

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

**Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления**

Колебания

**ЗАДАЧА ОБЩЕГО ПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ**
Электронная версия для damc.ru

2022

Колебания

А.В. Влахова

Введение

Рассматривая динамические системы, мы часто заменяем построенные нелинейные уравнения линейными, поскольку их легче исследовать. Как правило, они позволяют качественно описать изучаемое движение и сделать первый шаг к пониманию его свойств. Формальная математическая сторона рассматриваемых ниже задач, решение которых опирается на свойства линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, хорошо известна из курса дифференциальных уравнений. Мы выясним физический смысл используемых в этом курсе математических понятий и обсудим ряд способов отыскания параметров линейных систем по данным эксперимента. Перечислим коротко круг вопросов, с которыми мы будем иметь дело.

Как известно, в любых механических системах присутствует трение. Вместе с тем при формулировке многих задач соответствующие ему слагаемые в уравнениях движения опускают, считая влияние трения несущественным. В § 1 мы обсудим общие свойства колебаний линейных систем с одной степенью свободы при наличии малого вязкого трения и внешнего периодического по времени возмущения, определим отличия этих колебаний от колебаний систем без трения, а также выясним экспериментальные способы вычисления коэффициента трения путем создания свободных или вынужденных колебаний.

В § 2 мы обратимся к анализу общих свойств малых колебаний консервативных систем около устойчивого положения равновесия при наличии и отсутствии периодического по времени возмущения, рассмотрим примеры таких систем, способы проведения экспериментов, позволяющих находить неизвестные параметры, и обсудим идею динамического гашения колебаний, для простоты ограничившись системами с двумя степенями свободы.

В § 3 обсуждается ход выполнения задач практикума.

В § 4 приведены образцы задач, предлагаемых на зачете.

В приложении (§§ 5–7) приведены задачи, предлагаемые на зачете.

В приложении приводятся формулировки теорем метода малого параметра, которые используются для обоснования корректности пренебрежения слагаемыми, отвечающими силам трения, и нелинейными членами в уравнениях движения механических систем, обсуждаются свойства исходных, нелинейных систем, не описываемые линейной моделью. Помимо этого дается ряд пояснений, позволяющих лучше понять особенности малых колебаний консервативных и неконсервативных систем и выяснить, как наблюдаемые в эксперименте свойства систем с одной и двумя степенями свободы обобщаются на системы с произвольным числом степеней свободы и как изменяются полученные результаты после учета нелинейностей малого вязкого трения.

Автор благодарит А.П. Кручинину за помощь в работе.

§1. Отыскание коэффициента малого вязкого трения путем создания свободных или вынужденных колебаний линейного осциллятора

1.1. Линейный осциллятор. Определение и примеры

Нередко оказывается, что системы разной физической природы обладают большим числом одинаковых свойств, т. е. процессы, происходящие в таких системах, описываются одними и теми же уравнениями. Тогда, изучив динамические свойства системы, допускающей непосредственное наблюдение, можно продвинуться в понимании свойств других систем, где не все так наглядно. В первую очередь это относится к нелинейным уравнениям динамики, но в рамках настоящей работы мы остановимся на «классическом» линейном уравнении теории колебаний

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \mathcal{F}(t). \quad (1.1)$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени t ; x — обобщенная координата; a , b и c — положительные постоянные. Физическая система, динамика которой описывается уравнением (1.1), называется *линейным осциллятором*. При выполнении равенства $\mathcal{F} = 0$ движения системы называются *свободными* или *собственными*, при $\mathcal{F} \neq 0$ — *вынужденными*, а \mathcal{F} — *вынуждающей* (*возмущающей*) силой. Движения первого типа происходят в предоставленной самой себе системе после того, как ее вывели из положения равновесия $x = 0$, $\dot{x} = 0$ путем задания как минимум одного отличного от нуля начального условия $x(0)$, $\dot{x}(0)$; движения второго типа могут возникать и при нулевых начальных условиях за счет действия возмущающей силы. В случае $\mathcal{F} = 0$, $b = 0$ система называется *гармоническим осциллятором*.

Механический пример линейного осциллятора — тело массы m , движущееся по однородной опорной плоскости вдоль некоторой прямой под действием *сил упругости и вязкого трения* (на рис. 1.1 эти силы создаются пружиной и демпфером — поршнем в цилиндрической емкости с вязкой жидкостью), а также внешней возмущающей силы \mathbf{F} . Будем считать, что сила упругости пружины пропорциональна смещению x тела относительно положения равновесия, сила трения пропорциональна скорости \dot{x} этого смещения. Первое предположение — закон Гука — верно с некоторой степенью точности при условии малости значений $|x|$ по сравнению с длиной пружины в недеформированном состоянии; второе предположение удовлетворительно для достаточно малых значений $|\dot{x}|$ скорости движения поршня или в ситуациях, когда трущиеся поверхности тела и опорной плоскости разделяет слой смазки, а также в случае трения о воздух или в условиях микропроскальзывания тела относительно опорной плоскости, возникающего из-за малой деформируемости его поверхности в области контакта. В соответствии со вторым законом Ньютона уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F,$$

где k и b — коэффициенты жесткости пружины и вязкого трения в демпфере соответственно; F — проекция силы \mathbf{F} .

Примером линейного осциллятора в теории электрических цепей служит [1, 4, 6] так называемый колебательный RCL -контур, образованный последовательно соединенными сопротивлением R , конденсатором емкости C и катушкой индуктивности L (рис. 1.2, а). Согласно второму закону Кирхгофа подаваемое на контур напряжение U равно сумме падений напряжений на его элементах:

$$U_R + U_C + U_L = U.$$

Падение напряжения на сопротивлении вычисляется в соответствии с законом Ома: $U_R = IR$; падение напряжения в конденсаторе отыскивается по формуле $U_C = q/C$, где q — заряд на его обкладках; падение напряжения от индуктивности находится из равенства $U_L = L\dot{I}$, где $I = \dot{q}$ — сила тока в контуре. В силу составленных соотношений изменение заряда и силы тока описываются уравнениями вида (1.1)

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = U, \quad L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = \dot{U}.$$

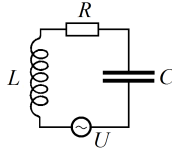
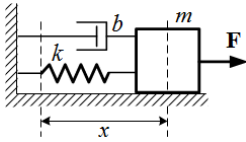
Аналогично для электрического контура с параллельно соединенными R , C , L -элементами (рис. 1.2, б) путем применения первого закона Кирхгофа (алгебраическая сумма токов, сходящихся в каждом из узлов цепи, равна нулю) получим уравнение

$$\frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int U dt + C\dot{U} = I,$$

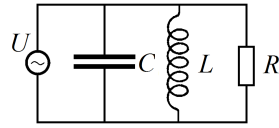
откуда после дифференцирования по времени следует уравнение линейного осциллятора

$$C\ddot{U} + \frac{\dot{U}}{R} + \frac{U}{L} = \dot{I}$$

Примеры других систем, описываемых уравнением (1.1), приведены в работах [1, 5, 11, 17], а также в разделах 1.2, 1.3.



а)



б)

Рис. 1.1. Линейный механический осциллятор

Рис. 1.2. Электрический RCL -контур с последовательно (а) и параллельно (б) соединенными элементами

1.2. Свободные малые колебания маятника с вязким трением

Вывод уравнения движения. Будем рассматривать маятник в виде легкого жесткого однородного стержня длины ℓ с грузом (точечной массой) m на его конце C , считая, что в этой точке сосредоточена вся масса маятника. Стержень может вращаться вокруг неподвижной оси Oz (оси подвеса), перпендикулярной плоскости рис. 1.3. В оси подвеса присутствует вязкое трение. Уравнение движения маятника может быть составлено с использованием различных методов [4, 13]. Ниже мы рассмотрим два из них [6]. *Физическим маятником* называется твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси под действием силы тяжести. Теории колебаний маятника уделяют большое внимание, поскольку он служит одним из наиболее наглядных и изученных объектов теоретической механики и теории управления, в связи с чем к уравне-

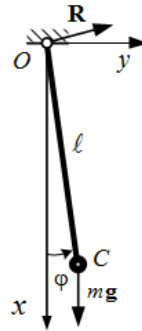


Рис. 1.3. Свободные колебания маятника

нию его динамики сводят уравнения многих процессов, встречающихся в физике, технике и биомеханике. Маятник используется в различных приборах для измерения времени, напряженности гравитационного поля, исследования свойств поверхностей и т. д.

Применение теоремы об изменении момента количества движения (кинетического момента) маятника относительно оси его подвеса. На основании этой теоремы уравнением вращения маятника вокруг оси Oz служит

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z, \quad (1.2)$$

где φ (обобщенная координата) — угол поворота маятника вокруг оси Oz , отсчитываемый от нижнего положения равновесия; $J_z = m\ell^2$ — момент инерции маятника относительно этой оси; M_z — проекция на ось Oz внешних моментов, действующих на маятник.

Внешними силами являются приложенная в точке C сила тяжести $m\mathbf{g}$ (\mathbf{g} — ускорение свободного падения) и сила \mathbf{R} реакции в оси подвеса маятника. Момент силы реакции относительно оси Oz равен нулю, момент \mathbf{M} силы тяжести вычисляется по формуле $\mathbf{M} = \mathbf{OC} \times m\mathbf{g}$, его проекция на ось Oz дается выражением $M = -mgl \sin \varphi$. Момент $\mathbf{M}_{\text{тр}}$ вязкого трения действует противоположно направлению угловой скорости вращения маятника, его проекция на ось Oz дается выражением $M_{\text{тр}} = -b\dot{\varphi}$, где $b > 0$ — постоянный коэффициент, характеризующий свойства смазки в оси подвеса. Тем самым, $M_z = M + M_{\text{тр}}$. Подстановка полученных выражений в (1.2) приводит к уравнению¹⁾

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (1.3)$$

Составление уравнения Лагранжа второго рода.

Это уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = Q_\varphi, \quad (1.4)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа маятника; $T = J_z \dot{\varphi}^2 / 2$ — его кинетическая энергия; Π — потенциальная энергия; $Q_\varphi = M_{\text{тр}}$ — главный момент внешних непотенциальных сил относительно оси подвеса.

Для удобства дальнейших вычислений введем ось Ox , направленную по вертикали вниз (рис. 1.3). Потенциальная энергия маятника равна работе силы тяжести $m\mathbf{g}$ при

¹⁾ После формальной замены $m\ell^2$ на J_z уравнение (1.3) можно использовать для изучения движения произвольного физического маятника.

перемещении маятника из данного положения (точки C) в нулевое (точку O): $\Pi = -mgx$. Учитывая соотношение $x = \ell \cos \varphi$, получим $\Pi = -mgl \cos \varphi^2$. Подставив найденные выражения в (1.4), приходим к уравнению (1.3).

Алгоритм определения коэффициента малого вязкого трения.¹⁾ Уравнение малых колебаний маятника около нижнего положения равновесия (т.е. движений, отвечающих условию $|\varphi| \ll 1$, при выполнении которого справедливо приближенное равенство $\sin \varphi \approx \varphi$) получается из (1.3) путем замены $\sin \varphi = \varphi$:

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mgl\varphi = 0. \quad (1.5)$$

Корректность перехода от нелинейного уравнения (1.3) к линейному уравнению (1.5) и возможность пренебрежения вторым слагаемым в (1.5), в результате которого получается широко используемая модель малых колебаний маятника без трения, обсуждаются в разделах 5.2 и 5.3.

Уравнение (1.5) имеет вид (1.1), т.е. в рамках построенной линейной модели маятник можно считать линейным осциллятором, совершающим свободные колебания.

Будем предполагать значения m и ℓ известными, значение b неизвестным. Изложенная ниже теория дает возможность построить алгоритм эксперимента, позволяющего найти b для случая малого трения.

Коэффициенты уравнения (1.5) имеют различные размерности. Поэтому сравнивать их «напрямую» некорректно, и смысл термина «малое» трение остается неясным. Для ответа на этот вопрос следует привести (1.5) к безразмерному виду. Разделив обе части этого уравнения на mgl и перейдя к безразмерному времени τ , связанному с исходным временем t формулой $t = \tau \sqrt{\ell/g}$,¹⁾ получим уравнение, образованное безразмерными слагаемыми

$$\varphi'' + 2\varepsilon\varphi' + \varphi = 0, \quad 2\varepsilon = b/mglt_*. \quad (1.6)$$

²⁾Поскольку потенциальная энергия определяется с точностью до постоянного слагаемого, произвол в выборе начала координат не влияет на результат ее вычисления. В качестве примера возьмем новое начало координат в нижнем положении массы m . Теперь потенциальная энергия равна работе силы тяжести при перемещении маятника из точки C в нижнее положение, т.е. $\Pi = mgl(1 - \cos \varphi)$.

¹⁾Текст этой части изложен в соответствии с [6].

¹⁾Величина $t_* = \sqrt{\ell/g}$ представляет собой характерное время малых колебаний маятника без трения ($b = 0$) — время, в течение которого переменная $|\varphi|$ изменяется от нуля до близких к максимуму значений [6, 18].

Штрихом обозначено дифференцирование по времени τ . Входящий в (1.6) безразмерный коэффициент $\varepsilon > 0$ позволяет судить о свойствах решений этого уравнения и отделить друг от друга решения, обладающие качественно различным поведением.

Вид общего решения уравнения (1.6) определяется корнями $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + 1 = 0$. В зависимости от значений ε они могут быть комплексно сопряженными либо вещественными, равными друг другу или различными. Ограничиваясь случаем

$$\varepsilon < 1 \quad (1.7)$$

комплексно сопряженных корней (он, по определению, соответствует *малому трению* для свободных колебаний линейного осциллятора²⁾), получим выражения

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (1.8)$$

В соответствии с (1.8) общее решение уравнения (1.6) записывается в форме

$$\varphi(\tau) = Ae^{-\varepsilon\tau} \cos(\omega\tau - \psi), \quad (1.9)$$

где постоянные A и ψ определяются начальными условиями $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$. Зависимость $\varphi(\tau)$ показана на рис. 1.4.

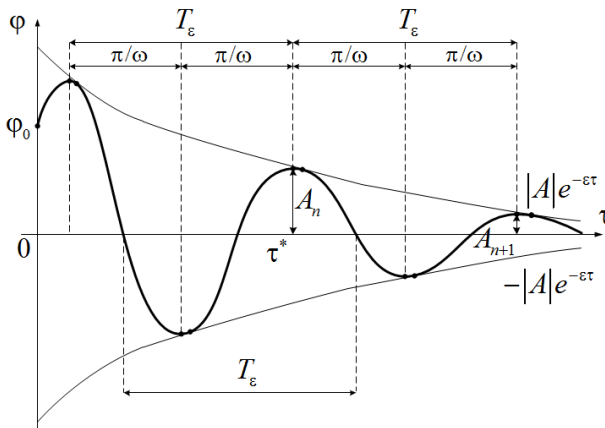


Рис. 1.4. Свободные затухающие колебания линейного осциллятора

Движение, описываемое формулой (1.9), называется *затухающими колебаниями*. Оно не является периодическим в строгом смысле, так как с течением времени последовательные

²⁾Случаи $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon > 1$ рассмотрены в [6].

максимальные отклонения маятника от нижнего положения равновесия уменьшаются, однако обладают рядом свойств повторяемости.

Функция $\varphi(\tau)$ обращается в нуль при значениях τ , удовлетворяющих уравнению $\cos(\omega\tau - \psi) = 0$, и имеет экстремумы при значениях $\tau = \tau_*$, определяемых из уравнения $\operatorname{tg}(\omega\tau - \psi) = -\varepsilon/\omega$, откуда получим $\cos^2(\omega\tau_* - \psi) = 1/(1 + \varepsilon^2/\omega^2)$. Тем самым, интервал времени между любыми последовательными прохождениями маятника через нижнее положение или любыми его последовательными максимальными отклонениями (в одну и ту же сторону) одинаков и равен

$$T_\varepsilon = 2\pi/\omega. \quad (1.10)$$

Величина T_ε , где ω определяется из (1.8), называется *периодом затухающих колебаний*. Он больше периода $T_0 = 2\pi$ свободных незатухающих колебаний маятника при отсутствии вязкого трения ($\varepsilon > 0$).

С практической точки зрения способ отыскания ε по данным эксперимента, в ходе которого измеряется T_ε и используется формула (1.10), неудачен. Это связано с тем, что вязкое трение слабо влияет на период затухающих колебаний. Действительно, в рассматриваемом случае (1.7) справедливо разложение

$$T_\varepsilon = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 2\pi(1 + \varepsilon^2/2 + O(\varepsilon^4)) \quad (1.11)$$

согласно которому даже при достаточно «больших» $\varepsilon \sim 10^{-1}$ расхождение между T_ε и T_0 составляет величину порядка 1%.

Конструктивный способ определения ε может быть найден с использованием следующего наблюдения. Вычислим отношение амплитуд A_n, A_{n+1} последовательных максимальных отклонений маятника в одну и ту же сторону. Из (1.9) и (1.10) следует формула

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{\varphi(\tau_*)}{\varphi(\tau_* + T_\varepsilon)} = e^{2\pi\varepsilon/\omega}, \quad (1.12)$$

показывающая, что эти амплитуды убывают в геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{-2\pi\varepsilon/\omega} < 1$. Величина

$$\delta = 2\pi\varepsilon/\omega = \varepsilon T_\varepsilon, \quad (1.13)$$

характеризующая затухание колебаний линейного осциллятора за один период T_ε , называется *логарифмическим декрементом колебаний*¹⁾.

¹⁾Вместо этого термина нередко используется термин *логарифмический декремент затухания*. Последний содержит тавтологию [19], так как слово «декремент» происходит от лат. *decrementum* — убывание, затухание.

Из (1.12) следует выражение для отношения амплитуд последовательных максимальных отклонений маятника в одну и ту же сторону через s периодов

$$A_n/A_{n+s} = e^{2\pi s\varepsilon/\omega}. \quad (1.14)$$

Пусть в ходе эксперимента обнаружилось, что через s периодов максимальная амплитуда отклонения маятника уменьшилась в N раз. Тогда с использованием (1.11) и (1.14) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ получим выражение для отыскания ε

$$\varepsilon = \ln \frac{N}{2\pi s}. \quad (1.15)$$

Предложенный и схожие методы нахождения коэффициента трения, например, широко используются в алгоритмах работы маятниковых приборов с опорой качения для исследования состояния поверхностей, в частности, для оценки твердости лакокрасочных материалов.

В соответствии с (1.9) полное затухание колебаний линейного осциллятора происходит за бесконечное время. В эксперименте это не наблюдается: колебания любой реальной системы прекращаются за конечное время. При решении задач, в постановке которых используется модель вязкого трения, это несоответствие устраняется следующим образом: колебания системы считают *затухшими*, когда амплитуда ее максимального отклонения от положения равновесия (в одну и ту же сторону) уменьшилась в ε раз по сравнению с амплитудой первого максимального отклонения. Из (1.13), (1.14), следует, что до затухания осциллятор совершит

$$s = 1/\delta \quad (1.16)$$

колебаний в одну и ту же сторону¹⁾, а оценка длительности этого процесса, называемая *характерным временем затухания колебаний*, дается формулой

$$\tau^* = T_\varepsilon/\delta = 1/\varepsilon. \quad (1.17)$$

Заметим, что при других видах трения затухание переменной φ будет происходить по закону, отличному от (1.9): во многих колебательных системах наряду с трением, пропорциональным скорости, присутствует и сухое трение [4, 6]. Поэтому при проведении экспериментов может оказаться, что отношение амплитуд последовательных максимальных отклонений не является фиксированной величиной.

¹⁾ Например, если логарифмический декремент колебаний равен 10^{-1} , то через 10 колебаний в одну и ту же сторону их амплитуда уменьшится примерно в три раза.

Заметим, что, в соответствии с разложением (1.11) и второй формулой (1.13) обсуждаемый выше случай $\varepsilon \sim 10^{-1}$ отвечает значениям $\delta \sim 2\pi \cdot 10^{-1} \sim 1$. Следовательно, даже в ситуации, когда до затухания осциллятор совершает всего лишь одно колебание (последующая амплитуда его максимального отклонения в одну и ту же сторону почти в три раза меньше предыдущей), период T_ε затухающих колебаний увеличивается мало — на величину порядка 1%.

Вместе с тем, малое вязкое трение существенно сказывается на убывании амплитуд колебаний осциллятора. Поэтому при изучении его вынужденных колебаний часто пренебрегают членами, отвечающими свободным колебаниям. Такой прием используется, в частности, в разделе 1.3, когда о свойствах общего решения линейного неоднородного уравнения (1.21) с постоянными коэффициентами судят, исходя из поведения его частного решения. Как показано в § 7, тот же подход справедлив и при анализе малых колебаний систем с произвольным числом степеней свободы.

Как проводить эксперименты с маятником, не выходя за пределы применимости модели линейного осциллятора.

При изучении динамики систем или проведении экспериментов рассматриваемая математическая модель не должна использоваться за пределами применимости предположений, при которых она была построена. Можно показать (см. раздел 5.2), что при $|\varphi| \ll 1$ рассогласование между решениями нелинейной и линейной моделей (1.3) и (1.5) колебаний маятника на интервале времени $t \geq 0$ оценивается величиной $O(\varphi_*^3)$, т. е. имеет порядок слагаемых, отбрасываемых при переходе к линейной модели. Здесь φ_* — характерное значение угла отклонения маятника — величина порядка максимальной амплитуды его колебаний.

Опыт показывает [6, 18], что колебания маятника могут считаться «малыми», если φ_* не превышает величин порядка $\pi/6$. В противном случае результаты эксперимента с использованием модели (1.5) могут исказить погрешности, связанные с влиянием нелинейных членов, которые были отброшены при ее составлении.

Следует учитывать, что точность используемой модели должна соответствовать точности задания ее параметров. Если они заданы грубо, то учет нелинейных членов в уравнениях движения, как правило, создает лишь иллюзию повышения точности. Если, напротив, рассматривается достаточно грубая линейная модель, учитывающая малые слагаемые (например, члены, отвечающие малому вязкому трению), то следует выбирать начальные условия такими, чтобы нелинейные члены, отброшенные при составлении ли-

нейной модели, были существенно меньше этих малых слагаемых. Последнее означает, что при экспериментальном отыскании коэффициента ε нужно выбирать начальные угол и угловую скорость маятника так, чтобы максимальная амплитуда A_1 его отклонения (см. рис. 1.4) удовлетворяла условию $A_1^3 \ll \varepsilon$.

1.3. Вынужденные малые колебания маятника с вязким трением

Вывод уравнения движения.

Рассмотрим перевернутый маятник — легкий жесткий однородный стержень длины ℓ с вязким трением в оси опоры Oz (она перпендикулярна плоскости рис. 1.5), с точечной массой t на конце C . Как и ранее, в разделе 1.2, будем считать, что в точке C сосредоточена вся масса маятника. В точке M маятник скреплен линейной пружиной с неподвижным пространством. Расстояние OM равно h ; в верхнем

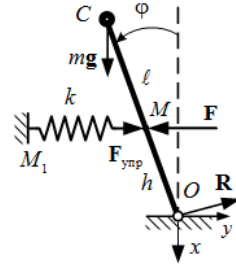


Рис. 1.5. Вынужденные колебания маятника

положении маятника пружина расположена горизонтально и недеформирована, ее жесткость k выбрана так, что верхнее положение устойчиво. В той же точке M к маятнику вдоль горизонтального направления приложена возмущающая сила \mathbf{F} , проекция которой изменяется по закону $F = P \cos \Omega t$.

Зададим положение маятника углом φ его поворота вокруг оси Oz , отсчитываемым от верхнего положения равновесия¹⁾, и составим его уравнение движения. В данном случае помимо силы тяжести $m\mathbf{g}$, проекция момента которой на ось Oz теперь определяется выражением $M = mgl \sin \varphi$, силы реакции \mathbf{R} в оси Oz , не создающей момента относительно нее, и момента $\mathbf{M}_{\text{тр}}$ вязкого трения, на маятник действуют сила упругости \mathbf{F} , создаваемая пружиной, и возмущающая сила \mathbf{F} . В рамках закона Гука имеем $\mathbf{F} = -k\Delta \mathbf{e}_{M_1M}$, где M_1 — левый конец пружины; $\Delta = M_1M - \rho$ и ρ — деформация пружины и ее длина в недеформированном состоянии; \mathbf{e}_{M_1M} — единичный вектор по направлению вектора $\mathbf{M}_1\mathbf{M}$. Значение M_1M можно найти, если ввести декартову систему координат Oxy (рис. 1.5), записать выражения для координат (x_1, y_1) , (x, y) точек M_1 , M

¹⁾При изучении колебаний вблизи верхнего положения равновесия вместо угла α отклонения маятника от нижнего положения удобнее рассматривать угол $\varphi = \pi - \alpha$.

$$x_1 = -h, \quad y_1 = -\rho, \quad x = -h \cos \varphi, \quad y = -h \sin \varphi$$

и воспользоваться формулой $M_1 M = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$. Моменты силы упругости и возмущающей силы могут быть далее определены по формулам $M_{\text{упр}} = \mathbf{OM} \times \mathbf{F}$ и $M_{\mathbf{F}} = \mathbf{OM} \times \mathbf{F}$ соответственно. Как и в разделе 1.2, зададим проекцию момента вязкого трения на ось Oz выражением $M_{\text{тр}} = -b\dot{\varphi}$, где $b > 0$ — постоянный коэффициент.

Ограничившись далее случаем малых значений переменного $|\varphi|$, заменим $\sin \varphi = \varphi$, $\cos \varphi = 1$. Тогда выражения для координат точек M_1 и M , деформации пружины и проекций моментов сил тяжести, упругости и возмущающей силы на ось Oz примут вид²⁾

$$\begin{aligned} x = x_1 = -h, \quad y_1 = \rho, \quad y = -h\varphi, \quad \Delta = h\varphi, \\ M = mgl\varphi, \quad M_{\text{упр}} = -kh^2\varphi, \quad M_{\mathbf{F}} = Fh. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Согласно пятой и шестой формулам (1.18) приближенное выражение для потенциальной энергии маятника в рассматриваемом случае $|\varphi| \ll 1$ записывается в форме³⁾

$$\Pi = -mgl\frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{2}kh^2\varphi^2. \quad (1.19)$$

Подстановка выражения $M_z = M + M_{\text{тр}} + M_{\text{упр}} + M_{\mathbf{F}}$ в (1.2) или выражения для Π в (1.4), где теперь $Q_\varphi = M_{\text{тр}} + M_{\mathbf{F}}$, приводит к уравнению малых колебаний маятника вблизи верхнего положения равновесия

$$ml^2\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + (kh^2 - mgl)\varphi = Ph \cos \Omega t. \quad (1.20)$$

В соответствии с уравнениями (1.1), (1.20), в рамках построенной линейной модели рассматриваемая механическая система представляет собой линейный осциллятор под действием вынуждающей периодической силы.

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики вынужденных колебаний маятника. Алгоритм определения коэффициента малого вязкого трения. Будем считать значения m , l , k , h , P и Ω известными, значение b неизвестным. Рассматриваемый ниже способ нахождения коэффициента b по данным эксперимента пригоден для случая

²⁾Первая формула (1.18) показывает, что на рассматриваемом уровне точности можно считать, что смещение точки M , и, следовательно, деформация пружины происходит только вдоль горизонтальной оси Oy .

³⁾Выражение (1.19) также может быть получено из точного выражения $\Pi = -mgl \cos \varphi + k\Delta^2/2$ после замены $\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2$, $\Delta = h\varphi$ и пренебрежения несущественной постоянной $\Pi(0) = -mgl$.

малого трения в оси опоры маятника (условие «малости» трения в случае вынужденных колебаний будет уточнено позднее).

Воспользовавшись алгоритмом перехода от (1.5) к (1.6), приведем уравнение (1.20) к безразмерному виду. Разделив обе его части на $kh^2 - mgl$ и перейдя к безразмерному времени τ по формуле $t = \tau \sqrt{ml^2/(kh^2 - mgl)}$ ($t_* = \sqrt{ml^2/(kh^2 - mgl)}$ — характерное время малых свободных колебаний маятника без трения¹⁾), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \varphi'' + 2\varepsilon\varphi' + \varphi &= a \cos \omega\tau, \\ 2\varepsilon &= \frac{b}{(kh^2 - mgl)t_*}, \quad a = \frac{Ph}{kh^2 - mgl}, \quad \omega = \Omega t_*. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по времени τ .

Общее решение линейного неоднородного уравнения (1.21) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения (свободных колебаний), которое в случае (1.7) имеет вид (1.9), и частного решения неоднородного уравнения (вынужденных колебаний). Как было показано в разделе 1.2 (см. также [6]), свободные колебания затухают, следовательно при $\tau \rightarrow \infty$ (для практических задач — при достаточно больших τ) динамика маятника определяется вынужденными колебаниями.

Вынужденные колебания удобно находить следующим образом. Вместо уравнения (1.21) с вещественной правой частью $f(\tau) = a \cos \omega\tau$ рассматривается уравнение

$$\tilde{\varphi}'' + 2\varepsilon\tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi} = ae^{i\omega\tau} \quad (1.22)$$

с комплексной правой частью $\tilde{f}(\tau) = ae^{i\omega\tau}$, для которой $f(\tau)$ — вещественная часть: $f(\tau) = \text{Re } \tilde{f}(\tau)$. Согласно принципу суперпозиции, решение уравнения (1.21) совпадает с вещественной частью решения уравнения (1.22):

$$\varphi = \text{Re } \tilde{\varphi}. \quad (1.23)$$

Решение уравнения (1.22) отыскивается в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{A}e^{i\omega\tau}, \quad (1.24)$$

где $\tilde{A} = \text{const}$ — комплексное число. После подстановки (1.24) в (1.22) получаем

$$\tilde{A} = \frac{a}{1 - \omega^2 + 2\varepsilon i\omega}. \quad (1.25)$$

¹⁾Поскольку верхнее положение маятника устойчиво, справедливо неравенство $kh^2 - mgl > 0$.

Из (1.24) и (1.25) следуют равенства

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \frac{ae^{i\omega\tau}}{1 - \omega^2 + 2\varepsilon i\omega} = \frac{a(\cos \omega\tau + i \sin \omega\tau)(1 - \omega^2 - 2\varepsilon i\omega)}{(1 - \omega^2 + 2\varepsilon i\omega)(1 - \omega^2 - 2\varepsilon i\omega)} = \\ &= \frac{a((1 - \omega^2) \cos \omega\tau + 2\varepsilon\omega \sin \omega\tau + i(\dots))}{(1 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}.\end{aligned}$$

В соответствии с (1.23) решением (1.21) служит функция

$$\varphi = \frac{a((1 - \omega^2) \cos \omega\tau + 2\varepsilon\omega \sin \omega\tau)}{(1 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2} = A \cos(\omega\tau - \psi), \quad (1.26)$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}, \quad (1.27)$$

$$\cos \psi = \frac{1 - \omega^2}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}, \quad \sin \psi = \frac{2\varepsilon\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}}. \quad (1.28)$$

Из (1.28) следует более удобная для анализа формула

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\varepsilon\omega}{1 - \omega^2}. \quad (1.29)$$

Графики функций $A(\omega)$ и $\psi(\omega)$, определенных формулами (1.27) и (1.29), называются *амплитудно-частотной* и *фазочастотной характеристиками системы* (коротко пишут АЧХ и ФЧХ). Из качественный вид при различных значениях безразмерного коэффициента ε вязкого трения приведен на рис. 1.6, а, б.

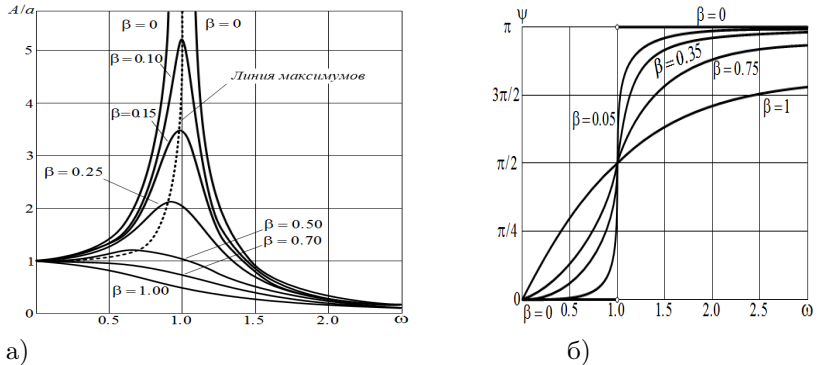


Рис. 1.6. Амплитудно-частотная (а) и фазочастотная (б) характеристики линейного осциллятора при различных значениях безразмерного коэффициента ε вязкого трения [4]

Анализ рис. 1.6, а показывает, что для достаточно малых и достаточно больших значений ω амплитуда вынужденных

колебаний осциллятора мало зависит от момента вязкого трения¹⁾. При $\omega \rightarrow 0$, когда частота Ω возмущающей силы существенно меньше частоты $1/t_*$ колебаний осциллятора без трения, амплитуда вынужденных колебаний имеет порядок величины a — так называемого [4] *статического отклонения* осциллятора под действием постоянной силы \mathbf{F} , $|\mathbf{F}| = P$. В случае $\omega \rightarrow \infty$, когда $\Omega \gg 1/t_*$, амплитуда вынужденных колебаний асимптотически стремится к нулю. Таким образом, даже при больших амплитудах возмущающей силы амплитуда вынужденных колебаний может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора параметров линейного осциллятора, при которых частота возмущающей силы существенно превосходит собственную частоту колебаний осциллятора без трения.

Как следует из рис. 1.6, а, при небольших ε и значениях $\omega \sim 1$ ($\Omega \sim 1/t_*$) вязкое трение существенно влияет на амплитуду вынужденных колебаний. Исследуем количественные закономерности этого влияния, которые далее позволят найти решение задачи об отыскании неизвестного параметра ε (и, далее, b см. (1.21)). Функция $A(\omega)$ достигает максимума при значении $\omega = \omega_{\max} = \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}$, отвечающем минимуму подкоренного выражения в знаменателе формулы (1.27). Ограничимся случаем $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{2}$, когда ω_{\max} существует (этот случай соответствует *малому трению* в теории вынужденных колебаний линейного осциллятора). Максимальное значение амплитуды A получается из (1.27) при $\omega = \omega_{\max}$:

$$A = A_{\max} = \frac{a}{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (1.30)$$

Явление, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимума, называется *резонансом*, выражения A_{\max} и ω_{\max} — *резонансными амплитудой* и *частотой*. Кривая (1.30), отвечающая точкам максимума АЧХ (линия максимумов), для различных значений ε показана на рис. 1.6, а пунктирной линией. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $A_{\max} \rightarrow \infty$. Таким образом, даже при малой амплитуде возмущающей периодической силы можно получить интенсивные вынужденные колебания, если параметры линейного осциллятора выбраны так, что частота возмущающей силы близка к собственной частоте колебаний осциллятора без трения.

¹⁾Отмеченное свойство упрощает вычисление амплитуд вынужденных колебаний. При относительно малом вязком трении и достаточно далеких от значений $\omega \sim 1$ частот возмущающей силы амплитуды вынужденных колебаний почти не отличаются от соответствующих амплитуд при отсутствии трения, которые, согласно (1.27), определяются более простой формулой $A = a/|1 - \omega^2|$.

Из (1.30) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ следует формула $A_{\max} = a/2\varepsilon$, которая используется при экспериментальном определении коэффициента вязкого трения в линейных системах с одной степенью свободы¹⁾. На систему действуют известной гармонической силой и измеряют значение A_{\max} амплитуды резонансных колебаний. Тогда

$$\varepsilon = \frac{a}{2A_{\max}}. \quad (1.31)$$

В соответствии с рис. 1.6, б справедливо неравенство $\psi > 0$, откуда с учетом выражений для правых частей (1.21) и (1.27) следует, что вынужденное колебание всегда отстает от возмущающей силы. Как и для амплитудно-частотной характеристики, при достаточно малых и достаточно больших ω сдвиг фазы мало зависит от коэффициента вязкого трения: в случае $\omega \rightarrow 0$ имеем $\psi \rightarrow 0$, т.е. вынужденное колебание совершается синфазно с возмущающей силой; при $\omega \rightarrow \infty$ получаем $\psi \rightarrow \pi$ — здесь вынужденное колебание и возмущающая сила находятся в противофазе. При $\varepsilon = 0$ зависимость $\psi(\omega)$ приобретает скачкообразный характер: из первой формулы (1.28) следует выражение $\cos \psi = \text{sign}(1 - \omega^2)$, согласно которому в случае $\omega < 1$ ($\Omega < 1/t_*$) сдвиг фаз возмущающей силы и вынужденного колебания равен нулю; в случае $\omega > 1$ ($\Omega > 1/t_*$) сдвиг фаз равен π . При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\psi(\omega)$ быстро изменяется от 0 до π .

Случай противофазы возмущающей силы и вынужденного колебания в ситуации, когда ее частота превышает собственную частоту колебаний осциллятора без трения, ярко иллюстрируется на примере килевой качки корабля [17]. Частота набегания волн на корабль зависит от его курса и скорости. При их неудачном выборе частота набегания может несколько превысить собственную частоту килевой качки, и тогда явление резонанса будет сопровождаться тем, что корабль не взбегает на волну, а опускается вниз и зарывается в нее носовой частью. При возникновении таких явлений необходимо срочно менять курс и скорость корабля.

Теория вынужденных колебаний применяется в разных областях физики и техники (акустика, радиотехника, сейсмография и пр.). Заметим, что резонанс при вынужденных колебаниях не всегда вреден. Принцип работы многих регистрирующих

¹⁾Значение A_{\max} не должно выходить за пределы «малых» значений переменной $|\varphi|$, при которых корректно использование линейной модели (1.20) колебаний маятника. В противном случае следует проводить анализ нелинейной модели его движения.

устройств, например, радиоприемников, основан на резонансном способе усиления электромагнитного сигнала фиксированной частоты, посылаемого радиостанцией [20]. Уменьшать нежелательные резонансные вибрации в системах с малым вязким трением можно при помощи динамических гасителей колебаний, принцип работы которых обсуждается в разделе 2.4.

§2. Свободные и вынужденные малые колебания систем с двумя степенями свободы около устойчивого положения равновесия

2.1. Алгоритм отыскания главных форм колебаний систем с двумя степенями свободы

Рассмотрим систему с голономными стационарными идеальными связями, положение которой определяется вектором независимых обобщенных координат $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ ($(\cdot)^T$ — знак транспонирования)¹⁾. Действующие на систему силы считаются потенциальными. Предполагается, что в начале координат

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

находится изолированное положение равновесия системы, в котором ее потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум. При выполнении указанного условия положение равновесия (2.1) устойчиво.

Для того чтобы составить линейные уравнения колебаний системы около положения равновесия нужно (см. раздел 6.2) построить разложения ее кинетической и потенциальной энергии $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и $\Pi(\mathbf{q})$ в ряд Тейлора по малым компонентам векторов \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$ и оставить в разложении для T квадратичные слагаемые по обобщенным скоростям, в выражении для Π — квадратичные слагаемые по обобщенным координатам, т. е. привести к виду

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (2.2)$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени t , $\mathbf{A} = \|a_{js}\|$ и $\mathbf{C} = \|c_{js}\|$ ($j, s = 1, 2$) — постоянные симметрические положительно определенные матрицы инерционных коэффициентов и жесткости

¹⁾Мы ограничиваемся системами с двумя степенями свободы исключительно из-за простоты их анализа и проведения экспериментов. Большинство выводов, которые будут делаться по ходу изложения материала этого и последующих разделов, можно обобщить на случай систем с любым числом степеней свободы (см. § 6).

системы в положении равновесия²⁾. Уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{0}, \quad L = T - \Pi, \quad (2.3)$$

где L — функция Лагранжа рассматриваемой системы, записанная с использованием формул (2.2), представляют собой систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, которые называются *уравнениями малых колебаний*

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Общее решение системы (2.4) является суперпозицией двух гармонических колебаний

$$\mathbf{q}(t) = C_1 \mathbf{h}_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \mathbf{h}_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) \quad (2.5)$$

где *собственные частоты* ω_j и *векторы собственных форм* $\mathbf{h}_j = (h_{1j}, h_{2j})^T$ ($j = 1, 2$) определяются элементами матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} (т.е. параметрами рассматриваемой системы), а постоянные C_j и ψ_j — начальными условиями $\mathbf{q}(0)$, $\dot{\mathbf{q}}(0)$. Составляющие $C_j \mathbf{h}_j \cos(\omega_j t - \psi_j)$ общего решения (2.5) называются *главными формами малых колебаний* системы (2.4).

Значения $\lambda_j = \omega_j^2$ находятся из *уравнения частот*

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}| = 0, \quad (2.6)$$

векторы \mathbf{h}_j — из уравнения

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A})\mathbf{h}_j = \mathbf{0} \quad (j = 1, 2). \quad (2.7)$$

Можно показать, что \mathbf{h}_j линейно независимы.

Для определения постоянных C_j и ψ_j следует, используя (2.5), записать соотношения для $\mathbf{q}(0)$, $\dot{\mathbf{q}}(0)$ и рассмотреть их как линейные неоднородные уравнения относительно величин $\beta_j = C_j \cos \psi_j$, $\gamma_j = C_j \omega_j \sin \psi_j$ ($j = 1, 2$). Решив эти уравнения, получим

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{q}(0), \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{q}}(0),$$

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^T, \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)^T, \mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2),$$

после чего искомые постоянные могут быть найдены по формулам

$$C_j = \text{sign } \beta_j \sqrt{\beta_j^2 + (\gamma_j / \omega_j)^2}, \quad \psi_j = \arctg(\gamma_j / (\beta_j \omega_j)). \quad (2.8)$$

²⁾ Постоянная $\Pi(\mathbf{0})$ в выражении для потенциальной энергии не нужна для составления уравнений Лагранжа второго рода и поэтому может быть отброшена. Условия положительной определенности матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} для систем второго порядка имеют вид $a_{11} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ и $c_{11} > 0$, $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$.

В ходе экспериментов нередко приходится сталкиваться с системами, все или часть параметров которых известны с ограниченной точностью или неизвестны. При этом использование уравнений (2.6), (2.7) делается затруднительным. Свойство линейной независимости векторов собственных форм позволяет сформулировать утверждение, которое может применяться для отыскания этих векторов, а также собственных частот системы без привлечения (2.6), (2.7), и, тем самым, дает возможность получить представление о свойствах и количественных закономерностях малых колебаний. В задачах с известными параметрами этот подход упрощает решение и позволяет проверить справедливость результатов, полученных при помощи точных формул (2.5) – (2.8).

Утверждение. Для того чтобы в системе (2.4) возникли одночастотные колебания на частоте ω_j ($j = 1, 2$), т. е. решение этой системы имело вид $\mathbf{q} = C_j \mathbf{h}_j \cos(\omega_j t - \psi_j)$, нужно задать векторы начальных условий коллинеарными векторам \mathbf{h}_j собственных форм:

$$\mathbf{q}(0) = a_j \mathbf{h}_j, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = b_j \mathbf{h}_j,$$

где хотя бы одна из постоянных a_j, b_j отлична от нуля.

При отыскании неизвестных параметров системы также может оказаться полезным измерение парциальных частот.

Парциальными частотами системы (2.4) называются частоты $\omega_{q_j} = \sqrt{c_{jj}/a_{jj}}$ колебаний парциальной системы

$$a_{jj}\ddot{q}_j + c_{jj}q_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.9)$$

которая получается после отбрасывания элементов матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} , не лежащих на главной диагонали. Уравнение (2.9), отвечающее $j = 1$, описывает колебания рассматриваемой системы после наложения на нее связи $q_2 = 0$, уравнение для $j = 2$ — колебания системы со связью $q_1 = 0$. В соответствии с отмеченным свойством при экспериментальном нахождении парциальных частот системы (2.4) для каждого номера $j = 1, 2$ следует зафиксировать не совпадающую с j -й обобщенную координату и измерить частоту колебаний полученной системы.

В силу положительной определенности матрицы \mathbf{A} график функции $\Delta(\lambda)$,

$$\Delta = |\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda a_{11} & c_{12} - \lambda a_{12} \\ c_{12} - \lambda a_{12} & c_{22} - \lambda a_{22} \end{vmatrix}, \quad (2.10)$$

— парабола, расположенная ветвями вверх (рис. 2.1). Согласно (2.6) ее ветви пересекают ось абсцисс при $\lambda_1 = \omega_1^2$ и $\lambda_2 = \omega_2^2$, т. е. для $\omega_1^2 \leq \lambda \leq \omega_2^2$ справедливо неравенство $\Delta \leq 0$, для $\lambda \leq \omega_1^2$ и

$\lambda \geq \omega_2^2$ — неравенство $\Delta \geq 0$ (в частности, в силу положительной определенности матрицы \mathbf{C} имеем $\Delta(0) = |\mathbf{C}| > 0$). Поскольку при $\lambda = \omega_{q_1}^2 = c_{11}/a_{11}$ и $\lambda = \omega_{q_2}^2 = c_{22}/a_{22}$ обращается в нуль первый или второй элемент главной диагонали матрицы внутри определителя (2.10), имеем $\Delta(\omega_{q_j}^2) = -\left(c_{12} - \omega_{q_j}^2 a_{12}\right)^2 \leq 0$ ($j = 1, 2$), откуда получаем неравенства

$$\omega_1 \leq \omega_{q_1}, \omega_{q_2} \leq \omega_2, \quad (2.11)$$

иллюстрирующие общее свойство линейных колебательных систем с произвольным числом степеней свободы [6]: собственные частоты системы со связью лежат между частотами исходной (свободной) системы. Это свойство, в частности, применяется при проверке качества стеклянных, фарфоровых, керамических и проч. изделий. При ударе карандаша об изделие с трещиной слышен более глухой звук, чем тот, который издает изделие без трещины. Это связано с тем, что последнее содержит больше связей, чем изделие с трещиной, края которого могут немного смещаться друг относительно друга.

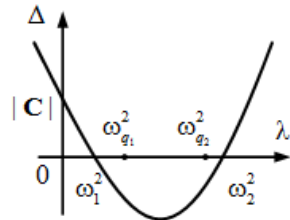


Рис. 2.1. Взаимное расположение парциальных и собственных частот для консервативных систем с двумя степенями свободы

2.2. Главные формы малых колебаний связанных маятников

Вывод уравнений движения. Уравнения малых колебаний. Рассмотрим¹⁾ механическую систему, образованную двумя физическими маятниками — жесткими однородными невесомыми стержнями длины ℓ_1 и ℓ_2 с точечными массами m_1 и m_2 на концах, которые скреплены линейной пружиной жесткости k (рис. 2.2). Оси O_1z_1 , O_2z_2 подвеса маятников ортогональны плоскости рис. 2.2, расстояние от точки O_j до точки A_j крепления пружины ($j = 1, 2$) равно h , расстояние $\rho = O_1O_2$ совпадает с длиной пружины в недеформированном состоянии (при этом нижнее положение маятников является их положением равновесия). Трение в осях подвеса маятников считается пренебрежимо малым.

¹⁾Текст раздела изложен в соответствии с [6].

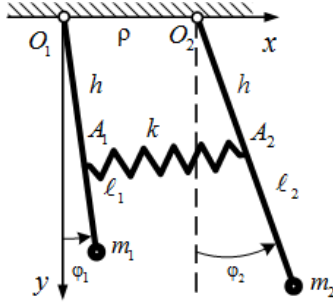


Рис. 2.2. Колебания связанных маятников вблизи нижнего устойчивого положения равновесия

Зададим положение маятников углами φ_1 и φ_2 их отклонения от нижнего положения, которые далее будут предполагаться малыми. Для описания движения системы будем использовать уравнения Лагранжа второго рода (2.3), где $\mathbf{q} = (\varphi_1, \varphi_2)^T$. Выражения для кинетической и потенциальной энергии системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\varphi}_2^2, \quad (2.12)$$

$$\Pi = -m_1g\ell_1 \cos \varphi_1 - m_2g\ell_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{2}k\Delta^2,$$

где $\Delta = A_1A_2 - \rho$ — деформация пружины. Значение A_1A_2 можно получить по аналогии с тем, как это делалось в разделе 1.3: следует ввести декартову систему координат O_1xy (рис. 2.2), записать выражения для координат (x_j, y_j) точек A_j ($j = 1, 2$)

$$x_1 = h \cos \varphi_1, \quad y_1 = h \sin \varphi_1, \quad x_2 = h \cos \varphi_2, \quad y_2 = \rho + h \sin \varphi_2$$

и воспользоваться формулой $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Для записи уравнений малых колебаний рассматриваемой системы около нижнего (устойчивого) положения равновесия нужно оставить в разложении ее функции Лагранжа $L = T - \Pi$ только квадратичные слагаемые по малым обобщенным координатам и скоростям (см. раздел 2.1). Тем самым, в (2.12) следует принять $\cos \varphi_j = 1 - \varphi_j^2/2$ ($j = 1, 2$), $\Delta = h(\varphi_2 - \varphi_1)$. Опустив в выражении для Π несущественные постоянные (после указанных преобразований оно содержит слагаемые, аналогичные (1.19)), приходим к выражению вида (2.2), (2.3).

$$L = \frac{1}{2}m_1\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2}m_1g\ell_1\varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2g\ell_2\varphi_2^2 - \frac{1}{2}kh^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2. \quad (2.13)$$

После подстановки (2.13) в (2.3) получим уравнения в форме (2.4):

$$\begin{aligned} m_1 \ell_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_1 g \ell_1 \varphi_1 - k h^2 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ m_2 \ell_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 g \ell_2 \varphi_2 + k h^2 (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m_1 \ell_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \ell_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} m_1 g \ell_1 + k h^2 & -k h^2 \\ -k h^2 & m_2 g \ell_2 + k h^2 \end{pmatrix}.$$

Те же уравнения описывают [3] малые крутильные колебания двух тел вокруг оси вала с закрепленными концами (рис. 2.3). Обозначив α_1 и α_2 углы поворота тел; J_1 и J_2 — их моменты инерции, k_0 , k_1 , k_2 — соответствующие крутильные жесткости трех частей вала и предполагая, что его деформация происходит в соответствии с законом Гука, получим систему уравнений

$$J_1 \ddot{\alpha}_1 = -k_0 \alpha_1 + k_1 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad J_2 \ddot{\alpha}_2 = -k_2 \alpha_2 - k_1 (\alpha_2 - \alpha_1)$$

которая после замены $\alpha_j = \varphi_j$, $J_j = m_j \ell_j^2$ ($j = 1, 2$), $k_0 = m_1 g \ell_1$, $k_1 = k h^2$, $k_2 = m_2 g \ell_2$ совпадает с (2.14).

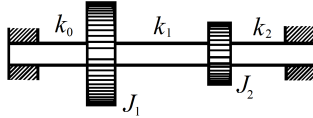


Рис. 2.3. Два вращающихся тела на валу с закрепленными концами

Примером электрического аналога (2.14) служит [3] система из двух контуров с емкостной связью (рис. 2.4). Действительно, обозначим q_1 , q_2 и q_3 заряды на конденсаторах; C_1 , C_2 и C_3 — их емкости; L_1 и L_2 — индуктивности катушек. После интегрирования уравнения первого закона Кирхгофа для токов $I_s = \dot{q}_s$ ($s = 1, 2, 3$), сходящихся в узле A (см. раздел 1), получим

$$q_3 = q_3(0) + q_1 - q_1(0) - q_2 + q_2(0),$$

где $q_s(0)$ — начальные заряды на конденсаторах.

Применяя к рассматриваемой схеме второй закон Кирхгофа (см. раздел 1), приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_3} &= \gamma, \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1 - q_2}{C_3} &= -\gamma, \quad \gamma = \frac{q_1(0) - q_2(0) - q_3(0)}{C_3}. \end{aligned}$$

После перехода от переменных q_j к переменным $\tilde{q}_j = q_j - q_j^0$

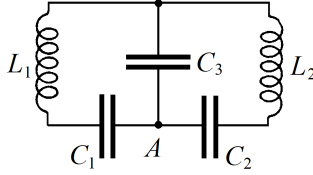


Рис. 2.4. Электрические контуры с емкостной связью

($j = 1, 2$), где

$$q_1^0 = \frac{\gamma C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q_2^0 = -\frac{\gamma C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

— равновесные значения зарядов и замены $\tilde{q} = \varphi_j$, $L_j = m_j \ell_j^2$, $1/C_j = m_j g \ell_j$ ($j = 1, 2$), $1/C_3 = kh^2$ полученная система принимает вид (2.14).

Определение жесткости пружины. Перейдем к исследованию системы (2.14), ограничившись случаем одинаковых маятников:

$$m_1 = m_2 = m, \quad \ell_1 = \ell_2 = \ell. \quad (2.15)$$

Поставим задачу отыскания k при известных значениях m , ℓ и h . Анализ свойств малых колебаний системы дает возможность определить связь частот и других характеристик колебаний с неизвестной жесткостью пружины и сформировать алгоритм проведения экспериментов, позволяющих ее найти.

Из уравнения (2.6), составленного для (2.14)

$$\begin{aligned} |\mathbf{C} - \mathbf{A}\lambda| &= \begin{vmatrix} mg\ell + kh^2 - \lambda m\ell^2 & -kh^2 \\ -kh^2 & mg\ell + kh^2 - \lambda m\ell^2 \end{vmatrix} = \\ &= (mg\ell - \lambda m\ell^2) (mg\ell + 2kh^2 - \lambda m\ell^2) = 0 \end{aligned}$$

получим выражения для квадратов собственных частот колебаний маятников

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{g}{\ell}, \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2kh^2}{m\ell^2} \quad (2.16)$$

Подставив их в (2.7), приходим к системе уравнений для определения соответствующих компонент векторов \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 собственных

форм

$$\begin{pmatrix} kh^2 & -kh^2 \\ -kh^2 & kh^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -kh^2 & -kh^2 \\ -kh^2 & -kh^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует

$$\mathbf{h}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{h}_2 = (1, -1)^T. \quad (2.17)$$

На основании (2.5), (2.16) и (2.17) решение уравнений (2.14) малых колебаний маятников имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2), \\ \varphi_2(t) &= C_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) - C_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Согласно утверждению из раздела 2.1 при выборе векторов $\mathbf{q}(0) = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^T$ и $\dot{\mathbf{q}}(0) = (\dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0))^T$ начальных значений переменных рассматриваемой системы коллинеарными вектору \mathbf{h}_j собственной формы, колебания маятников будут происходить на частоте ω_j ($j = 1, 2$). Это нетрудно проверить экспериментально, приняв для удобства $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$.

Если отклонить маятники на одинаковые углы: $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ и отпустить без начальной скорости (в этом случае вектор $\mathbf{q}(0) = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^T$, начальных условий коллинеарен вектору \mathbf{h}_1 , определенному первым выражением (2.17), то пружина останется недеформированной, и маятники будут совершать *синфазные колебания*, т.е. колебания с одинаковой амплитудой $|\varphi_1(0)|$ и частотой $\omega_1 = \sqrt{g/\ell}$ колебаний математического маятника — эквивалентной модели таких колебаний (рис. 2.5, а, б).

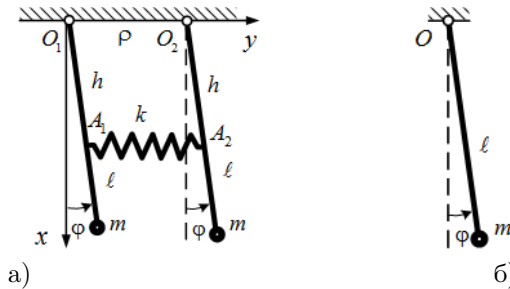


Рис. 2.5. Синфазные колебания связанных маятников (а) и их эквивалентная модель (б)

Если отклонить маятники на одинаковые углы в разные стороны: $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0)$, и отпустить без начальной скорости (вектор $\mathbf{q}(0) = (\varphi_1(0), \varphi_2(0))^T$ этих начальных условий коллинеарен вектору \mathbf{h}_2 , определенному вторым выражением (2.17)), то действующие на маятники моменты будут одинаковыми по величине, и они будут совершать *противофазные колебания* — колебания с одинаковой амплитудой $|\varphi_1(0)|$ в противоположных направлениях (рис. 2.6, а). Поскольку в случае малых колебаний восстанавливающий момент силы тяжести пропорционален углу отклонения маятника, а восстанавливающий момент силы упругости пропорционален деформации пружины, которая для противофазных колебаний определяется выражением $\Delta = 2h\varphi_2 = -2h\varphi_1$, поэтому эквивалентная модель этих колебаний — маятник, скрепленный линейной пружиной жесткости $2k$ с неподвижным пространством (рис. 2.6, б). Частота колебаний эквивалентной модели, совпадающая с частотой ω_2 противофазных колебаний маятников, превышает частоту ω_1 их синфазных колебаний, поскольку на противофазные колебания, помимо восстанавливающего момента силы тяжести влияет также восстанавливающий момент со стороны пружины.

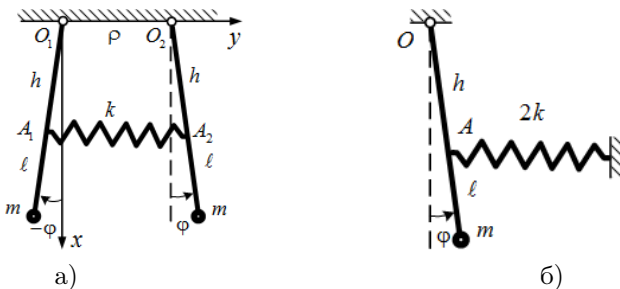


Рис. 2.6. Противофазные колебания связанных маятников (а) и их эквивалентная модель (б)

Как следует из второго выражения (2.16) и проведенных рассуждений, жесткость k пружины можно найти при известном значении частоты ω_2 , определяемой из эксперимента, в ходе которого создаются противофазные колебания маятников. Однако при таком подходе может допускаться значительная погрешность: «вручную» трудно точно задать требуемые начальные условия.

Более простой для выполнения эксперимент, позволяющий вычислить k и проверить результат эксперимента с созданием противофазных колебаний, связан с измерением парциальных частот колебаний маятников (см. раздел 2.1). Из-за симметрии рассмат-

риваемой системы эти частоты совпадают, их выражения получаются с применением (2.9), выражений для матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} из (2.14) и условий (2.15):

$$\eta = \omega_{\varphi_1} = \omega_{\varphi_2} = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{kh^2}{m\ell^2}} \quad (2.19)$$

Неравенства вида (2.11)

$$\omega_1 < \omega_{\varphi_1}, \quad \omega_{\varphi_2} < \omega_2$$

в рассматриваемом случае могут быть проверены непосредственно при помощи (2.16) и (2.19).

Для того чтобы уменьшить ошибку при экспериментальном определении k , обе части (2.19) возводят в квадрат, умножают на ℓ/g и приводят к виду

$$Y = 1 + KX, \quad Y = \frac{\eta^2 \ell}{g}, \quad X = \left(\frac{h}{\ell}\right)^2, \quad K = \frac{k\ell}{mg}. \quad (2.20)$$

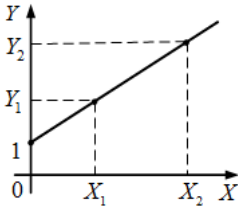


Рис. 2.7. Определение жесткости пружины

нием (2.20) на плоскости XU (рис. 2.7), находится из формулы

$$K = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad (2.21)$$

после чего с использованием последнего соотношения (2.20) определяют значение k .

Обмен энергией между маятниками («перекачка энергии»). Обсудим еще один вариант проверки полученного результата, связанный с интересным явлением перехода энергии

¹Прямая на плоскости XU , описываемая первым уравнением (2.20), проходит через точку $(0, 1)$ (рис. 2.7). С математических позиций для отыскания коэффициента K ее наклона достаточно было бы найти координату только одной точки этой прямой, т. е. сделать одно измерение парциальной частоты. Однако при таком подходе ошибки, связанные с неточностью измерений, могут существенно повлиять на значение K . В связи с этим делают два эксперимента, а точность их проведения проверяют, исходя из отклонения прямой, проходящей через точки (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , от точки $(0, 1)$.

от одного маятника к другому, которое можно наблюдать в ходе следующего эксперимента. Отклоним один из маятников, а второй задержим в нижнем положении, затем одновременно отпустим оба маятника. Сначала первый маятник колеблется примерно так же, как если бы второй мы продолжали удерживать рукой, пружина между маятниками сжимается-разжимается, создаваемая ею сила упругости действует на второй маятник, и он постепенно начинает раскачиваться. Энергия, сообщенная первому маятнику в начальный момент времени, постепенно передается второму: амплитуда колебаний первого маятника убывает, амплитуда колебаний второго увеличивается. Это будет продолжаться до тех пор, пока первый маятник не остановится, а второй не начнет раскачиваться с такой же амплитудой, как первый в самом начале. Затем маятники меняются ролями: второй раскачивает первый, и процесс полностью повторяется: маятники совершают то нарастающие, то убывающие колебания, и через определенное время T обмениваются энергией. Такие колебания называют *биениями* [21]. Решение (2.18) позволяет описать это явление и найти время T перехода энергии от одного маятника к другому.

Зададим начальные условия, отвечающие приведенному выше описанию

$$\varphi_1(0) = a, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0 \quad (2.22)$$

и воспользуемся алгоритмом (2.8) отыскания неизвестных постоянных C_j и ψ_j ($j = 1, 2$) из (2.18). Подстановка (2.22) в (2.18) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} C_1 \cos \psi_1 + C_2 \cos \psi_2 &= a, & C_1 \cos \psi_1 - C_2 \cos \psi_2 &= 0, \\ C_1 \omega_1 \sin \psi_1 + C_2 \omega_2 \sin \psi_2 &= 0, & C_1 \omega_1 \sin \psi_1 - C_2 \omega_2 \sin \psi_2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$C_1 = C_2 = a/2, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0. \quad (2.23)$$

В соответствии с (2.18), (2.23), решение уравнений малых колебаний маятников, отвечающее начальным условиям (2.22), имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = a \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t, \\ \varphi_2(t) &= \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = a \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Полученные зависимости $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ описывают биения (рис. 2.8, а) — убывание амплитуды колебаний первого маятника и постепенное возрастание амплитуды колебаний второго маятника. По истечении времени

$$T = \frac{\pi}{(\omega_2 - \omega_1)} \quad (2.25)$$

получим $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = a$, $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\dot{\varphi}_2 = 0$, т.е. энергия первого маятника целиком перейдет ко второму маятнику, и, далее, начнется переход энергии в обратном направлении. При значениях

$$\chi = \frac{kh^2}{mgl} \ll 1 \quad (2.26)$$

(на установке практикума это условие будет выполнено при выборе малых по сравнению с ℓ значений h) из (2.16) и (2.25) с погрешностью $O(\chi^2)$ следует $T \approx \pi/\omega_1\chi$, откуда получаем неравенство $T \gg T_1$, где $T_1 = 1/\omega_1 = \sqrt{\ell/g}$ — характерное время синфазных колебаний маятников (см. раздел 1.2). При $\chi \rightarrow 0$ имеем $T \rightarrow \infty$.

Рассмотрим движение маятников при произвольных начальных условиях. Эксперимент показывает, что в этом случае также происходит обмен энергией: если амплитуда колебаний первого маятника нарастает, то амплитуда колебаний второго маятника будет убывать. В отличие от случая (2.22), амплитуда колебаний маятников не обращается в нуль (рис. 2.8, б).

Отмеченное свойство нетрудно описать, если провести в (2.18) замену

$$\begin{aligned} \omega_1 t - \psi_1 &= \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\psi_2 + \psi_1)}{2} - \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\psi_2 - \psi_1)}{2} \\ \omega_2 t - \psi_2 &= \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\psi_2 + \psi_1)}{2} + \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\psi_2 - \psi_1)}{2} \end{aligned}$$

приводящую зависимости $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ к виду

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= (C_1 + C_2) \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\psi_2 + \psi_1)}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\psi_2 - \psi_1)}{2} + \\ &+ (C_1 - C_2) \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\psi_2 + \psi_1)}{2} \cdot \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\psi_2 - \psi_1)}{2}, \\ \varphi_2(t) &= (C_1 + C_2) \sin \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\psi_2 + \psi_1)}{2} \cdot \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\psi_2 - \psi_1)}{2} + \\ &+ (C_1 - C_2) \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t - (\psi_2 + \psi_1)}{2} \cdot \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t - (\psi_2 - \psi_1)}{2}. \end{aligned}$$

Согласно этим формулам время перехода энергии от одного маятника к другому, в течение которого амплитуда их колебаний изменяется от максимального до минимального значений, как и в случае (2.22), определяется выражением (2.25). Таким образом, способ возбуждения колебаний маятников определяет пределы изменения амплитуды их колебаний, но не влияет на период ее изменения.

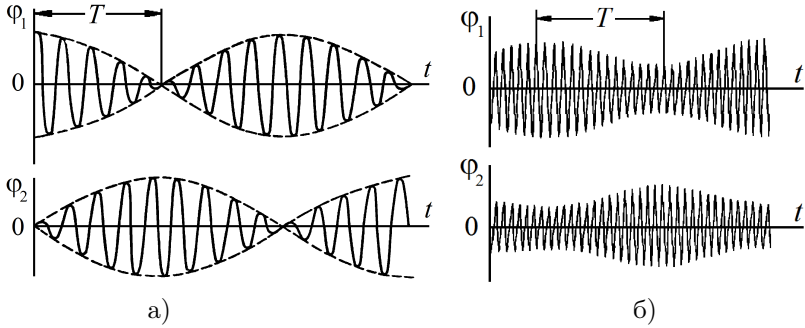


Рис. 2.8. Биения связанных маятников (а) и их движение при произвольных начальных условиях (б) [2]

2.3. Влияние периодических сил на малые колебания консервативной системы с двумя степенями свободы

Рассмотрим систему из раздела 2.1, предполагая дополнительно, что на нее действуют возмущающие периодические силы, которым отвечает вектор обобщенных сил

$$\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), Q_2(t))^T, \quad Q_j(t+T) = Q_j(t) \quad (j = 1, 2).$$

Уравнения (2.4) малых колебаний системы принимают вид

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(t), \quad (2.27)$$

где, как и ранее, $\mathbf{A} = \|a_{js}\|$ и $\mathbf{C} = \|c_{js}\|$ ($j, s = 1, 2$) — постоянные, симметрические, положительно определенные матрицы.

Будем считать, что правая часть (2.27) может быть представлена рядом Фурье

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \mathbf{a}_{\kappa} \cos \kappa \omega t + \mathbf{b}_{\kappa} \sin \kappa \omega t, \quad \omega = 2\pi/T, \quad (2.28)$$

где \mathbf{a}_{κ} и \mathbf{b}_{κ} — постоянные двумерные векторы. Отсчет ведется от $\kappa = 1$, т. е. постоянный вектор отвечающий нулевому члену разложения $\mathbf{Q}(t)$ в ряд Фурье, отсутствует. Это предположение можно принять без ограничения общности, поскольку при наличии такого вектора \mathbf{c}_0 замена $\mathbf{q} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{c}_0 + \tilde{\mathbf{q}}$ приводит рассматриваемую систему к виду (2.27), (2.28) относительно переменной $\tilde{\mathbf{q}}$.

Общее решение линейной неоднородной системы (2.27) складывается из общего решения (2.5) однородной системы (2.4) (свободных колебаний)¹⁾ и частного решения неоднородной системы

¹⁾О вынужденных колебаниях как об установившихся можно говорить только при условии затухания свободных колебаний, т. е. при наличии трения. Оно, конечно, есть в любой реальной системе, поэтому, как и в разделе 1.3, мы судим о поведении системы при $t \rightarrow \infty$, исходя из свойств ее вынужденных колеба-

(вынужденных колебаний) — суммы решений, отвечающих каждому из слагаемых разложения (2.28). В силу однотипности этих слагаемых, для того чтобы получить представление о свойствах вынужденных колебаний, достаточно рассмотреть воздействие

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{a} \cos \omega t, \quad (2.29)$$

так называемой *основной частоты*, отвечающее $\kappa = 1$, где \mathbf{a} — постоянный вектор¹⁾.

Ограничимся важным для практики случаем, когда периодическое воздействие прикладывается только по одной из координат (вектор \mathbf{a} содержит одну нулевую компоненту), и частота ω возмущающей силы не совпадает ни с одной из собственных частот ω_1, ω_2 свободной системы (2.4). Вынужденные колебания системы (2.27), (2.29) имеют вид

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} \cos \omega t, \quad \tilde{\mathbf{q}} = (A_1, A_2)^T = \text{const}. \quad (2.30)$$

Изложим алгоритм отыскания компонент вектора $\tilde{\mathbf{q}}$, приняв для определенности, что периодическое воздействие прикладывается по координате q_1 : $\mathbf{a} = (a, 0)^T$. Подставив (2.30) в (2.27), (2.29) и сократив обе части каждого из полученных уравнений на $\cos \omega t$, приходим к системе линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} (c_{11} - a_{11}\omega^2) A_1 + (c_{12} - a_{12}\omega^2) A_2 &= a, \\ (c_{12} - a_{12}\omega^2) A_1 + (c_{22} - a_{22}\omega^2) A_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

откуда, используя правило Крамера, получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\begin{vmatrix} a & c_{12} - a_{12}\omega^2 \\ 0 & c_{22} - a_{22}\omega^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a(c_{22} - a_{22}\omega^2)}{\Delta}, \\ A_2 &= \frac{\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}\omega^2 & a \\ c_{12} - a_{12}\omega^2 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-a(c_{12} - a_{12}\omega^2)}{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\Delta = |\mathbf{C} - \mathbf{A}\omega^2| = (c_{11} - a_{11}\omega^2)(c_{22} - a_{22}\omega^2) - (c_{12} - a_{12}\omega^2)^2.$$

Для случая $\mathbf{a} = (0, a)^T$, когда периодическое воздействие прикладывается по координате q_2 , после перестановки в (2.32) индексов 1 и 2 и учета симметрии матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} получаем

ний, которые для случая малого трения схожи со свойствами вынужденных колебаний системы без трения. Свойства малых свободных и вынужденных колебаний механических систем с вязким трением обсуждаются в § 7.

¹⁾Вынужденные колебания системы (2.27), для $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{a} \sin \omega t$ получаются из вынужденных колебаний, отвечающих воздействию (2.29), сдвигом начала отсчета времени на $\pi/(2\omega)$.

$$A_1 = \frac{-a(c_{12} - a_{12}\omega^2)}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{a(c_{11} - a_{11}\omega^2)}{\Delta}. \quad (2.33)$$

Из (2.30) и выражений для A_2 из (2.32) и для A_1 из (2.33) следует равенство $q_2 = q_1$, выражающее *принцип взаимности*: одинаковые внешние периодические воздействия, прикладываемые только по одной из координат, вызывают одинаковые отклики невозмущаемых координат.

Поскольку вынужденные колебания системы записываются в виде (2.30), который, в отличие от (1.26) при $\varepsilon = 0$, не включает выражение для сдвига фаз ψ вынужденного колебания и возмущающей силы, эту «нагрузку» принимает на себя функция $A_j(\omega)$ ($j = 1, 2$) — «амплитуда», которая теперь может изменять знак. Согласно (2.29), (2.30), (2.32) и (2.33) при $A_j > 0$ вынужденные колебания j -й обобщенной координаты q_j происходят в фазе с периодическим воздействием $\mathbf{Q}(t)$ ($\psi = 0$); при $A_j < 0$ эти колебания совершаются в противофазе с воздействием $\mathbf{Q}(t)$ ($\psi = \pi$).

Выражение для определителя Δ системы (2.31) совпадает с левой частью уравнения (2.6) частот свободной системы (2.4). При $\omega \rightarrow \omega_j$ ($j = 1, 2$), имеем $\Delta \rightarrow 0$, что, согласно (2.30), (2.32) или (2.33) говорит о том, что в системе (2.27), (2.28) с двумя степенями свободы могут возникнуть два резонанса, когда $q_1, q_2 \rightarrow \infty$ ¹⁾. Но эти резонансы только возможны, поскольку может оказаться, что при $\omega \rightarrow \omega_j$ стремятся к нулю один или оба числителя выражений (2.32) или (2.33). Этим системы с несколькими степенями свободы отличаются от систем с одной степенью свободы (см. раздел 1.3), где при отсутствии вязкого трения и совпадении частоты возмущающей силы с собственной частотой свободной системы всегда возникает резонанс (рис. 5.2, а при $\varepsilon = 0$ и $\omega = 1$).

При $\omega \approx \omega_j$ ($j = 1, 2$) из системы (2.7), записанной в координатной форме, и (2.32), (2.33) следует приближенное выражение

$$\frac{A_1}{A_2} \approx -\frac{c_{22} - a_{22}\omega_j^2}{c_{12} - a_{12}\omega_j^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}\omega_j^2}{c_{11} - a_{11}\omega_j^2} = \frac{h_{1j}}{h_{2j}},$$

которое показывает, что при близких к резонансным значениям частоты возмущающей силы амплитуды вынужденных колебаний переменных q_1 и q_2 можно приближенно считать пропорциональными компонентам соответствующего ω_j вектора $\mathbf{h}_j = (h_{1j}, h_{2j})^\top$ соб-

¹⁾О неограниченном возрастании $|q_j|$ на основании линейной постановки задачи говорить не приходится. После того, как значения q_j станут близки к конечным, следует переходить к анализу их изменения в силу нелинейной модели вынужденных колебаний.

ственной формы колебаний свободной системы (2.4). Это свойство нередко используется при экспериментальном отыскании главных форм малых колебаний консервативных систем.

В соответствии с (2.30) и первым выражением (2.32) при выполнении условия

$$c_{22} - a_{22}\omega^2 = 0, \quad (2.34)$$

т. е. при совпадении частоты ω возмущающей силы с парциальной частотой $\omega_{q_2} = \sqrt{c_{22}/a_{22}}$ колебаний свободной системы (2.4), несмотря на прикладываемое периодическое воздействие по координате q_1 , имеем $q_1 = 0$: отклик системы по этой координате отсутствует. Как указывалось при обсуждении физического смысла парциальных частот (2.9), выражение ω_{q_2} представляет собой частоту колебаний свободной системы (2.4) со связью

$$q_1 = 0. \quad (2.35)$$

Эффект отсутствия отклика координаты q_j системы (2.27), (2.29) на прикладываемое по этой координате периодическое воздействие называется *динамическим гашением колебаний* или *антирезонансом*. Полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. При периодическом воздействии, прикладываемом только по координате q_j , динамическое гашение колебаний — выполнение равенства

$$q_j = 0 \quad (2.36)$$

происходит при совпадении частоты ω воздействия с собственной частотой соответствующей (2.27), (2.29) однородной системы (2.4) со связью (2.36).

Это утверждение справедливо для систем с любым числом степеней свободы¹⁾.

Из (2.30) и второго выражения (2.32) при выполнении условия (2.34) динамического гашения колебаний получим

$$q_2 = \frac{a}{c_{12} - a_{12}\omega^2} \cos \omega t. \quad (2.37)$$

Из уравнений системы (2.27), (2.29) и формул (2.35), (2.37) следует физическая интерпретация этого результата: по координате q_1 система создает воздействие $a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2 \equiv a \cos \omega t$, в точности компенсирующее внешнее воздействие $Q_1(t) = a \cos \omega t$, по координате q_2 , где отсутствует внешнее воздействие, система создает нулевой отклик.

¹⁾При выполнении условия динамического гашения колебаний амплитуда изменения координаты q_j в системе с трением будет малой, но отличной от нуля (см. раздел 7.3.)

График функции $A_1(\omega)$, обладающий свойствами обсуждаемых в разделе 1.3 амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик системы с одной степенью свободы, показан на рис. 2.9, а. При $a > 0$ и $\omega = 0$ в силу положительной определенности матрицы \mathbf{C} имеем $A_1 = ac_{22}/|\mathbf{C}| > 0$, тогда при $\omega < \omega_1$ с учетом непрерывности, неравенств (2.11) и рис. 2.1 получим $c_{22} - a_{22}\omega^2 > 0$, т.е. здесь $A_1 > 0$ — вынужденное колебание происходит в фазе с возмущающей силой. При $\omega \rightarrow \omega_1$ имеем $A_1 \rightarrow +\infty$. В области $\omega_1 < \omega < \omega_2$ верно неравенство $\Delta < 0$ (см. рис. 2.1), следовательно, для $\omega \rightarrow \omega_1$ получим $A_1 \rightarrow -\infty$, при возрастании ω на интервале $\omega_1 < \omega < \omega_{q_2}$ амплитуда вынужденного колебания уменьшается, оно происходит в противофазе с возмущающей силой. После перехода через антирезонансное значение $\omega = \omega_{q_2}$ выполняется неравенство $c_{22} - a_{22}\omega^2 < 0$, то есть в области $\omega_{q_2} < \omega < \omega_2$ вынужденное колебание происходит в фазе с возмущающей силой, для $\omega \rightarrow \omega_2$ имеем $A_1 \rightarrow +\infty$. При $\omega > \omega_2$ в силу рис. 2.1 верно неравенство $\Delta > 0$ — вынужденное колебание находится в противофазе с возмущающей силой, для $\omega \rightarrow \omega_2$ получаем $A_1 \rightarrow -\infty$, при увеличении ω амплитуда вынужденного колебания монотонно уменьшается до нуля.

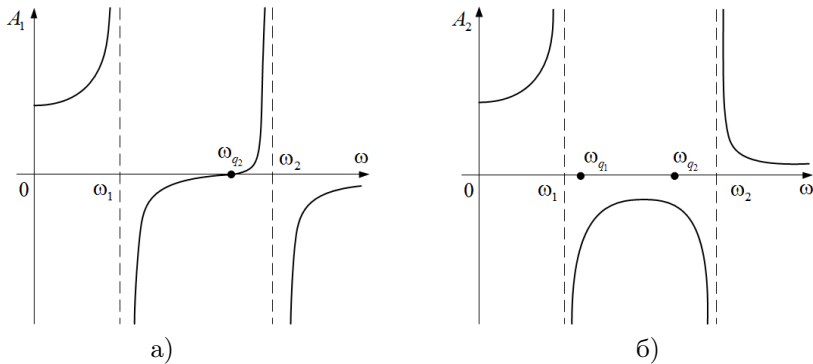


Рис. 2.9. Зависимости «амплитуд» вынужденных колебаний от частоты периодического воздействия в системе с двумя степенями свободы по возмущаемой координате q_1 (а) (общий случай) и по невозмущаемой координате q_2 (случай $c_{12} < 0, a_{12} = 0$) (б) [20]

График функции $A_2(\omega)$, за исключением обсуждаемых выше асимптотических свойств при $\omega \rightarrow \omega_1$ или $\omega \rightarrow \omega_2$, не имеет общих закономерностей, поскольку смена знаков числителя второго выражения (2.32) определяется значениями параметров системы. На

рис. 2.9, б в качестве примера показан график $A_2(\omega)$ для случая $c_{12} < 0$, $a_{12} = 0$, отвечающего системе (2.14).

2.4. Динамический гаситель колебаний

Изложенная в разделе 2.3 теория помогает сформировать алгоритм устранения нежелательных колебаний линейной упругой системы с одной степенью свободы $q = q_1$, возникающих под действием периодического возмущения $Q(t) = a \cos \omega t$ постоянной амплитуды и частоты.

Число степеней свободы системы искусственным образом увеличивают, присоединяя к ней еще одну линейную упругую систему с одной степенью свободы (обозначим ее q_2). Полученная расширенная система описывается двумерным вектором $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$ обобщенных координат, уравнения ее колебаний имеют вид (2.27), (2.29), где $\mathbf{a} = (a, 0)^T$. Параметры присоединяемой упругой системы — *динамического гасителя колебаний* — выбирают так, чтобы частота ω^* малых свободных колебаний расширенной системы после наложения на нее связи (2.35), запрещающей изменение обобщенной координаты q_1 , удовлетворяла условию

$$\omega^* = \omega. \quad (2.38)$$

При его выполнении колебания исходной системы с одной степенью свободы прекращаются, а колебания присоединяемой упругой системы происходят в соответствии с формулой (2.37), как правило, достаточно интенсивно.

Обсудим работоспособность предложенного алгоритма на примере динамического гашения колебаний удерживаемого пружиной перевернутого маятника под действием возмущающей силы \mathbf{F} , проекция которой на горизонтальное направление изменяется по закону $P \cos \Omega t$ (рис. 1.5), считая трение в оси опоры маятника пренебрежимо малым. Уравнение малых колебаний маятника около верхнего положения равновесия получается из (1.20) при $b = 0$. Как было показано в разделе 1.3, в случае

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{kh^2}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}}$$

колебания маятника близки к резонансным: их амплитуда будет нарастать, что приводит к увеличению передаваемой на пружину нагрузки.

Динамическим гасителем колебаний маятника может служить перевернутый маятник, представляющий собой массу m_2 , закрепленную на конце гибкого однородного стержня (будем считать стержень невесомым). Значение жесткости k_2 стержня

таково, что верхнее положение равновесия маятника устойчиво. Длину ℓ_2 стержня можно изменять, сдвигая его вниз или вверх внутри отверстия, которое проделано внутри массы m на конце первого маятника. Полученная расширенная система двух связанных перевернутых маятников показана на рис. 2.10, а. Для соответствия обозначений, принятых при записи уравнения (1.20) для $b = 0$, с обозначениями этого раздела здесь принято $m = m_1$, $k = k_1$, $\ell = \ell_1$. Обобщенные координаты расширенной системы — углы $\varphi = \varphi_1$ и φ_2 отклонения первого и второго маятников от верхнего положения считаются малыми. Зафиксируем частоту Ω вынуждающей силы и определим значения параметров второго маятника, обеспечивающие выполнение условия

$$\varphi_1 = 0. \quad (2.39)$$

Расширенная система со связью (2.39), запрещающей отклонение первого маятника, в данном случае представляет собой второй маятник с закрепленной точкой опоры (рис. 2.10, б). Из уравнения его малых колебаний около верхнего положения равновесия

$$m_2 \ell_2^2 \ddot{\varphi}_2 + (k_2 - m_2 g \ell_2) \varphi_2 = 0$$

получим выражение для частоты этих колебаний

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k_2}{m_2 \ell_2^2} - \frac{g}{\ell_2}}.$$

Согласно (2.38) динамическое гашение колебаний первого маятника произойдет при выполнении условия $\omega^* = \Omega$.

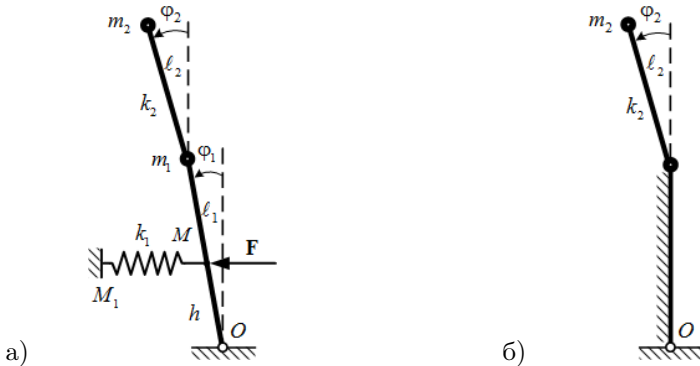


Рис. 2.10. Расширенная система (а) и она же после наложения связи $\varphi_1 = 0$ (б)

Может показаться, что динамический гаситель позволяет избежать всех нежелательных вибраций. Однако у любого гасителя

есть серьезный недостаток: он способен устранять колебания лишь строго фиксированной частоты ω возмущающей силы. Ее изменение приведет к нарушению условия (2.38) и присоединяемая упругая система утратит свойства гасителя, более того, если ω попадет в область резонансных частот расширенной системы, то амплитуда колебаний исходной системы начнет увеличиваться. Именно поэтому неправильно загруженная стиральная машина (разумеется, оснащенная гасителями) иногда начинает «прыгать» по полу. В технике используются управляемые виброгасители, обеспечивающие борьбу с вибрациями в широком диапазоне частот возмущающей силы. Если частота изменяется, то система управления автоматически преобразует параметры гасителя, что приводит к соответствующему (2.38) изменению ω^* .

§3. Выполнение работы

3.1. Свободные и вынужденные колебания линейных систем с одной степенью свободы

1. Создав свободные колебания маятника, найти число s «периодов», в течение которых максимальная амплитуда его отклонения от положения равновесия уменьшилась в $N = 2$ раза, и вычислить значение ε безразмерного коэффициента момента вязкого трения в оси подвеса маятника по формуле (1.15). Измерить длину ℓ маятника линейкой и определить значение размерного коэффициента b момента вязкого трения для заданной массы маятника $m = 1,452$ кг из второй формулы (1.6). При помощи разложения (1.11), второй формулы (1.13) и формул (1.16), (1.17) найти логарифмический декремент колебаний маятника, число колебаний в одну и ту же сторону, совершаемое маятником до их «затухания», и характерное время «затухания» колебаний.

2. Используя установку, создающую вынужденные колебания удерживаемого пружиной перевернутого маятника, найти его статическое отклонение — безразмерное значение a амплитуды возмущающей силы из (1.21), приближенно равное амплитуде колебаний маятника при малых значениях частоты возмущающей силы, и резонансную амплитуду его отклонения. При помощи формулы (1.31)) и сделанных измерений определить значение ε безразмерного коэффициента момента вязкого трения в оси опоры маятника.

Указание. При небольших значениях угла φ отклонения маятника от верхнего положения удобно измерять смещение x конца S стержня в горизонтальном направлении, связанное с углом φ приближенным соотношением $x = \ell\varphi$ (ℓ — длина маятника).

качестве минимального и максимального смещений точки выбираются $x_{\min} = \ell a$ и $x_{\max} = \ell A_{\max}$ соответственно (см. формулу (1.31)). Тогда $\varepsilon = a/2A_{\max} = x_{\min}/2x_{\max}$.

3.2. Свободные и вынужденные колебания линейных систем с двумя степенями свободы

1. Определив парциальные частоты малых колебаний одинаковых связанных маятников для двух различных положений пружины, найти значение k ее жесткости с использованием формул (2.20), (2.21). Длины ℓ маятников и расстояния h_1, h_2 от точек их подвеса до точек крепления к ним пружин измеряются линейкой; массы маятников $m = 1,452$ кг.

Указание. Для того чтобы избежать значительных погрешностей при экспериментальном определении частоты измеряют время T_{10} десяти колебаний маятника, время одного колебания вычисляют по формуле $T = T_{10}/10$, частоту колебаний — по формуле $\eta = 2\pi/T$.

2. Проведя эксперимент, найти частоты синфазных и противофазных колебаний маятников. Сравнить полученные значения с теоретическими значениями ω_1, ω_2 собственных частот их колебаний, определенных выражениями (2.16) при найденном в задании 1 значении k .

3. Проведя эксперимент с начальными условиями (2.22), найти время T «перекачки» энергии в системе связанных маятников. Сравнить полученное значение с теоретическим значением T , определенным выражениями (2.16), (2.25) при найденном в задании 1 значении k .

§4. Задачи для самостоятельного решения

1. На рис. 4.1, а показаны графики процессов затухания свободных колебаний двух линейных осцилляторов, на рис. 4.1, б — амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний двух линейных осцилляторов. Сравните логарифмические декременты колебаний для каждого из процессов 1 и 2.

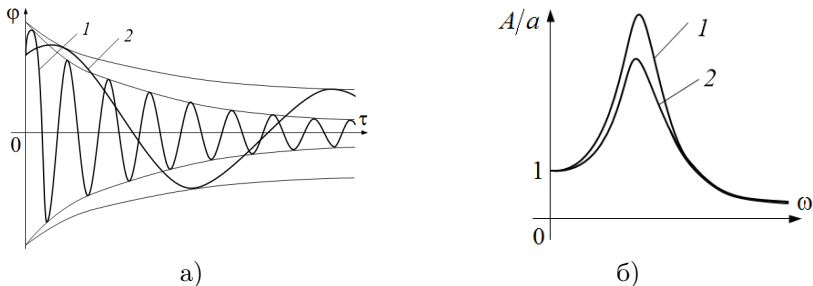


Рис. 4.1. Графики процессов затухания свободных колебаний двух линейных осцилляторов (а) [19] и АЧХ вынужденных колебаний (б)

2. Физический маятник образован двумя взаимно перпендикулярными жесткими однородными стержнями, имеющими массы m_1 , m_2 и длины l_1 , l_2 соответственно (рис. 4.2). В оси подвеса маятника присутствует вязкое трение. Составьте уравнение малых затухающих колебаний маятника вблизи нижнего положения равновесия и найдите их период. Определите коэффициент b момента вязкого трения, если известно, что за пять «периодов» максимальная амплитуда отклонения маятника от положения равновесия (в одну и ту же сторону) уменьшилась e раз.

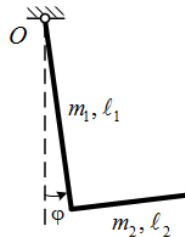


Рис. 4.2. Свободные колебания физического маятника с вязким трением

3. Механическая система образована телом массы m , соединенным пружиной жесткости k и демпфером вязкого трения с коэффициентом вязкости b с подвижным невесомым стержнем (рис. 4.3). Стержень совершает колебания относительно неподвижной системы координат Oxy по закону $\rho(t) = a_0 \cos \omega t$, где a_0 и ω — постоянные. Определите резонансные значения частоты и амплитуды колебаний тела и постройте зависимость амплитуды его колебаний от частоты ω колебаний стержня.

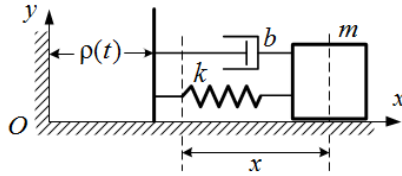


Рис. 4.3. Вынужденные колебания линейного осциллятора

4. Тела с одинаковыми массами m , скрепленные друг с другом и с неподвижным пространством пружинами с жесткостями k , k_1 и k (рис. 4.4), совершают малые колебания без трения вдоль горизонтальной прямой. Найдите главные формы малых колебаний системы, приняв за обобщенные координаты смещения x_1 , x_2 тел относительно их положения равновесия, и зависимости $x_1(t)$, $x_2(t)$ для начальных условий $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$. Обсудите физический смысл полученных зависимостей для случая $k_1 \ll k$ и постройте их графики.

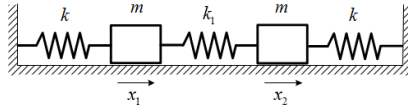


Рис. 4.4. Малые свободные колебания двухмассовой системы

5. Тела с массами m_1 и m_2 , скрепленные с неподвижным пространством и друг с другом пружинами с жесткостями k_1 и k_2 , совершают малые колебания без трения вдоль горизонтальной прямой под действием приложенной ко второму телу возмущающей силы \mathbf{F} , проекция которой на направление смещения тел изменяется по закону $a \cos \omega t$ (рис. 4.5). Заданы частоты ω_1 , ω_2 собственных колебаний системы и частота $\omega = \omega^*$ возмущающей силы, при которой второе тело будет оставаться неподвижным. Найдите значения отношений $\frac{m_1}{m_2}$, $\frac{k_1}{k_2}$ и $\frac{m_1}{k_1}$.

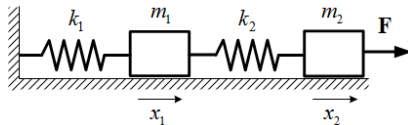


Рис. 4.5. Малые вынужденные колебания двух связанных гармонических осцилляторов

Приложение

§5. Методы малого параметра. Пренебрежение трением. Линейные и нелинейные колебания

5.1. Системы с малым параметром в правой части. Оценка погрешности невозмущенной системы

Основные теоремы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с малым параметром ε

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0, \varepsilon) = \mathbf{x}_0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5.1)$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени t ; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)^T$ — вектор переменных; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$ — вектор правых частей. Члены уравнений, содержащие малый параметр ε , называются *возмущениями*, а сами уравнения — *возмущенными по малому параметру*.

Теорема Пуанкаре о малом параметре дает достаточные условия, при выполнении которых решение $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ системы (5.1) на конечном интервале времени $0 \leq t \leq t'$ является аналитической функцией малого параметра, т. е. представимо сходящимся рядом

$$\mathbf{x}(t, \varepsilon) = \mathbf{x}^{(0)}(t) + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \mathbf{x}^{(2)}(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{x}^{(k)}(t), \quad (5.2)$$

где $\|\mathbf{x}^{(k)}(t)\|$ — ограниченные функции. Формулировку этой теоремы и способ отыскания коэффициентов ряда (5.2) можно найти в [6], то же и все необходимые доказательства — в книгах [2, 12].

Ниже приводятся формулировки теорем, позволяющих провести оценку рассогласования между решением $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ системы (5.1) и решением $\bar{\mathbf{x}}(t)$ порождающей по Пуанкаре системы уравнений, которая получается из (5.1) при $\varepsilon = 0$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.3)$$

на конечном и бесконечном интервалах времени¹⁾. Эти теоремы, как и теорема Пуанкаре, имеют достаточный характер. Автор не стремился дать «оптимальные» формулировки, поэтому некоторые из условий теорем могут быть ослаблены [2, 12].

¹⁾ Можно показать [2, 6, 12] что справедливо равенство $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}^0(t)$, где функция $\mathbf{x}^0(t)$ введена в (5.2).

Теорема 1. Пусть функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ непрерывна по t вместе со своими производными по \mathbf{x} , ε в области $D = \{\|\mathbf{x}\| \leq a, 0 \leq t \leq t'\}$; решение $\bar{\mathbf{x}}(t)$ порождающей системы (5.3) при $0 \leq t \leq t'$ существует, единственно и не выходит из области $\|\bar{\mathbf{x}}\| \leq a$. Тогда найдется постоянная $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$ ¹⁾, такая, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon'$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{x}(t, \varepsilon) - \bar{\mathbf{x}}(t)\| = O(\varepsilon) \quad (5.4)$$

При исследовании механических систем может оказаться, что время их движения превышает конечный интервал $0 \leq t \leq t'$ времени, на котором гарантируется выполнение оценки (5.4). В книге [12] сформулированы достаточные условия, при выполнении которых решение $\bar{\mathbf{x}}(t)$ порождающей системы (5.3) и может служить приближением для решения $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ системы (5.1) на бесконечном интервале времени.

Теорема 2. Пусть функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$ непрерывна по t и ограничена вместе со своими производными по \mathbf{x} и ε до второго порядка включительно в области $D = \{\|\mathbf{x}\| \leq a, 0 \leq t\}$; порождающая система (5.3) автономна²⁾, ее решение $\bar{\mathbf{x}}(t)$ существует, единственно и не выходит из области $\|\bar{\mathbf{X}}\| \leq a$; порождающая система имеет асимптотически устойчивую по первому приближению точку покоя, к которой при $t \rightarrow \infty$ стремятся все остальные решения этой системы с начальными условиями из D ; Тогда при достаточно малых ε оценка (5.4) справедлива на интервале времени $0 \leq t$.

Для случаев, когда условия теоремы 2 не выполняются, в [12] сформулированы достаточные условия, при выполнении которых решение $\bar{\mathbf{x}}(t)$ порождающей системы при $\varepsilon \rightarrow 0$ служит приближением для решения $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$ исходной, возмущенной системы на асимптотически больших интервалах времени вида $0 \leq t \leq t'/\varepsilon^\alpha$ и $0 \leq t \leq t' - \alpha \ln \varepsilon$. Диапазон значений постоянной $\alpha > 0$ определяется путем исследования нормы матрицы Коши [6] системы в малых отклонениях от решения порождающей системы. Точность приближения увязана с протяженностью временного интервала, так что происходит «размен точности на время». За счет увеличения α в найденном диапазоне можно расширить временной интервал, уменьшая при этом точность приближения, а увеличение

¹⁾При формулировках утверждений методов теории возмущений (асимптотических методов) часто коротко пишут так: при достаточно малых ε или при $\varepsilon \rightarrow 0$.

²⁾Система дифференциальных уравнений называется автономной, если ее правые части не зависят от времени t .

точности сокращает временной интервал, на котором она гарантируется³⁾.

В соответствии с теоремами 1 и 2 оценки точности порождающей системы справедливы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для фиксированных значений малого параметра, входящего в уравнения динамики, погрешность порождающей системы следует проконтролировать численно. Практика решения конкретных задач показывает, что оценка (5.4) остается справедливой и при достаточно «больших» значениях малого параметра [6, 18]. Например, если в ходе исследования было доказано, что при стремлении малого параметра к нулю погрешность порождающей системы — величина порядка этого малого параметра, то даже при малом параметре, равном 0,3, погрешность порождающей системы, как правило, имеет порядок 30%.

5.2. Пренебрежение нелинейными членами в уравнении свободных малых колебаний маятника с вязким трением

Проведем оценку погрешности, допускаемой при замене нелинейного уравнения (1.3) колебаний маятника линейным уравнением (1.5), воспользовавшись подходом фракционного анализа [6, 18]. Запишем (1.5) в виде (5.1) с малым параметром, характеризующим малость значений $|\varphi|$ угла отклонения маятника.

Перейдем к новой системе размерностей, за единицы которой приняты характерное время $t_* = \sqrt{\ell/g}$ малых колебаний маятника без трения и характерное значение $\varphi_* = \varepsilon_1 \ll 1$ его угла отклонения (φ_* — величина порядка максимальной амплитуды колебаний маятника). Для этого, как и ранее при анализе уравнения (1.5), разделим обе части уравнения (1.3) на mgl и проведем замену времени $t = \tau\sqrt{\ell/g}$ и, дополнительно, замену исходной переменной φ новой переменной ϕ по формуле $\varphi = \varepsilon_1\phi$. После указанных преобразований (1.3) принимает вид

$$\phi'' + 2\varepsilon\phi' + \frac{\sin(\varepsilon_1\phi)}{\varepsilon_1} = 0, \quad 2\varepsilon = \frac{b}{mgl t_*}.$$

Штрихом обозначено дифференцирование по времени τ .

Разлагая функцию $\sin(\varepsilon_1\phi)$ в ряд по ε_1 , получим уравнение

$$\phi'' + 2\varepsilon\phi' + \phi - \frac{\mu\phi^3}{3!} + \frac{\mu^2\phi^5}{5!} - \dots = 0, \quad 0 < \mu = \varepsilon_1^2 \ll 1 \quad (5.5)$$

которое после приведения к виду Коши имеет форму (5.1).

³⁾ Для прикладных задач, в которых малые параметры и рассматриваемые интервалы времени конечны, это означает, что уверенность в точности приближения распространяется на конечный временной интервал большей протяженности.

Будем далее считать параметр ε конечным и рассматривать уравнение (5.5) как уравнение с малым параметром μ . При $\mu = 0$ получим порождающее по Пуанкаре уравнение (безразмерный аналог (1.5))

$$\bar{\phi}'' + 2\varepsilon\bar{\phi}' + \bar{\phi} = 0, \quad (5.6)$$

с точностью до обозначения $\varphi = \bar{\phi}$ совпадающее с уравнением (1.6).

Уравнение (5.6) автономно. В силу (1.8) и (1.9) для любых отличных от нуля начальных условий при $\tau \rightarrow \infty$ получим $|\bar{\phi}| \rightarrow 0$, $|\bar{\phi}'| \rightarrow 0$. На основании теоремы 2 для решений уравнений (5.5) и (5.6) при $\tau \geq 0$, $\mu \rightarrow 0$ справедливы оценки $|\phi - \bar{\phi}| = O(\mu)$, $|\phi' - \bar{\phi}'| = O(\mu)$. Тем самым, при $|\varphi| \ll 1$ рассогласование между решениями уравнений (1.3) и (1.5) имеет порядок $O(\varphi_*^3)$ на интервале времени $t \geq 0$.

5.3. Переход к модели колебаний без трения

Предполагая вязкое трение достаточно малым, обсудим возможность пренебрежения малым параметром $\varepsilon \ll 1$ в уравнении (1.6) колебаний физического маятника. В соответствии с теоремой 1 рассогласование между решениями уравнения (1.6) при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$, описывающими малые колебания маятника с трением и без трения соответственно, является величиной $O(\varepsilon)$ на конечном интервале времени $\tau \sim 1$. Условия теоремы 2 о близости этих решений на бесконечном интервале времени не выполняются, поскольку, в соответствии с (1.9) для $\varepsilon = 0$, малые колебания маятника без трения происходят по гармоническому закону, с конечной амплитудой, то есть имеют незатухающий характер. Эти условия являются достаточными, но в рассматриваемом случае нетрудно видеть, что временной интервал, на котором решения уравнения (1.6) при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon = 0$ близки при $\varepsilon \rightarrow 0$, не может иметь неограниченную протяженность: в силу затухания колебаний маятника с трением при $\tau \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$) рассогласование между этими решениями станет конечной величиной порядка амплитуды гармонических колебаний маятника без трения. На практике предположением об отсутствии трения можно пользоваться на временных интервалах, порядка характерного времени τ^* затухания колебаний маятника, определенное выражением (1.17). Окончательный ответ на вопрос о протяженности этих интервалов при конкретных значениях параметра ε дают результаты численного эксперимента.

Аналогичные подходы используются при обосновании корректности пренебрежения трением в колебательных системах с произвольным числом степеней свободы.

Например, полученные в разделе 2.2 результаты об обмене энергией в системе связанных маятников можно применять на практике лишь в случаях, когда трение в системе достаточно мало. Время T перехода энергии от одного маятника к другому из (2.25) должно быть существенно меньше $T^* = \tau^* \sqrt{l/g}$ — размерного аналога характерного времени τ^* (см. (1.17)) затухания колебаний в каждой из парциальных систем, отвечающих (2.14) при учете трения, после наложения связей $\varphi_2 = 0$ и $\varphi_1 = 0$ соответственно. В противном случае колебания одного из маятников затухнут прежде, чем он успеет раскачать другой маятник. Качественные графики колебаний маятников с затуханием в случае $T^* \ll T$ показаны на рис. 5.1.

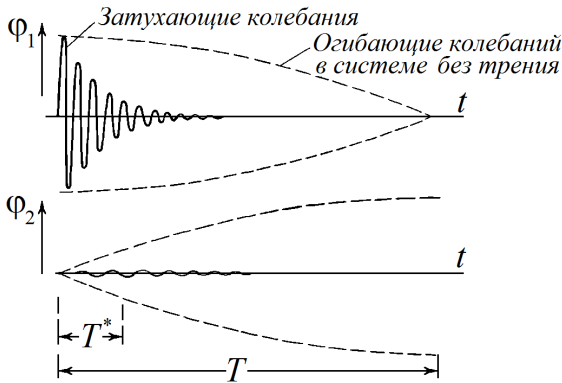


Рис. 5.1. Сопоставление времени перехода энергии от одного маятника к другому и характерного времени затухания колебаний [20]

Обсудим ряд свойств нелинейных колебаний, не описываемых линейной моделью.

5.4. Особенности нелинейных колебаний маятниковых систем при отсутствии трения

Частота колебаний гармонического осциллятора зависит только от его параметров и не связана с амплитудой. Такие колебания называют *изохронными*. Колебания в силу соответствующего нелинейного уравнения неизохронны: их частота зависит от амплитуды, определяемой начальными условиями. Покажем это на примере колебаний маятника без трения. Нелинейная модель его динамики получается из (1.3) при $b = 0$:

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (5.7)$$

После линеаризации (5.7) в окрестности положения равновесия $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ приходим к уравнению гармонического осциллятора

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + mg\ell\varphi = 0,$$

описывающему колебания маятника с постоянным периодом $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

Величина нелинейного возвращающего момента силы тяжести $|M| = mg\ell|\sin\varphi|$ с ростом $|\varphi|$ остается меньше величины $mg\ell|\varphi|$ линейного аналога этого момента. Поэтому период колебаний нелинейной модели маятника превосходит (а частота колебаний остается меньше) своего линейного аналога.

Оценить пределы возрастания периода либрационных колебаний¹⁾ маятника — движений без проворота вокруг оси вращения можно при помощи метода фазовой плоскости. Для упрощения исследования, как и выше при переходе от (1.5) к (1.6), введем безразмерное время τ , связанное с исходным временем t формулой $t = \tau\sqrt{l/g}$. Тогда (5.7) примет вид

$$\varphi'' + \sin\varphi = 0, \quad (5.8)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по времени τ .

Фазовый портрет уравнения (5.8), построенный путем анализа его интеграла энергии (см., например, [4, 6, 11, 13])

$$\frac{\varphi'^2}{2} - \cos\varphi = c, \quad c = \text{const}, \quad (5.9)$$

показан на рис. 5.2 (ввиду 2π -периодичности слагаемых уравнения (5.8) по φ достаточно рассмотреть значения $\varphi \in [-\pi; \pi]$). Либрационным колебаниям маятника соответствуют замкнутые траектории, расположенные внутри *сепаратрис* — кривых, которые соединяют точки $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$, отвечающие его верхнему неустойчивому положению равновесия. Этим замкнутым траекториям, после прохождения которых значения переменных φ и φ' будут такими же, какими они были в начале, соответствуют периодические движения (покачивания) маятника.

Поскольку период движения изображающей точки фазовой плоскости по сепаратрисе (ее уравнение получается из (5.9) при $c = 1$) бесконечен²⁾, в силу непрерывности, период движения по кривым, близким к сепаратрисе, стремится к бесконечности.

¹⁾От лат. *libra* — равновесие.

²⁾Система может попасть в положение равновесия только за бесконечное время. Действительно, предположив, что время попадания в положение равновесия конечно, после замены времени τ на $-\tau$ получим, что в обратном времени система за то же конечное время покидает положение равновесия. Это

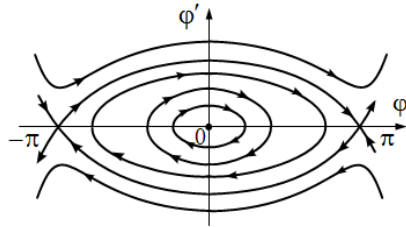


Рис. 5.2. Фазовый портрет маятника без трения

Оценка увеличения периода малых неизохронных колебаний маятника с ростом их начальной амплитуды приведена в [18] (см. также [6]) путем анализа коэффициентов ряда (5.2).

Тем самым, даже при задании близких начальных условий по истечении времени разность фаз колебаний двух расположенных рядом маятников будет конечной величиной, что можно увидеть из эксперимента, для наглядности создав колебания с относительно «большими» амплитудами.

Проиллюстрируем особенности нелинейных колебаний системы связанных маятников. Эксперимент показывает, что наблюдаемые в линейной системе (2.14) периодические движения, отвечающие синфазным и противофазным колебаниям, существуют и при «больших» начальных значениях углов и угловых скоростей отклонения маятников. Нелинейная модель, которая получается при подстановке в (2.3) исходной, нелинейной функции Лагранжа $L = T - \Pi$, вычисляемой с использованием формул (2.12), позволяет построить уравнения этих колебаний, описывающие ее частные решения.

Подставив в выражение для L равенство $\varphi_1 = \varphi_2$, приходим к уравнению синфазных колебаний маятников

$$m\ell^2 \ddot{\varphi}_1 + mg\ell \sin \varphi_1 = 0, \quad (5.10)$$

совпадающему с (5.7).

Для $\varphi_1 = -\varphi_2$ получим нелинейное уравнение противофазных колебаний

$$m\ell^2 \ddot{\varphi}_1 + mg\ell \sin \varphi_1 + kh^2 \sin 2\varphi_1 = 0. \quad (5.11)$$

В линейном приближении (5.10) и (5.11) переходят в уравнения малых колебаний моделей, показанных на рис. 2.5, б и рис. 2.6, б соответственно.

невозможно, так как в положении равновесия система находится бесконечно долго.

Теоретическому изучению нелинейных колебаний связанных маятников для случая $\chi \ll 1$, где χ определено в (2.26), и произвольных начальных условий и для случая произвольных значений χ и малых амплитуд колебаний маятников около нижнего положения равновесия, а также вопросам орбитальной устойчивости¹⁾ режимов синфазных и противофазных колебаний и бифуркациям (качественным изменениям) режима противофазных колебаний посвящены работы [14–16]. Перечислим полученные них результаты для случая малых амплитуд колебаний маятников около нижнего положения равновесия.

При $\chi \ll 1$ режим синфазных колебаний орбитально устойчив, если их амплитуда A не превосходит некоторое критическое значение, в противном случае имеет место неустойчивость, связанная с появлением в окрестности нижнего положения равновесия еще двух орбитально устойчивых периодических режимов движения маятников, отличных от синфазных и противофазных колебаний.

При увеличении χ режим синфазных колебаний делается орбитально устойчивым в диапазонах, с погрешностью $O(A/\ell)^2$ задаваемых неравенствами

$$\frac{1}{2}(N^2 - 1) < \chi < \frac{1}{2}((N + 1)^2 - 1), \quad N = 1, 2, \dots$$

Для малых амплитуд режим противофазных колебаний маятников

¹⁾Понятие орбитальной устойчивости связано с близостью траекторий автономной системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)^T$; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)^T \in C^1$, в фазовом пространстве \mathbf{x} . Решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ этой системы, рассматриваемое в области $D = \{\|\mathbf{x}\| \leq a, 0 \leq t\}$, называется *орбитально устойчивым* [6, 9], если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для всех решений $\mathbf{x}(t)$ системы, отвечающих условию $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)\| < \delta$, при $0 \leq t$ справедливо неравенство $\rho(\Gamma, \Gamma^*) < \varepsilon$. Здесь Γ и Γ^* – проекции решений $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{x}^*(t)$ в фазовое пространство \mathbf{x} ; $\rho(\Gamma, \Gamma^*) = \inf_{\mathbf{y} \in \Gamma^*} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ – расстояние между траекториями Γ и Γ^* . (Для задачи о свободных нелинейных колебаниях физического маятника без трения кривым Γ отвечают траектории фазового портрета, показанные на рис. 5.2). Для сравнения определений орбитальной устойчивости и устойчивости по Ляпунову напомним последнее. Решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ называется устойчивым по Ляпунову [9], если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для всех решений $\mathbf{x}(t)$ системы, отвечающих условию $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*(0)\| < \delta$, при $0 \leq t$ справедливо неравенство $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$.

Из устойчивости решения $\mathbf{x}^*(t)$ следует его орбитальная устойчивость, но обратное неверно. Различие этих определений можно проиллюстрировать, проведя эксперимент со связанными маятниками, где орбитальная устойчивость режимов синфазных или противофазных колебаний наблюдается следующим образом: амплитуды колебаний маятников будут оставаться близкими к амплитудам, отвечающим исследуемым режимам, а фазы колебаний – сдвигаться вследствие неизохронности (тем самым, устойчивость по Ляпунову не будет иметь места). Другие примеры, позволяющие выяснить различие между этими определениями, содержатся в [6, 9].

в случае малых колебаний орбитально устойчив при всех значениях χ .

§6. Теория малых колебаний

6.1. Постановка задачи. Нелинейные уравнения движения

Рассмотрим¹⁾ механическую систему с голономными стационарными идеальными связями, положение которой определяется вектором n независимых обобщенных координат $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$. Действующие на систему силы предполагаются потенциальными. Ее динамика описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{0}, \quad (6.1)$$

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \Pi(\mathbf{q}); \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}.$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени t ; L — функция Лагранжа системы; T — ее кинетическая энергия — положительно определенная квадратичная форма обобщенных скоростей; \mathbf{A} — матрица инерционных коэффициентов; Π — потенциальная энергия.

Как известно из курса теоретической механики, система (6.1) имеет интеграл энергии

$$E = T + \Pi = \text{const}, \quad (6.2)$$

т. е. является *консервативной*. Ее динамика отличается тем, что объем произвольной области фазового пространства $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ (так называемый *фазовый объем*) при изменении времени остается неизменным [6]²⁾.

С учетом выражения для L система (6.1) может быть записана в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \left(\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\mathbf{A} \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right) \dot{\mathbf{q}}.$$

Компоненты вектора $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (g_1, \dots, g_n)^T$ символов Кристоффеля образованы квадратичными по обобщенным скоростям слагаемыми.

¹⁾Материал этого раздела изложен в соответствии с [6]. Все необходимые теоретические сведения можно найти в учебниках [4, 8, 13].

²⁾Тем же свойством обладает обсуждаемая в разделе 1.2 модель колебаний маятника без трения, ее интеграл энергии дается формулой (5.9).

Пусть система (6.3) имеет изолированное положение равновесия³⁾

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Подстановка (6.4) в (6.3) приводит к равенству

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

Потребуем, чтобы положение равновесия (6.4) отвечало строгому локальному минимуму потенциальной энергии. В соответствии с теоремой Лагранжа в этом случае оно устойчиво¹⁾, следовательно, при достаточно малых начальных значениях $\|\mathbf{q}\|$, $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ они останутся малыми во все время движения системы.

6.2. Уравнения малых колебаний

Вывод уравнений малых колебаний. Рассмотрим движение системы вблизи положения равновесия (6.4) и проведем линеаризацию уравнений (6.3).

Предполагая $\Pi(\mathbf{q})$ аналитической функцией около положения равновесия, разложим ее в ряд Тейлора по малым компонентам вектора \mathbf{q}

³⁾Объект (положение равновесия, траектория и т. д.) называется *изолированным*, если у него существует окрестность, в которой отсутствуют другие объекты с теми же свойствами.

¹⁾**Теорема Лагранжа.** Если положение равновесия находится в точке $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, не совпадающей с началом координат, то следует провести замену переменных $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{q}^0$. Полученная система имеет положение равновесия $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}$.

Эта теорема дает достаточное условие устойчивости положения равновесия системы (6.2). В качестве пояснения ограничимся следующими рассуждениями. Выведем систему из положения равновесия, задав некоторые отличные от нуля значения переменных \mathbf{q} и $\dot{\mathbf{q}}$. При этом ее полная энергия (6.2) увеличится на величину ΔE относительно равновесного значения $E_0 = \Pi(\mathbf{0})$. Поскольку потенциальная энергия системы в положении равновесия имеет строгий локальный минимум, при отклонении от него $\Pi(\mathbf{q})$ увеличится. Тогда согласно (6.2) значение T , а, следовательно, и $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ должны уменьшиться. Границей возрастания $\Pi(\mathbf{q})$ служит значение $E_0 + \Delta E$ постоянной энергии системы. Тем самым, ΔE можно выбрать столь малой, что отклонения $\|\mathbf{q}\|$ и $\|\dot{\mathbf{q}}\|$ от положения равновесия будут меньше сколь угодно малых заданных значений. Отсюда следует устойчивость рассматриваемого положения равновесия. Строгое доказательство теоремы Лагранжа содержится в [13].

$$\Pi(\mathbf{q}) = \Pi(\mathbf{0}) + \left. \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right) \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left. \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \mathbf{q} + \dots$$

$$\left. \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_n^2} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Без ограничения общности можно считать $\Pi(\mathbf{0}) = 0$. В силу (6.5) второе слагаемое в разложении (6.6) обращается в нуль. Отбрасывая члены выше второго порядка малости по $\|\mathbf{q}\|$, обозначенные многоточием, получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad \mathbf{C} = \left. \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{q}^2} \right) \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}. \quad (6.7)$$

Симметрическая матрица \mathbf{C} называется *матрицей жесткости* (или *матрицей потенциальной энергии системы в положении равновесия*). Поскольку в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, в достаточно малой его окрестности справедливо неравенство $\Pi(\mathbf{q}) > 0$, следовательно, \mathbf{C} положительно определена. Из (6.7) следует равенство

$$\left. \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \right) \right|^T = \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (6.8)$$

Будем считать элементы матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ аналитическими функциями в окрестности положения равновесия. Линеаризованная для (6.3) система, получаемая после отбрасывания в разложении матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ в ряд Тейлора членов первого и более высоких порядков малости по $\|\mathbf{q}\|$, пренебрежения слагаемыми $\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ и учета (6.8), имеет вид

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{0}). \quad (6.9)$$

Уравнения системы (6.9) называются *уравнениями малых колебаний* системы. Они могут быть получены непосредственно из системы (6.1), если при записи потенциальной энергии использовать выражение (6.7), а при записи кинетической энергии — приближенное выражение

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{0}) \quad (6.10)$$

имеющее погрешность третьего порядка малости по $\|\mathbf{q}\|, \|\dot{\mathbf{q}}\|$. Тем самым, для того чтобы провести линеаризацию уравнений движения консервативной системы около устойчивого положения

равновесия, нужно оставить в разложении ее функции Лагранжа L только квадратичные слагаемые по малым обобщенным координатам и скоростям, т. е. привести ее к виду

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (6.11)$$

Проиллюстрируем полученные результаты на примере системы с одной степенью свободы ($n = 1$), положение которой определяется одной обобщенной координатой q . Функцией Лагранжа из (6.1) служит $L = A(q)\dot{q}^2/2 - \Pi(q)$ (A – коэффициент инерции), следовательно, (6.3) принимает форму

$$A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q}^2 + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0.$$

Сделанные предположения относительно свойств потенциальной энергии системы указывают на то, что действующая на нее потенциальная сила (момент) $f(q) = -\partial \Pi / \partial q$ является *восстанавливающей* (возвращающей) – стремится вернуть систему в положение равновесия. Действительно, согласно неравенству $C = \partial^2 \Pi / \partial q^2|_{q=0} = -\partial f / \partial q|_{q=0} > 0$ касательная к графику функции $f(q)$ в точке $q = 0$ имеет отрицательный коэффициент наклона, то есть при малых $q > 0$ справедливо неравенство $f(q) < 0$, при малых $q < 0$ – неравенство $f(q) > 0$. Аналогом системы (6.9) в этом случае служит уравнение, которое получается из (1.1) при $x = q$, $a = A$, $c = C$, $b = 0$, $\mathcal{F} = 0$.

Главные формы колебаний. Покажем, что система (6.9) может быть представлена в виде совокупности n уравнений колебаний гармонических осцилляторов. Это позволит далее обсудить структуру общего решения системы и алгоритм его нахождения.

Проведем в (6.9) замену переменных

$$\mathbf{q} = \mathbf{H} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad (6.12)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_n), \quad \mathbf{h}_j = (h_{1j}, \dots, h_{nj})^T \quad (j = 1, \dots, n),$$

где \mathbf{H} – постоянная невырожденная матрица. Умножив полученное уравнение слева на \mathbf{H}^T , будем иметь

$$\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (6.13)$$

Как известно [7], в случае, когда одна из пары квадратичных форм $\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{q}$ и $\mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q}$ положительно определена (в рассматриваемом случае обе эти формы положительно определены), существует невырожденная замена переменных, приводящая их к сумме квадратов. Это означает, что можно выбрать матрицу \mathbf{H} так, чтобы выполнялись равенства

$$\mathbf{H}^T \mathbf{A} \mathbf{H} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H} = \text{diag} \{ \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2 \}. \quad (6.14)$$

(Поскольку \mathbf{C} положительно определена, все диагональные элементы матрицы $\mathbf{H}^T \mathbf{C} \mathbf{H}$ положительны. Они обозначены $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$.)

В соответствии с (6.13) и (6.14), замена переменных (6.12) приводит (6.9) к системе n независимых уравнений

$$\ddot{x}_j + \omega_j^2 x_j = 0 \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

Переменные x_j называются *нормальными координатами* консервативной системы (6.9).

Решением уравнений (6.15) являются гармонические колебания

$$x_j = C_j \cos(\omega_j t - \psi_j) \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.16)$$

где постоянные C_j, ψ_j определяются начальными условиями $\mathbf{q}(0)$ и $\dot{\mathbf{q}}(0)$. Алгоритм их отыскания будет изложен ниже.

Подставив (6.16) в (6.12) и учитывая обозначения для столбцов матрицы \mathbf{H} из (6.12), получим общее решение системы (6.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) = C_1 \mathbf{h}_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + C_2 \mathbf{h}_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) + \dots \\ \dots + C_n \mathbf{h}_n \cos(\omega_n t - \psi_n). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Его составляющие $C_j \mathbf{h}_j \cos(\omega_j t - \psi_j)$ ($j = 1, \dots, n$) называются *главными формами малых колебаний* системы (6.9).

При практическом отыскании главных форм колебаний поступают следующим образом. Решение системы (6.9) ищется в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{h} \cos(\omega t - \psi). \quad (6.18)$$

Выражение (6.18) — составляющая общего решения (6.17) и в силу линейности системы (6.9) должна удовлетворять ей при любых t . Сократив обе части уравнения, получаемого после подстановки (6.18) в (6.9), на $\cos(\omega t - \psi)$, приходим к линейному однородному уравнению относительно компонент вектора \mathbf{h}

$$(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}) \mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad \lambda = \omega^2. \quad (6.19)$$

Оно имеет нетривиальное решение, если λ удовлетворяет уравнению

$$|\mathbf{C} - \lambda \mathbf{A}| = 0, \quad (6.20)$$

называемому *уравнением частот*. После раскрытия определителя получим в левой части уравнения (6.20) полином n -й степени относительно λ . Из (6.14) следует, что все его корни $\lambda_j = \omega_j^2$ ($j = 1, \dots, n$) положительны. Величины ω_j называются *собственными частотами* консервативной системы (6.9).

Подстановка корня $\lambda = \lambda_j$ в (6.19) дает линейную систему уравнений для отыскания компонент отвечающего ему вектора \mathbf{h}_j , который называется *вектором собственной формы* консервативной системы (6.9). Векторы собственных форм определяются с точностью до произвольного постоянного множителя, их нормировка (если она требуется) проводится в соответствии с первым равенством (6.14). Как указывалось выше, векторы \mathbf{h}_j ($j = 1, \dots, n$) — столбцы матрицы \mathbf{H} — линейно независимы¹⁾.

Проведенное исследование показало, что векторы собственных форм и собственные частоты определяются параметрами консервативной системы (6.9) — элементами матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} .

Входящие в (6.17) постоянные C_j и ψ_j определяются начальными условиями. Для их отыскания следует записать выражения для $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ отвечающие моменту времени $t = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(0) &= C_1 \mathbf{h}_1 \cos \psi_1 + C_2 \mathbf{h}_2 \cos \psi_2 + \dots + C_n \mathbf{h}_n \cos \psi_n, \\ \dot{\mathbf{q}}(0) &= C_1 \mathbf{h}_1 \omega_1 \sin \psi_1 + C_2 \mathbf{h}_2 \omega_2 \sin \psi_2 + \dots + C_n \mathbf{h}_n \omega_n \sin \psi_n. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Каждое из выражений (6.21) можно рассматривать как систему линейных неоднородных уравнений относительно n величин

$$\beta_j = C_j \cos \psi_j, \quad \gamma_j = C_j \omega_j \sin \psi_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad (6.22)$$

¹⁾ Вид общего решения (6.17) системы (6.9) не изменяется даже в случае кратных корней уравнения частот. Если корень $\lambda_j = \omega_j^2$ кратный, то всегда можно найти столько отвечающих ему линейно независимых векторов \mathbf{h}_j собственных форм, какова его кратность. Таким образом, в отличие от решения системы линейных дифференциальных уравнений общего вида [2, 6], в случае кратных корней уравнения частот «резонансные» слагаемые с множителями вида $P_{1ij}(t) \cos \omega_j t + P_{2ij}(t) \sin \omega_j t$ с полиномиальными по степеням t множителями P_{1ij}, P_{2ij} в компонентах $q_i(t)$ решения системы (6.9) не возникают. Алгоритм поиска линейно независимых векторов, отвечающих кратным корням уравнения частот, аналогичен [8] известной процедуре ортогонализации Грама-Шмита. Обсудим его для случая двукратного корня λ_j , когда из (6.19) могут быть выбраны два отвечающих этому корню вектора \mathbf{h}_j^1 и \mathbf{h}_j^2 собственной формы. При их произвольном выборе в общем случае имеем $\mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^2 \neq 0$, то есть матрица \mathbf{H} , включающая эти векторы, может оказаться вырожденной. Тем не менее, из \mathbf{h}_j^1 и \mathbf{h}_j^2 всегда можно сформировать два вектора, подстановка которых в матрицу \mathbf{H} делает ее определитель отличным от нуля. Будем считать, что векторы \mathbf{h}_j^1 и \mathbf{h}_j^2 были предварительно нормированы:

$$\mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^1 = 1, \quad \mathbf{h}_j^{2T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^2 = 1$$

Разумеется, любая линейная комбинация этих векторов также будет вектором собственной формы, отвечающим двукратному корню λ_j . Образум такой вектор $\mathbf{h}_j^3 = c_1 \mathbf{h}_j^1 + c_2 \mathbf{h}_j^2$ и обсудим правило выбора коэффициентов c_1, c_2 , для которых \mathbf{h}_j^3 ортогонален вектору \mathbf{h}_j в метрике, определяемой матрицей \mathbf{A} : $\mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^3 = 0$. Умножив выражение для \mathbf{h}_j^3 слева на вектор-строку $\mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A}$, получим равенство

$$\mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^3 = c_1 + c_2 \mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^2 = 0,$$

из которого следует искомое условие для коэффициентов: $c_1/c_2 = -\mathbf{h}_j^{1T} \mathbf{A} \mathbf{h}_j^2$.

соответственно, коэффициентами которых являются компоненты векторов $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$. В силу линейной независимости этих векторов из (6.21) могут быть однозначно найдены векторы $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$: $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{q}(0)$, $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{H}^{-1}\dot{\mathbf{q}}(0)$, где матрица \mathbf{H} определялась при записи (6.12). Тогда из (6.22) получим искомые значения постоянных¹⁾

$$C_j = \text{sign } \beta_j \sqrt{\beta_j^2 + \left(\frac{\gamma_j}{\omega_j}\right)^2}, \quad \psi_j = \arctg\left(\frac{\gamma_j}{\beta_j \omega_j}\right). \quad (6.23)$$

Одночастотные колебания системы с n степенями свободы.

Свойство линейной независимости векторов собственных форм позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. Для того чтобы в системе (6.9) возникли одночастотные колебания на частоте ω_j ($j = 1, \dots, n$), т. е. решение этой системы имело вид

$$\mathbf{q} = C_j \mathbf{h}_j \cos(\omega_j t - \psi_j), \quad (6.24)$$

нужно задать векторы начальных условий коллинеарными вектору \mathbf{h}_j :

$$\mathbf{q}(0) = a_j \mathbf{h}_j, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = b_j \mathbf{h}_j, \quad (6.25)$$

где хотя бы одна из постоянных a_j, b_j отлична от нуля.

Доказательство. Из (6.24) вытекают равенства $\mathbf{q}(0) = C_j \mathbf{h}_j \cos \psi_j$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = C_j \mathbf{h}_j \omega_j \sin \psi_j$, следовательно, (6.25) удовлетворяются при $a_j = C_j \cos \psi_j$, $b_j = C_j \omega_j \sin \psi_j$, что доказывает необходимость утверждения. Для доказательства его достаточности будем считать выполненными условия (6.25). Тогда из (6.21) получаем $a_j = C_j \cos \psi_j$, $b_j = C_j \omega_j \sin \psi_j$ (C_j и ψ_j находятся из (6.23), а также $C_l \cos \psi_l = 0$, $C_l \omega_l \sin \psi_l = 0$ ($l = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$), откуда $C_l = 0$. Подстановка последних равенств в (6.17) дает формулу (6.24). Доказательство окончено.

Понятие *парциальных частот* $\omega_{q_j} = \sqrt{\frac{c_{jj}}{a_{jj}}}$ $j = 1, \dots, n$ системы (6.9) вводится по аналогии с системой (2.4) (здесь a_{js}, c_{js} ($j, s = 1, \dots, n$) — элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} соответственно). Парциальная частота для фиксированной координаты с номером j определяется из дифференциального уравнения (2.9) и представляет собой частоту колебаний системы (6.9) после наложения на нее связей

$$q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n = 0,$$

¹⁾ При значениях $-\pi/2 < \psi_j < \pi/2$ из первого равенства (6.22) получаем $\text{sign } C_j = \text{sign } \beta_j$.

запрещающих изменение всех обобщенных координат, помимо j -й. Эксперимент, позволяющий найти парциальные частоты малых колебаний механической системы, проводится следующим образом: для каждого номера $j = 1, \dots, n$ нужно зафиксировать все обобщенные координаты, кроме j -й, и измерить частоту колебаний полученной системы.

§7. Влияние малого вязкого трения на малые свободные и вынужденные колебания механических систем

7.1. Модель вязкого трения для механических систем с n степенями свободы

Рассмотрим систему с $n=3p-\gamma$ степенями свободы, образованную p материальными точками, под действием γ голономных стационарных идеальных связей.

Обозначим $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^\top$ вектор обобщенных координат системы; m_v ($v = 1, \dots, p$) — массы точек; $\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_v(\mathbf{q}) = (x_v, y_v, z_v)^\top$ — их радиус-векторы в декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 7.1); $\mathbf{v}_v = \dot{\mathbf{r}}_v = (\partial \mathbf{r}_v / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$ — скорости точек. К точкам приложены силы вязкого трения, направленные противоположно скоростям их движения

$$\mathbf{F}_v = -b_v \mathbf{v}_v, \quad (7.1)$$

где $b_v > 0$ — постоянные¹⁾.

Обобщенные силы $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)^\top$, отвечающие силам (7.1), называют *диссипативными силами*. Запишем их выражения в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{v=1}^p \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top \mathbf{F}_v = -\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{q}) &= \sum_{v=1}^p b_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \mathbf{q}} \right). \end{aligned} \quad (7.2)$$

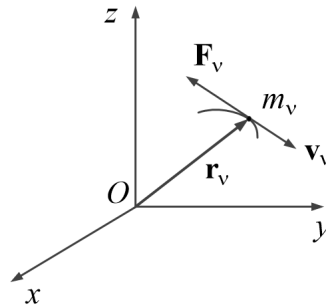


Рис. 7.1. Силы вязкого трения

¹⁾Для каждой фиксированной точки формула (7.1) представляет собой модель вязкого трения для системы с одной степенью свободы, рассмотренную в § 1.

Симметрическая матрица \mathbf{B} называется *матрицей диссипативных сил*. По структуре она похожа на матрицу

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \sum_{v=1}^p m_v \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top \left(\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \mathbf{q}} \right)$$

инерционных коэффициентов рассматриваемой системы (см. (6.1)). Их отличие состоит в том, что матрица \mathbf{B} в общем случае неотрицательно определена, поскольку силы трения (7.1) могут быть приложены не ко всем точкам системы, а матрица \mathbf{A} в силу условий $m_v > 0$ ($v = 1, \dots, p$) всегда положительно определена. Если \mathbf{B} определена положительно, то говорят, что система обладает *полной диссипацией*.

Динамика системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^\top - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top = -\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (7.3)$$

где L — функция Лагранжа, определенная при записи системы (6.1). Как и ранее будем считать, что система имеет изолированное положение равновесия (6.4). После линеаризации (7.3) вблизи него получим систему уравнений

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (7.4)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{0})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{0})$, матрица \mathbf{C} введена при записи (6.7). Если в положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то \mathbf{C} положительно определена.

7.2. Свободные малые колебания с учетом диссипативных сил

При наличии матрицы $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ переход к нормальным координатам консервативной части (6.9) системы (7.4) по формулам (6.12) может привести к системе n независимых уравнений линейных осцилляторов лишь в частном случае, когда \mathbf{B} представляет собой линейную комбинацию матриц \mathbf{A} и \mathbf{C} . Если это не так, то процедура отыскания решения системы (7.4) становится более сложной [2, 6].

Не останавливаясь подробно на этой процедуре, обсудим структуру решения системы (7.4) для случая, когда рассматриваемая механическая система обладает полной диссипацией. Будем искать решение в виде

$$\mathbf{q} = \mathbf{h}e^{\lambda t}, \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^\top, \quad (7.5)$$

где λ и h_j ($j = 1, \dots, n$) предполагаются постоянными, комплексными.

После подстановки (7.5) в (7.4) и сокращения обеих частей полученного соотношения на $e^{\lambda t}$ приходим к уравнению

$$(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (7.6)$$

для определения компонент вектора \mathbf{h} .

Для того чтобы уравнение (7.6) имело нетривиальное решение λ должна удовлетворять уравнению

$$|\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}| = 0. \quad (7.7)$$

После раскрытия определителя получим в левой части уравнения (7.7) полином степени $2n$ относительно λ , который имеет $2n$ корней. Выясним их свойства.

Умножив обе части (7.6) слева на вектор $\bar{\mathbf{h}}^T$, где $\bar{\mathbf{h}}$ получается из \mathbf{h} путем комплексного сопряжения элементов, получим скалярное уравнение

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (7.8)$$

$$a = \bar{\mathbf{h}}^T \mathbf{A} \mathbf{h}, \quad b = \bar{\mathbf{h}}^T \mathbf{B} \mathbf{h}, \quad c = \bar{\mathbf{h}}^T \mathbf{C} \mathbf{h}.$$

В силу положительной определенности матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} коэффициенты a , b , c уравнения (7.8) вещественны и положительны. Следовательно, для всех удовлетворяющих (7.6) векторов \mathbf{h} вещественные части корней уравнения (7.8) отрицательны.

Таким образом, решения системы (7.4) имеют ту же структуру, что и решение уравнения (1.1) линейного осциллятора, отвечающего случаю $\mathcal{F} = 0$.

В соответствии с материалом раздела 1.2, при небольших значениях параметра

$$\varepsilon = \frac{b}{2\sqrt{ac}} < 1 \quad (7.9)$$

(случай «малых» диссипативных сил) корни $\lambda_{1,2}$ уравнения (7.8), отвечающие данному вектору \mathbf{h} , комплексно сопряженные

$$\lambda_{1,2} = -\kappa \pm i\nu, \quad \kappa = \frac{b}{2a}, \quad \nu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad (7.10)$$

т.е. решение системы (7.4) описывает затухающие колебания. При $\varepsilon \ll 1$ справедливо неравенство $\kappa \ll \nu$, тогда из (7.10) следует $\lambda_{1,2} \approx \pm i\nu$, где значения $\nu = \nu_j$, соответствующие векторам $\mathbf{h} = \mathbf{h}_j$ ($j = 1, \dots, n$), мало отличаются от выражений для собственных частот ω_j колебаний консервативной системы (6.9), получаемой из (7.4) в пренебрежении трением.

7.3. Вынужденные малые колебания с учетом диссипативных сил

Уравнения малых колебаний системы (6.1) при наличии вязкого

трения и внешнего периодического воздействия вида (2.29) записываются в форме

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{a} \cos \omega t, \quad (7.11)$$

где $\mathbf{B} = \|b_{js}\|$ ($j, s = 1, \dots, n$) — постоянная симметрическая матрица диссипативных сил, определенная при записи уравнения (7.4). Как и в разделе 2.3, ограничимся случаем, когда периодическое воздействие прикладывается только по одной l -й координате, то есть векторный множитель в правой части (7.11) имеет вид $\mathbf{a} = (0, \dots, 0, a, 0, \dots, 0)^\top$, $a \neq 0$, где ненулевая компонента расположена на месте l ($1 \leq l \leq n$).

Вынужденные колебания рассматриваемой системы находятся так же, как и в разделе 1.3 [10]: (7.11) заменяется системой

$$\mathbf{A}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{B}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{a}e^{i\omega t}, \quad (7.12)$$

решение которой отыскивается в виде периодической функции

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{A}}e^{i\omega t}, \quad (7.13)$$

где $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)^\top$ — постоянный вектор с комплексными компонентами; вынужденные колебания системы (7.11) представляют собой вещественную часть решения системы (7.12):

$$\mathbf{q} = \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (7.14)$$

После подстановки (7.13) в (7.12) и сокращения обеих частей полученного соотношения на $e^{i\omega t}$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{C} - \mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega) \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{a}. \quad (7.15)$$

Используя правило Крамера, приходим к выражению для j -й компоненты вектора $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\tilde{A}_j = \frac{\Delta_{lj}}{\Delta} = a(u(\omega) - iw(\omega)), \quad (7.16)$$

где $\Delta = |\mathbf{C} - \mathbf{A}\omega^2 + \mathbf{B}i\omega|$; Δ_{lj} — определитель, получаемый из определителя Δ путем замены j -го столбца столбцом \mathbf{a} .

Из (7.13), (7.14) и (7.16) следует формула для вычисления j -й компоненты вектора \mathbf{q}

$$q_j = a(u(\omega) \cos \omega t + w(\omega) \sin \omega t).$$

Выражение

$$A_{jl} = a\sqrt{u^2(\omega) + w^2(\omega)} \quad (7.17)$$

определяет амплитуду вынужденных колебаний j -й компоненты q_j вектора \mathbf{q} при периодическом воздействии, на l -ю компоненту q_l этого вектора.

Рассмотрим знаменатель Δ первого выражения (7.16), определяющий резонансные свойства рассматриваемой системы. При выполнении (7.9), в соответствии с (7.7) и (7.10) выражение для Δ может быть записано в виде

$$\Delta = |\mathbf{A}| (\kappa_1 + i(\omega - v_1)) (\kappa_1 + i(\omega + v_1)) \dots \dots (\kappa_n + i(\omega - v_n)) (\kappa_n + i(\omega + v_n)).$$

Нижние индексы $1, \dots, n$ отвечают корням (7.10) уравнения (7.8) для значений $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h} = \mathbf{h}_n$ соответственно.

Для удобства анализа $u(\omega)$ и $w(\omega)$ в правой части второго равенства (7.16) умножим числитель и знаменатель выражения для Δ на выражение

$(\kappa_1 - i(\omega - v_1)) (\kappa_1 - i(\omega + v_1)) \dots (\kappa_n - i(\omega - v_n)) (\kappa_n - i(\omega + v_n))$, сопряженное $\frac{\Delta}{|\mathbf{A}|}$. В результате знаменатель первого равенства (7.16) примет вид

$$|\mathbf{A}| \left(\kappa_1^2 + (\omega - v_1)^2 \right) \left(\kappa_1^2 + (\omega + v_1)^2 \right) \dots \dots \cdot \left(\kappa_n^2 + (\omega - v_n)^2 \right) \left(\kappa_n^2 + (\omega + v_n)^2 \right).$$

При значениях $\omega \approx v_j$ ($j = 1, \dots, n$), которые, как указывалось выше, близки к собственным частотам ω_j свободных колебаний системы без трения, амплитуды A_{jl} вынужденных колебаний демонстрируют типичное резонансное поведение. Благодаря наличию коэффициентов κ_j знаменатель Δ первого равенства (7.16) уже не обращается в нуль при $\omega = \omega_j$, и, следовательно, амплитуды A_{jl} остаются конечными. Как и для рассмотренных в разделе 1.3 систем с одной степенью свободы, амплитуды вынужденных колебаний достигают максимумов при значениях частот ω воздействия, не совпадающих с ω_j . При малых диссипативных силах эти расщепления незначительны.

На рис. 7.2 показан график функции $A_{11}(\omega)$ для системы с двумя степенями свободы при наличии вязкого трения, к которой, как и к системе из раздела 2.3, периодическое воздействие прикладывается по первой координате: $\mathbf{a} = (a, 0)^T$. Пунктиром отмечены «амплитуды» колебаний в той же системе без трения, показанные на рис. 2.9, а. Увеличение трения приводит к сглаживанию и смещению максимумов графика.

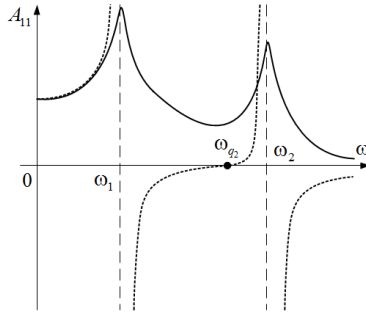


Рис. 7.2. Зависимость «амплитуды» вынужденных колебаний от частоты периодического воздействия в системе с двумя степенями свободы по возмущаемой координате q_1 при наличии вязкого трения [20]

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959.
2. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высш. шк., 1991.
3. Булгаков Б.В. Колебания. Москва, ГИТТЛ, 1954. 892 с.
4. Бутенин Н.В., Луни Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В двух томах. СПб.: Лань, 1998.
5. Бутиков Е.И. Колебания линейных систем. Ч. I. Собственные и вынужденные колебания. Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПБИТМО, 1999.
6. Влахова А.В., Мартыненко Ю.Г., Новожильов И.В. Колебания и фракционный анализ. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ГИТТЛ, 1953.
8. Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж. Классическая механика. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», ИКИ, 2012.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во МГУ, 1998.
10. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
11. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002.
12. Кузьмина Р.П. Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003.

13. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
14. *Маркеев А.П.* Нелинейные колебания симпатических маятников // *Нелинейная динамика*, 2010. Т. 6, № 3. С. 605–621.
15. *Маркеев А.П.* О движении связанных маятников // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, № 1. С. 27–38.
16. *Маркеев А.П.* Об устойчивости нелинейных колебаний связанных маятников // *Изв. РАН. МТТ*. 2013. № 4. С. 20–30.
17. *Неймарк Ю.И.* Математические модели естествознания и техники. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1996.
18. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995.
19. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1964.
20. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. М: Наука, 1964.
21. *Стрелков С.П.* Механика. Спб.: Лань, 2005.

Исправления и пожелания направляйте на a.kruch@moids.ru