}{dt} \right) \right] &= Q_\gamma, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J(\beta) &= A_2 + (A_1 + A) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta, \\ B_0 &= B_1 + A. \end{aligned}$$

$Q_\alpha, Q_\beta, Q_\gamma$  — обобщённые силы, соответствующие координатам  $\alpha, \beta, \gamma$ .

### §3. Свойства гироскопа с тремя степенями свободы

Свойства гироскопа проявляются при выполнении условий:

1. ось гироскопа должна иметь возможность изменять своё направление в пространстве;
2. угловая скорость вращения гироскопа вокруг своей оси должна быть намного больше угловой скорости, которую будет иметь сама ось при изменении своего направления.

Первое свойство свободного гироскопа с тремя степенями свободы заключается в том, что его ось стремится устойчиво сохранять неизменное направление в инерциальном пространстве. Если ось вначале была направлена на какую-нибудь неподвижную звезду,



то при любых движениях основания она будет сохранять это направление.

Второе свойство гироскопа проявляется, когда на его ось начинает действовать сила, создающая момент относительно центра подвеса. Под действием этой силы конец оси гироскопа будет отклоняться не в сторону действия силы, как это было бы при невращающемся роторе, а в направлении перпендикулярном к этой силе. В результате ось гироскопа начнёт поворачиваться вокруг оси, лежащей в плоскости пары сил, причём не ускоренно, а с постоянной угловой скоростью. Это движение оси вращающегося гироскопа называется *прецессией*. Оно происходит тем медленнее, чем быстрее вращается вокруг своей оси сам гироскоп. Если в какой-то момент времени действие сил прекратится, то одновременно прекратится прецессия и ось гироскопа мгновенно остановится, то есть прецессионное движение гироскопа как бы безынерциально (в рамках этой теории). Величина угловой скорости прецессии определяется на основании равенств (2.5) формулами

$$q_1 = \frac{M_{x_1}}{H}, \quad p = -\frac{M_{y_1}}{H}$$

или непосредственно из уравнения (2.6), откуда следует, что линейная скорость конца вектора  $\mathbf{H}$  равна моменту  $\mathbf{M}$  внешней силы.

Формула (2.6) показывает, что если момент внешних сил равен нулю, то ось гироскопа сохраняет неизменное направление по отношению к неподвижным звёздам, то есть в этом случае угловая скорость оси равна нулю. Кратковременные воздействия на ось такого гироскопа пары с моментом  $M \neq 0$  вызовут смещение оси на малый угол тем меньший, чем меньше угловая скорость прецессии, то есть чем больше  $\mathbf{H}$ . С прекращением же этого воздействия момент  $\mathbf{M}$  будет опять равен нулю, а следовательно равна нулю и угловая скорость прецессии, так что смещение оси прекратится. Таким образом, ось быстро вращающегося свободного гироскопа практически не изменяет своего направления под воздействием кратковременных внешних возмущений (ударов) — устойчива.

Удар, нанесённый по одному из колец гироскопа не только вызывает малое смещение оси согласно правилу прецессии, но и сопровождается ничтожно малыми её дрожаниями, которые называются *нутацционными колебаниями*. Амплитуды этих колебаний у быстро вращающегося гироскопа очень малы и из-за наличия неизбежных сопротивлений быстро затухают. Это позволяет при решении большинства технических задач учитывать только прецессию гироскопа, что и приводит к так называемой элементарной теории гироскопических явлений.

Свойства свободного гироскопа с тремя степенями свободы устойчиво сохранять направление своей оси по отношению к неподвижным звёздам используется в устройствах, применяемых для управления движением различных объектов.

Для повышения точности гироскопических приборов, требуется максимально уменьшать величину момента  $M$ , возникающего вследствие трения в осях подвеса и несовпадения центра тяжести ротора с центром подвеса, так как этот момент вызывает прецессию (уход) оси.

Момент трения в подвесах точных (прецизионных) гироскопов обычно уменьшают специально изготовленными шариковыми подшипниками. Вследствие вибраций подвеса или возвратно-вращательных движений внешней обоймы шарикоподшипников момент трения в ряде случаев удаётся сделать значительно меньше момента силы тяжести. Для уменьшения сил трения в гироскопах систем инерциальной навигации применяются опоры на драгоценных камнях.

Уменьшение момента силы тяжести достигается соответствующей балансировкой гироскопа. Требуемая при этом точность совмещения центра масс с геометрическим центром подвеса очень велика. Так для гироскопов средних размеров весом около 4 кг, имеющего угловую скорость вращения ротора порядка 30000 об/мин, смещение центра масс от оси подвеса на один микрон вызывает прецессию со скоростью около  $4^\circ/\text{ч}$ . Земля вращается со значительно большей угловой скоростью ( $15^\circ/\text{ч}$ ). Следовательно, подобным гироскопом можно легко обнаружить факт вращения Земли. Однако для решения ряда технических вопросов, например, навигации судов и ракет, требуется ещё более высокая точность балансировки, так как скорость ухода оси гироскопа относительно неподвижных звёзд порядка  $4^\circ/\text{ч}$  оказывается чрезмерно большой.

#### **§4. Гироскоп с двумя степенями свободы**

Если закрепить одно из колец карданова подвеса, то у гироскопа останется две степени свободы.

Рассмотрим случай, когда оси карданова подвеса и ось ротора взаимно перпендикулярны. Закрепим внешнее кольцо подвеса и нанесём по оси ротора вертикальный удар. Если бы внешнее кольцо могло вращаться вокруг своей вертикальной оси, то за время удара ось ротора повернулась бы на малый угол в горизонтальной плоскости. Но повороту ротора вокруг вертикали препятствует закрепление внешнего кольца. Поэтому в точках крепления внешнего кольца возникают горизонтальные силы, которые через посред-

ство внутреннего кольца передаются на ось ротора и вызывают его прецессию в вертикальной плоскости. Таким образом, результатом вертикального удара явится длительное вращение прибора вокруг горизонтальной оси (оси внутреннего кольца). В данном случае быстро вращающийся гироскоп ведёт себя совершенно так же, как если бы его ротору не было сообщено никакого собственного вращения. Быстро вращающийся гироскоп с двумя степенями свободы совершенно лишён способности сопротивляться действию усилий, стремящихся изменить направление его оси. Если основанию гироскопа сообщить вращение с угловой скоростью  $\mathbf{u}$  вокруг оси, образующей угол  $\theta$  с осью гироскопа, то гироскоп будет совершать вынужденную прецессию. При этом со стороны гироскопа на подшипники кольца действует пара сил, стремящаяся кратчайшим путём установить ось собственного вращения параллельно оси прецессии, так, чтобы направления векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{u}$  совпадали. Момент этой пары называется *гироскопическим моментом* и определяется равенством

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H} \times \mathbf{u}. \quad (4.7)$$

Подобный гироскопический эффект имеет место у ротора турбин, установленных на судах, при циркуляции (повороте) судов или при качке, у винтовых самолётов при виражах и т. д. Формула (4.7) позволяет определить возникающие при этом гироскопические давления на подшипники.

На гироскопическом эффекте основан принцип так называемой силовой гироскопической стабилизации, а также устройство ряда приборов, например, датчика угловой скорости.

*Датчик угловой скорости* или *гиротаксометр* — гироскопическое устройство для определения угловой скорости объекта, на

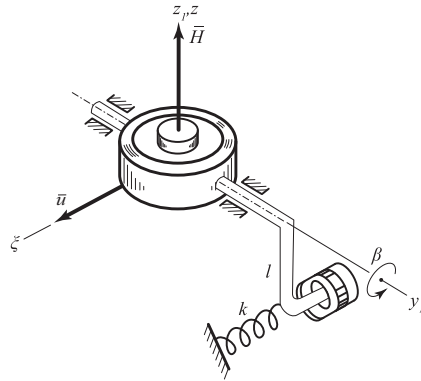


Рис. 4.6. Схема гиротаксометра

котором оно установлено (рис. 4.6). Наиболее распространены гиротаксометры, основанные на использовании астатического гироскопа с двумя степенями свободы. В таком тахометре ротор

гироскопа установлен в кардановом кольце, повороту которого препятствует пружина, создающая восстанавливающий момент. Гашение собственных колебаний осуществляется демпфером. При вращении объекта вокруг оси  $\xi$  с угловой скоростью  $u$  возникает гироскопический момент, направленный по оси  $\eta(y_1)$ , который стремится кратчайшим путём совместить ось ротора с осью вращения объекта. Этому препятствует пружина. Чем больше угловая скорость вращения объекта, тем больше гироскопический момент, тем сильнее растягивается пружина и на больший угол отклоняется кожух гироскопа. Сигнал, пропорциональный углу отклонения кожуха (а следовательно, и угловой скорости вращения объекта) снимается в виде напряжения.

Уравнение движения гиротахометра для случая малых углов отклонения оси ротора имеет вид

$$I \frac{d^2\beta}{dt^2} = Hu - C_{\text{п}}\beta - C_{\text{д}} \frac{d\beta}{dt}. \quad (4.8)$$

Здесь  $\beta$  — угол поворота кожуха,  $I$  — момент инерции гироскопа вместе с кожухом относительно оси вращения кожуха,  $C_{\text{п}}$  — постоянная пружины,  $C_{\text{д}}$  — постоянная демпфера.

Уравнение (4.8) показывает, что в установившемся режиме угол отклонения гироскопа пропорционален угловой скорости объекта

$$\beta = \frac{H}{C_{\text{п}}}u.$$

## §5. Порядок выполнения работы

Настоящая задача является, в основном, демонстрационной. Её цель — познакомить студентов с теорией гироскопов и на ряде гироскопических приборов и их моделей продемонстрировать основные свойства быстро вращающегося твёрдого тела. Показать, как можно использовать свойства гироскопов в приборостроении и в механике управляемых систем.

### Гироскоп в кардановом подвесе

1. Проверить, что астатический гироскоп сохраняет равновесие при любом положении его ротора.

2. Убедиться, что никакой устойчивостью гироскоп не обладает, пока его ротору не сообщено быстрое вращение.

3. Наблюдать поведение гироскопа под действием силы, приложенной к оси ротора гироскопа.

4. С помощью струи сжатого воздуха привести ротор в быстрое вращение. Проверить, что под действием нанесённого удара ось гироскопа не изменит заметным образом своего направления, то есть что быстрое вращение сообщает своеобразную устойчивость

оси уравновешенного гироскопа. Чем быстрее собственное вращение, тем резче выявляется приобретаемая при этом устойчивость оси гироскопа.

5. Убедиться, что ось гироскопа устойчиво сохраняет неизменное направление в пространстве при произвольном движении основания.

6. Определить положение оси, при котором гироскоп теряет свойство устойчиво сохранять её направление.

7. Ударить по одному из колец гироскопа и наблюдать нутационные колебания. Убедиться, что они быстро затухают.

8. Расположить оси ротора и кардановых колец взаимно перпендикулярно. Наблюдать прецессию гироскопа под действием вертикальной силы, приложенной к внутреннему кольцу.

### Модели для демонстрации прецессии гироскопа и гироскопического момента

1. На модели (рис. 5.7) для демонстрации прецессии гироскопа расположить ось ротора горизонтально. Убедиться, что под действием силы тяжести быстро вращающийся гироскоп не опускается, в прецессирует вокруг вертикали.

2. Пользуясь правилом прецессии, проверить направление движения оси гироскопа.

3. Вычислить собственный кинетический момент гироскопа  $\vec{H}$  по результатам измерения угловой скорости прецессии гироскопа вокруг вертикали при наличии дополнительных грузов массой  $m_1$  и  $m_2$ , укрепленных на расстоянии  $l$  от неподвижной точки. Величины масс  $m_1$ ,  $m_2$ , а также расстояние  $l$  указываются преподавателем.

4. Изменив направление собственного вращения ротора на противоположное, наблюдать прецессию также противоположного направления.

5. Отключив питание гироскопа, наблюдать увеличение угловой скорости прецессии по мере падения угловой скорости собственного вращения.

6. Раскрутить ротор модели, используемой для демонстрации гироскопического момента. Резко изменяя направление оси вращения ротора, ощутить воздействие на руку со стороны быстро вращающегося ротора.

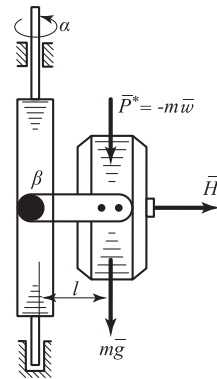


Рис. 5.7. Модель для демонстрации прецессии гироскопа

### Датчик угловой скорости (гиротаксометр)

1. Подключить питание к гироскопу и потенциометру. После прихода прибора в рабочее состояние подать напряжение с выхода потенциометра на вольтметр.

2. Включив стенд угловых скоростей, наблюдать реакцию гироскопа с двумя степенями свободы на различные угловые скорости платформы.

3. Определить границы чувствительности датчика угловых скоростей.

4. Построить графики зависимости напряжения, снимаемого с потенциометра, от угловой скорости вращения платформы для трёх случаев:

(а) ось ротора и ось кожуха расположены в горизонтальной плоскости и перпендикулярны оси вращения платформы;

(б) ось кожуха расположена в горизонтальной плоскости. Угол между осью ротора и осью вращения платформы задаётся преподавателем;

(с) ось ротора расположена в горизонтальной плоскости, а ось кожуха образует с осью вращения платформы угол, задаваемый преподавателем.

### §6. Вопросы к зачету

1. Вывести формулу для кинетического момента твёрдого тела с неподвижной точкой.

2. Вывести динамические уравнения Эйлера.

3. Из теоремы об изменении кинетического момента получить модифицированные уравнения Эйлера.

4. Выразить проекции угловой скорости ротора через углы Крылова.

5. Найти аналитические выражения, связывающие углы Эйлера и Крылова.

6. Получить уравнение (2.6) непосредственно из теоремы об изменении кинетического момента.

7. Составить явное выражение для кинетической энергии гироскопа в кардановом подвесе и далее методом Лагранжа получить уравнения движения гироскопа.

8. Найти решение уравнения, описывающего движение гиротаксометра.

9. Как с помощью двух гироскопов в кардановом подвесе определить изменение ориентации объекта?

10. Найти направление гироскопического момента, приложенного к мотоциклу со стороны колёс при повороте.

## Литература

1. *Булгаков Б.В.* Прикладная теория гироскопов. Изд.3., М.: Изд-во МГУ, 1976.
2. *Ишлинский А.Ю.* Гироскоп. Физический энциклопедический словарь, т. I. М.: Изд-во МГУ, 1960.
3. *Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П., Тихомиров В.В.* Лекции по теории гироскопов. Учебное пособие. Издание второе, дополненное. МАКСПРЕСС М.: 2013.
4. *Магнус К.* Гироскоп, теория и применение. М.: Мир, 1974.
5. *Фридлендер Г.О., Козлов М.С.* Авиационные гироскопические приборы. М.: Оборонгиз, 1961.