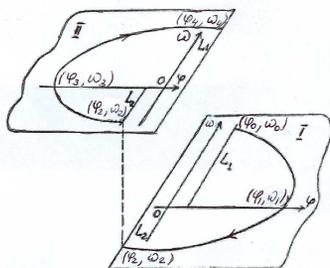


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет



## РЕЛЕЙНАЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

ЗАДАЧА  
СПЕЦПРАКТИКУМА  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ  
МЕХАНИКЕ

Предварительная электронная версия

2018

ЗАДАЧА СПЕЦПРАКТИКУМА  
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

**РЕЛЕЙНАЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА**

*В.В. Тихомиров, С.И. Злочевский*

*Под редакцией*

*профессора Владимира Васильевича Александра,*

*профессора Юрия Владимировича Болотина*

*Рецензент Игорь Леонидович Антонов*

Редактор	Степан Степанович Лемак
Верстка	Маргарита Дмитриевна Белоусова Анна Павловна Кручинина
Иллюстрации	Алена Павловна Кручинина

# РЕЛЕЙНАЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

*В.В. Тихомиров, С.И. Злочевский*

## **Введение**

Цель работы состоит в экспериментальном и аналитическом изучении режима автоколебаний мехатронной системы. Аналитическое исследование проводится при помощи метода точечных отображений.

В теоретической части описания лабораторной работы приведены некоторые сведения из теории динамических систем, основные положения метода точечных отображений и описан класс нелинейных систем – кусочно-линейных систем.

В практической части описан макет мехатронной системы, изложена методика применения метода точечных отображений для анализа движения этой системы и порядок выполнения работы.

## **§1. Автоколебательные системы**

Среди нелинейных систем особое место занимают автоколебательные системы. Автоколебания — это периодические движения, не зависящие от начальных условий. Эта особенность отличает их от периодических движений консервативных систем, в частности линейных, у которых каждое периодическое движение определяется начальными условиями [1]. Автоколебания проявляются в разнообразных формах, таких как например, свист телеграфных проводов, скрип открываемой двери, звучание человеческого голоса или смычковых инструментов.

Системы, в которых автоколебания являются их характерными движениями, называются автоколебательными. Такие системы находят множество применений в технике, например: часы всех типов, генераторы колебаний различной формы, паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т.д.

Автоколебания могут возникать в различных технических устройствах, оказывая вредное влияние на их работу. В качестве примера могут служить автоколебания передних колес автомобиля или самолета (так называемое явление шимми колеса), автоколебания режущего инструмента в металлообрабатывающих станках, автоколебания крыла самолета при некоторых режимах полета (так называемый флаттер крыла) и т.д.

**1.1. Динамические системы. Фазовая плоскость. Орбитная устойчивость.** Определение динамических систем основано на понятии состояния [2]. Под вектором состояния  $x$  понимается набор переменных, описывающих состояние системы в данный момент времени. В механике состояние системы определяется совокупностью обобщенных координат и скоростей. Под динамической системой в дальнейшем будем понимать, несколько ограничивая определение, принятое в современной литературе [3], [4], систему, в которой изменение со временем вектора состояния описывается векторным дифференциальным уравнением. При этом для системы дифференциальных уравнений должны выполняться условия существования и единственности решения, так что состояние в данный момент времени полностью определяет дальнейшее движение динамической системы.

Пространство переменных  $x$  будем называть **фазовым пространством** системы. Значения переменных  $x$  в каждый момент времени определяют в этом пространстве так называемую изображающую точку. С изменением времени изображающая точка описывает в фазовом пространстве кривую, называемую **фазовой траекторией**. Геометрическая картина взаимного расположения траекторий в фазовом пространстве называется **фазовым портретом**.

В дальнейшем рассматриваются динамические системы, двумерный вектор состояния которых  $x = (x_1, x_2)^T$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= R(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= P(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Правые части уравнений (1) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решения. Будем рассматривать автономные системы, в правые части которых не входит в явном виде время  $t$ .

Фазовым пространством системы (1) является плоскость  $(x_1, x_2)$ . Периодическому движению  $x^*(t)$  системы (1) на фазовой плоскости отвечает замкнутая траектория  $\gamma$ . При анализе периодических движений изображающей точки необходимо ввести понятие орбитной устойчивости [5]. Обозначим через  $x(t)$ ,  $(-\infty < t < \infty)$  произвольное решение системы (1), а через  $\rho(x, \gamma)$  – расстояние от точки  $x$  до кривой  $\gamma$ .

**Определение** Периодическое движение  $x^*(t)$ , которому соответствует замкнутая фазовая траектория  $\gamma$ , называется **орбитно устойчивым** на интервале времени  $t_0 < t < \infty$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что из выполнения неравенства  $\rho(x(t_0), \gamma) < \delta$  следует выполнение неравенства  $\rho(x(t), \gamma) < \varepsilon$  для всех  $t > t_0$ .

Орбитно устойчивое движение может быть неустойчивым по Ляпунову, однако периодическое движение, устойчивое по Ляпунову, орбитно устойчиво.

**1.2. Автоколебания и предельные циклы** Фазовый портрет динамической системы (1) может содержать изолированные замкнутые траектории, которые называются предельными циклами [6]. Изолированность предельного цикла означает, что на фазовой плоскости существует его двусторонняя окрестность, в которой нет других замкнутых траекторий. Движение изображающей точки по всем другим траекториям в этой окрестности происходит так, что с увеличением времени изображающая точка либо приближается к предельному циклу, либо выходит из этой окрестности.

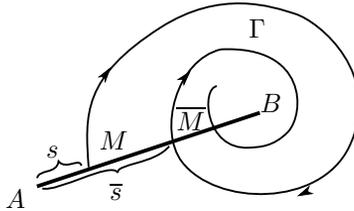


Рис. 1

Предельный цикл устойчив, если периодическое движение по нему орбитно устойчиво.

**1.3. Метод точечных отображений [3]** Рассмотрим автономную динамическую систему, описываемую уравнениями (1), для которой выполняется теорема существования и единственности решения. Проведем на фазовой плоскости через неособые точки отрезок без контакта  $AB$ , т.е. такой отрезок прямой или дуги некоторой гладкой кривой, в каждой точке которого фазовые траектории динамической системы (1) пересекают его, нигде не касаясь. Обозначим через  $\Gamma$  фазовую траекторию, проходящую через точку  $M$  отрезка  $AB$ , где  $M$  отлична от  $A$  и  $B$  (рис. 1). Пусть изображающая точка, движущаяся по траектории  $\Gamma$  согласно уравнениям (1), в момент времени  $t_0$  совпадает с точкой  $M$ . Если при дальнейшем движении изображающей точки вдоль траектории  $\Gamma$  она вновь пересечет отрезок без контакта  $AB$ , то говорят, что точка  $M$  имеет последующую точку. В этом случае на основании теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий все точки на отрезке  $AB$ , достаточно близкие к  $M$ , также имеют последующие точки. Введем координату  $s$ , определяющую положение точки  $M$  на отрезке  $AB$ . Пусть  $s$  и  $\bar{s}$  координаты точки  $M$  и ее последующей точки  $\bar{M}$  (рис. 1)

Согласно сказанному выше существует функциональная зависимость:

$$\bar{s} = f(s), \quad (2)$$

которая называется функцией последования. Она выражает закон некоторого точечного отображения отрезка без контак-

та  $AB$  (или его части) в себя, устанавливая взаимнооднозначное соответствие между точками этого отрезка и их последующими. Тем самым задача изучения структуры разбиения фазовой плоскости (или ее части) на траектории сводится к изучению структуры соответствующего точечного отображения  $\Pi$  отрезка без контакта в себя с функцией последования (2). Для существования функции последования необходимо, чтобы траектории на фазовой плоскости обладали свойствами возвращаемости, причем возвращение изображающей точки на отрезок без контакта должно происходить за конечный промежуток времени (рис. 1).

Для замкнутой фазовой траектории точка  $M$ , координату которой обозначим через  $s^*$ , совпадает со своей последующей, поэтому

$$s^* = f(s^*),$$

(рис. 2). Точка  $s = s^*$  называется **неподвижной точкой** точечного отображения  $\Pi$ . Отсюда следует, что отыскание за-

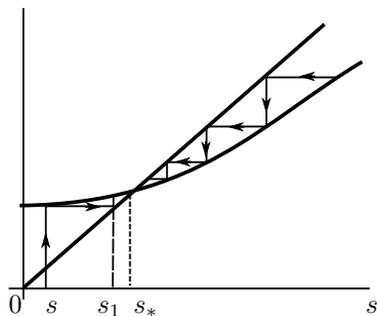


Рис. 2

мкнутых траекторий на фазовой плоскости сводится к отысканию неподвижных точек точечного отображения  $\Pi$ . Эта задача может быть решена при помощи построения на плоскости  $(s, \bar{s})$  графика функции  $\bar{s} = f(s)$ . Кривая  $\bar{s} = f(s)$  обладает тем свойством, что ее производная  $d\bar{s}/ds$  всегда положительна, так как в силу теоремы Коши фазовые траектории не пересекаются. Неподвижные точки отображения  $\Pi$  находятся из условия пересечения графика функции последования

$\bar{s} = f(s)$  с биссектрисой  $\bar{s} = s$ . Указанное геометрическое построение называется **диаграммой Ламерея** (рис. 2).

Характер поведения кривой  $\bar{s} = f(s)$  вблизи неподвижной точки  $s^*$  полностью определяется характером поведения фазовых траекторий вблизи соответствующей точке  $s^*$  предельного цикла. Это позволяет сформулировать на языке точечных отображений условие устойчивости предельного цикла. Рассмотрим последовательность точек, определяемых соотношениями

$$s_1 = f(s), s_2 = f(s_1), s_3 = f(s_2), \dots \quad (3)$$

Если изображающая точка при  $t \rightarrow \infty$  стремится к предельному циклу, то последовательность (3) будет иметь своей предельной точкой неподвижную точку  $s^*$ . И наоборот, из сходимости последовательности (3) к неподвижной точке  $s^*$  следует, что соответствующая ей фазовая траектория стремится при  $t \rightarrow \infty$  к предельному циклу. В этом случае неподвижная точка  $s^*$  точечного отображения называется устойчивой.

Последовательность (3) можно изобразить на диаграмме Ламерея в виде «лестницы Ламерея», направление перемещения по которой дает возможность наглядно определить устойчивость неподвижной точки и сходимость к ней в «большом» (так как это построение можно провести на всей кривой  $\bar{s} = f(s)$ ). Условие устойчивости неподвижной точки  $s^*$  в малом дается теоремой Кенигса: неподвижная точка  $s^*$  устойчива, если  $\left. \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s^*} < 1$  и неустойчива, если  $\left. \frac{d\bar{s}}{ds} \right|_{s^*} > 1$ .

Для доказательства этой теоремы достаточно линеаризовать функцию  $\bar{s} = f(s)$  в малой окрестности точки  $s^*$  и построить соответствующую «лестницу Ламерея».

#### 1.4. Кусочно-линейная динамическая система [3]

Кусочно-линейными динамическими системами называются такие, у которых правые части уравнений (1) линейны в областях фазовой плоскости, имеющих гладкие границы, а при переходе через эти границы они терпят разрыв первого рода. Такие системы являются существенно нелинейными, так как вблизи границ, на которых правые части терпят разрыв, они не могут быть линеаризованы. К системам такого рода относятся механические системы с кулоновым (сухим) трением,

широкий класс систем автоматического управления, имеющих в своем составе релейные элементы и некоторые другие.

Под релейным элементом или реле понимается устройство, реализующее нелинейную функциональную зависимость между входной  $\sigma$  и выходной  $y$  переменными

$$y = F(\sigma), \quad (4)$$

где  $F(\sigma)$  в общем случае многозначная функция, принимающая конечное число различных значений. Графики некоторых часто встречающихся зависимостей  $F(\sigma)$ , которые называют характеристиками релейных элементов, приведены на рис. 3. Стрелками на рис. 3 обозначены скачкообразные изме-

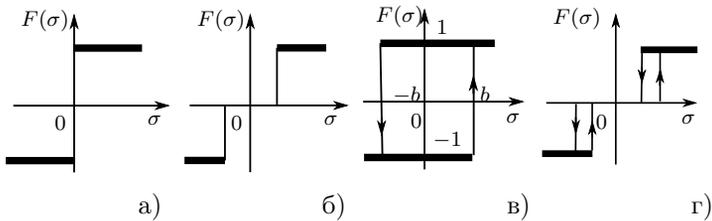


Рис. 3

нения функции, имеющей области значений аргумента, в которых она неоднозначна. Эти разрывы первого рода значений функции происходят при непрерывном изменении аргумента. При наличии зоны неоднозначности релейная характеристика вида в (рис. 3) может быть описана следующим образом: если  $F(\sigma) = 1$ , то это значение функции сохраняется до тех пор, пока  $\sigma$ , убывая, не станет меньше  $-b$ . Значение функции  $F(\sigma) = -1$  сохраняется до тех пор, пока  $\sigma$ , возрастая, не станет больше  $b$ .

Под релейной динамической системой второго порядка понимается такая динамическая система, у которой в правые части уравнений (1) входят релейные элементы с функциями вида (4), где

$$\sigma = p(x_1, x_2). \quad (5)$$

В случае, если функция (5) линейна и имеет вид

$$\sigma = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad (6)$$

фазовая плоскость динамической системы с релейным элементом, имеющим характеристику вида в рис. 3, разбивается на три области прямыми

$$\sigma = \pm b. \quad (7)$$

В областях  $\sigma < -b$  и  $\sigma > b$  функция  $F(\sigma)$  однозначна, а в области  $-b < \sigma < b$  – двузначна.

Неоднозначность функции  $F(\sigma)$  приводит к нарушению условий единственности решения системы дифференциальных уравнений (1). Однако в данном случае условия единственности решения могут быть восстановлены путем представления фазовой плоскости перекрывающимися в области неоднозначности листами, соответствующими значениям, принимаемым функцией  $F(\sigma)$  [7]. Положение изображающей точки в данной точке данного листа однозначно определяет фазовую траекторию на данном листе. Если при движении изображающая точка пересекает границу данного листа и происходит скачкообразное изменение значения  $F(\sigma)$ , то изображающая точка переходит на другой лист фазовой плоскости, на котором правые части уравнений также определены однозначно. Возможный вид траектории изображающей точки на двулистной фазовой плоскости динамической системы с релейным элементом, имеющим характеристику вида в рис. 3, при линейной функции  $\sigma$  (6), изображен на рис. 4.

Метод точечных отображений может быть применен для анализа динамических систем, имеющих релейные характеристики с областями неоднозначности. В этом случае в качестве отрезка без контакта можно взять отрезок на одном из листов фазовой плоскости, имеющий свойства отрезка без контакта.

## §2. Исследование релейной следящей системы

Механические системы, имеющие характерными движениями автоколебания и описываемые дифференциальными

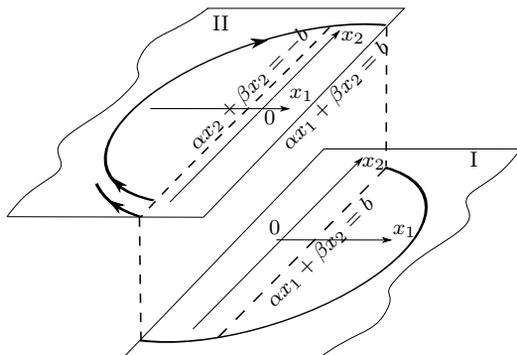


Рис. 4

уравнениями с кусочно-линейными правыми частями, широко распространены в технике. Примерами таких систем являются: следящая система с люфтом [6], корабельный автопилот с релейным элементом [7], автопилот с постоянной скоростью сервомотора [8]. С развитием космической техники релейные автоколебательные системы стали применяться для решения задач стабилизации углового положения космических аппаратов при помощи газореактивных двигателей [9], [10] и целом ряде других систем.

При выполнении данной работы исследуется режим автоколебаний макета мехатронной релейной следящей системы.

Макет состоит из механической части, двух датчиков, компьютера, электронного блока передачи информации и блока питания. Механическая часть представляет собой вращающиеся на одном валу роторы следующих устройств:

- электродвигателя постоянного тока, создающего момент, приводящий в движение вал установки,
- датчика угловой скорости – электродвигателя постоянного тока, называемого в дальнейшем тахогенератором, работающего в режиме генератора и выдающего информацию в виде аналогового напряжения об угловой скорости вращения вала,

- датчика угла – многооборотного потенциометра, выдающего информацию в виде аналогового напряжения об угле поворота вала.

Компьютер, входящий в состав макета, выполняет две функции. Во-первых, с его помощью строится сигнал обратной связи, подаваемый на двигатель, создающий момент на валу установки и приводящий его во вращение. Для формирования сигнала управления двигателем в компьютере используется реле с характеристикой вида в рис. 3, входным сигналом которого является линейная функция  $\sigma$  вида (6). Во-вторых, на экране монитора изображается фазовая плоскость системы и текущее положение изображающей точки на ней.

Сформулируем предположения, при которых строится математическая модель установки, и запишем соответствующие уравнения. Обозначим угол поворота вала через  $\varphi$  и угловую скорость через  $\omega$ .

- Среди моментов сил, действующих на вращающуюся часть макета, существенными являются  $M_D$  – момент сил, создаваемых электродвигателем и  $M_T$  – момент сил трения, поэтому уравнение движения вала установки записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= M_D + M_T, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $J$  – момент инерции вращающихся частей установки.

- Момент электродвигателя  $M_D$  пропорционален подаваемому на него с компьютера сигналу  $u = F(\sigma)$ :

$$M_D = -Mu, \quad (9)$$

где  $M$  – постоянная величина, характеризующая электродвигатель.

- Момент сил трения  $M_T$  описывается моделью сил Кулона (сухого) трения:

$$\begin{aligned} M_T &= -M_0 \operatorname{sign} \omega, & \omega \neq 0, \\ |M_T| &< M_0, & \omega = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $M_0$  – постоянная величина.

- Напряжения — сигналы с датчика угла  $u_\varphi$  и с датчика угловой скорости  $u_\omega$  пропорциональны измеряемым величинам

$$\begin{aligned} u_\varphi &= n_1 \varphi, \\ u_\omega &= n_2 \omega. \end{aligned} \quad (11)$$

- Характеристика реле

$$u = F(\sigma) \quad (12)$$

имеет вид в рис. 3.

Исключая промежуточные величины из формул (8)–(12) уравнения движения запишем в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= -MF(\sigma) - M_0 \operatorname{sign} \omega, \\ \sigma &= \alpha\varphi + \beta\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha = K_\varphi n_1$ ,  $\beta = K_v n_2$ ,  $K_\varphi$ ,  $K_v$  — коэффициенты, вводимые в алгоритм управления при выполнении работы.

**2.1. Построение точечного отображения** При построении точечного отображения для системы (13) в качестве отрезка без контакта возьмем полупрямую  $L_1$ , лежащую на листе  $I$  фазовой плоскости (рис. 5) и удовлетворяющую уравнению

$$\alpha\varphi + \beta\omega = b, \quad \omega > 0. \quad (14)$$

Пусть в момент времени  $t_0$  изображающая точка начинает движение с отрезка без контакта  $L_1$  из точки с координатами  $(\varphi_0, \omega_0)$ . Положение точки на отрезке без контакта будем определять координатой  $\omega_0$ , тогда начальное значение  $\varphi_0$  определяется из уравнения (14). Так как  $\omega_0 > 0$ , то при  $t > t_0$  уравнение движения имеет вид:

$$J\dot{\omega} = -M - M_0, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (15)$$

где  $t_1$  — момент времени выхода изображающей точки на границу двулистной фазовой плоскости

$$\omega = 0, \quad (16)$$

когда происходит изменение момента сил сухого трения  $M_T$ , определяемого по формуле (10), на значение  $M_0$  (рис. 5).

Уравнение движения при  $t > t_1$  примет вид:

$$J\dot{\omega} = -M + M_0, \quad (17)$$

Движение, описываемое уравнением (17) будет продолжаться до момента времени  $t_2$ , когда выполнится условие:

$$\alpha\varphi_2 + \beta\omega_2 = -b. \quad (18)$$

В момент времени  $t_2$  изображающая точка достигнет края листа  $I$  фазовой плоскости и перейдет на полупрямую  $L_2$  листа  $II$ , удовлетворяющую уравнению:

$$\alpha\varphi_2 + \beta\omega_2 = -b, \quad \omega < 0. \quad (19)$$

Уравнения, описывающие движение при  $t > t_2$ , получаются из (13) аналогично (15), (17). Это движение продолжается до момента времени  $t_3$ , когда опять произойдет изменение момента сил сухого трения при условии  $\omega_3 = 0$ .

Уравнение, описывающее движение при  $t > t_3$ , аналогично предыдущему получается из (13). Это движение продолжается до момента времени  $t_4$ , когда изображающая точка приходит на  $L_1$ .

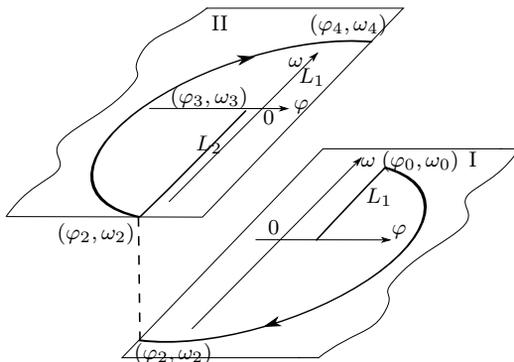


Рис. 5

Функция последования  $\omega_4 = f(\omega_0)$  получается при склеивании отрезков фазовых траекторий, соответствующим различным интервалам определения правой части уравнения

движения (13). При этом надо учитывать, что  $\alpha\varphi_i + \beta\omega_i = b$  при  $i = 0, 4$ ;  $\alpha\varphi_2 + \beta\omega_2 = -b$ ;  $\omega_i = 0$  при  $i = 1, 3$ .

Точечное отображение отрезка без контакта  $L_1$  в отрезок  $L_2$  зададим функцией **соответствия**  $g$ :

$$\omega_2 = g(\omega_0). \quad (20)$$

В силу центральной симметрии правой части уравнения (13) относительно начала координат многолистной фазовой плоскости функция соответствия, определяющая точечное отображение полупрямой  $L_2$  в  $L_1$  запишется в виде

$$\omega_4 = -g(-\omega_2). \quad (21)$$

Вводя обозначение

$$f(s) = -g(s), \quad (22)$$

представим (20) и (21) в виде:

$$\omega_4 = f(f(\omega_0)). \quad (23)$$

Зависимость (23) есть функция последования, задающая точечное отображение  $\Pi$  отрезка без контакта  $L_1$  в себя. При исследовании особенностей траекторий системы (13) на фазовой плоскости определение неподвижных точек точечного отображения  $\Pi$  и анализ их устойчивости можно проводить на основе анализа функции соответствия  $f(s)$  (22), так как координаты неподвижных точек преобразования (23) совпадают с координатами неподвижных точек функции соответствия  $f(s)$  (22) и устойчивость их также совпадает.

## §3. Порядок выполнения работы

**3.1. Экспериментальная часть.** После входа в управляющую программу на экране монитора появляется главное меню. С его помощью можно выбирать режимы работы макета, изменять параметры системы управления двигателем, осуществлять включение и выключение работы макета и очищать экран монитора от фазовых траекторий системы.

Главное меню содержит следующие пункты:

- очистка (позволяет очищать экран от фазовых траекторий системы),
- подбор (предназначен для определения параметров математической модели, соответствующих реальным траекториям),
- режим (позволяет выбрать вариант математического моделирования системы или работу на экспериментальной установке),
- параметры (позволяет выбирать параметры системы управления двигателем:  $K_\varphi$ ,  $K_v$  — коэффициентов в уравнении (13)),
- старт (включение управления двигателем макета),
- выход (выход из программы после окончания работы).

При выполнении работы на экспериментальной установке выбирается в главном меню пункт «Режим» и в нем пункт — экспериментальная установка. После входа в этот пункт на экране монитора появляется изображение фазовой плоскости системы с координатами «Угол» и «Скорость».

При выключенном тумблере питания двигателя на блоке питания установки (правый тумблер вверх) цепь управления двигателя компьютером не замкнута и движение вала макета не начнется. Это дает возможность проверить работу датчиков макета и наблюдать ее фазовые траектории при движении только под действием момента сил сухого трения. Для этого толчком руки вала придается ненулевая угловая скорость и затем некоторое время вал движется по инерции. Фазовая траектория имеет вид параболы и после прихода изображающей точки на фазовой плоскости на прямую  $\omega = 0$  движение прекращается.

После выбора пункта главного меню «Старт» и включения тумблера питания двигателя на блоке питания установки начнется движение вала макета. Перед включением тумблера питания двигателя систему можно выводить в различные начальные условия по координате (углу  $\varphi$ ), для того, чтобы наблюдать сходимости фазовых траекторий к предельному циклу независимо от начальных условий.

После каждого выключения двигателя с помощью пункта главного меню «Очистка» рекомендуется очищать экран от полученных траектории.

Выбирая в пункте главного меню «Параметры» следующие значения коэффициента при угловой скорости  $K_v = 0, 2, 4$ , можно видеть зависимость предельного цикла от этого параметра.

При выполнении работы для различных значений коэффициента  $K_v$  надо определить наибольшие значения угловой скорости движения по предельному циклу  $\omega_*$ . Одна клеточка на фазовой плоскости соответствует величине угла  $\varphi = 2, 3$  [1] и угловой скорости  $\omega = 4, 75$  [1/с]. Работа выполняется при постоянном значении коэффициента  $K_\varphi = 5$ .

**3.2. Расчетная часть.** При выполнении расчетной части работы необходимо:

- Для описанной в пункте 2.1 процедуре построения точечного отображения получить аналитический вид функции **соответствия**  $f(s)$  (22). Для этого необходимо получить аналитический вид фазовых траекторий систем (15), (17) и учесть уравнения, задающие положение в моменты времени  $t_0, t_1, t_2$  изображающей точки на отрезках изменения момента двигателя и момента сил сухого трения (14), (16), (19).

- Получить уравнение, определяющее  $\omega_*$  — неподвижную точку точечного отображения с функцией соответствия  $f(s)$  (22).

- Доказать, что угловая скорость  $\omega_*$  определяет устойчивую неподвижную точку точечного преобразования отрезка без контакта  $L_1$  в себя.

- Численно определить наибольшую величину угловой скорости движения по предельному циклу и сравнить ее с полученной при эксперименте. При выполнении расчетов использовать следующие значения параметров системы:

$$M/J = 49,3 \frac{1}{c^2}, \quad M_0/J = 29,3 \frac{1}{c^2}, \\ b/\alpha = 2,3, \quad \beta/\alpha = 0,083 K_v \text{ с.}$$

## Литература

1. *Андронов А. А.* Собрание трудов. – М : АН СССР, 1956.
2. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. – М : Наука, 1976.
3. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – М : Наука, 1972.
4. *Неймарк Ю. И., Коган Н. Я., Савельев В. П.* Динамические модели теории управления. – М : Наука, 1985.
5. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М : Физматгиз, 1961.
6. *Булгаков Б. В.* Колебания. – М : Гостехиздат, 1954.
7. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М : Наука, 1981.
8. *Андронов А. А., Баутин Н. Н.* Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности. // ДАН СССР. Т. 46. № 4. 1945.
9. *Раушенбах Б. В., Токарь Е. И.* Управление ориентацией космических аппаратов. – М : Наука, 1974.
10. *Гаушус Э. В.* Исследование динамических систем методом точечных преобразований. – М : Наука, 1975.

*Исправления и пожелания ждем на [psvr@moids.ru](mailto:psvr@moids.ru)*