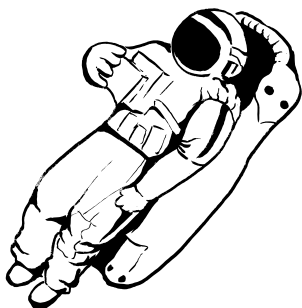


**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет



**ТЕСТИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА
СБЛИЖЕНИЯ УСТРОЙСТВА
СПАСЕНИЯ КОСМОНАВТА С
МЕЖДУНАРОДНОЙ
КОСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИЕЙ**

**ЗАДАЧА
СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ
МЕХАНИКЕ**

Предварительная электронная версия

2018

ЗАДАЧА СПЕЦПРАКТИКУМА
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

**ТЕСТИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА СБЛИЖЕНИЯ
УСТРОЙСТВА СПАСЕНИЯ КОСМОНАВТА С
МЕЖДУНАРОДНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ
СТАНЦИЕЙ**

*В.В. Александров, Д.И. Бугров, А.П. Кручинина,
А.В. Лебедев, С.С. Лемак, К.В. Тихонова,
В.А. Чертополохов, Н.Э. Шуленина*

*Под редакцией
профессора Владимира Васильевича Александрова,
профессора Юрия Владимировича Болотина
Рецензент Игорь Леонидович Антонов*

Редактор	Степан Степанович Лемак
Верстка	Маргарита Дмитриевна Белоусова Анна Павловна Кручинина
Иллюстрации	Алена Павловна Кручинина

ТЕСТИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА СБЛИЖЕНИЯ УСТРОЙСТВА СПАСЕНИЯ КОСМОНАВТА С МЕЖДУНАРОДНОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СТАНЦИЕЙ

*В.В. Александров, Д.И. Бугров, А.П. Кручинина,
А.В. Лебедев, С.С. Лемак, К.В. Тихонова,
В.А. Чертополохов, Н.Э. Шуленина*

Введение

При работах в космосе высока степень риска, в связи с чем актуальны тренировка и тестирование космонавтов на Земле при помощи специализированного оборудования. В наше время существуют достаточно мощные компьютеры, позволяющие моделировать процессы, происходящие на орбите, в реальном времени.

В работах [6] и [7] была рассмотрена задача сближения космонавта с космической станцией и создана математическая модель для применения на тренажерах.

Сближение устройства спасения космонавта (УСК) с орбитальной станцией в экстремальной ситуации потери контакта при ограниченных энергоресурсах и времени функционирования системы жизнеобеспечения является сложным управляемым процессом. Полуавтоматическое управление сближением, являющееся комбинацией автоматического и персонального управлений движением состоит из пяти этапов:

- 1) автоматическое демпфирование углового движения УСК, например, с помощью маховиков;
- 2) визуальный поиск причала, например, в случае сближения с Международной космической станцией (МКС);

- 3) программный поворот УСК на угол, найденный на втором этапе;
- 4) программный режим сближения УСК с МКС;
- 5а) автоматическая стабилизация программного режима сближения;
- 5б) визуальная стабилизация программного режима сближения в экстремальной ситуации.

Требуется получение показателей качества, оценивающих действия космонавта при возможных наихудших начальных и постоянно действующих на него возмущений. Для этого используется методика тестирования точности стабилизации управляемых систем, рассмотренная в работах [1] и [2]. По результатам тестирования, вырабатываются рекомендации для действий космонавта на орбите и необходимость дополнительных тренировок.

Задача практикума состоит из:

1. описания задач полуавтоматического управления сближением УСК с орбитальной станцией МКС;
2. записи и обработки данных о совместных перемещениях головы и глаз оператора при поиске объекта, расположенного вне центрального поля его зрения;
3. ознакомления с алгоритмами автоматического сближения УСК с МКС;
4. изучения методики максиминного тестирования качества персонального управления движением и ее применение в задаче сближения УСК с МКС;
5. проведения второго этапа тестирования качества визуальной стабилизации программного сближения УСК с МКС на панорамном стенде виртуальной реальности (ПСВР) МГУ;
6. выполнения и сдача заданий по полуавтоматическому сближению УСК с МКС.

Таким образом, на примере задачи сближения УСК с МКС рассматриваются принципы формирования полуавтоматического управления движением в форме композиции алгоритма автоматического управления и персонального управления.

Математическое и программное обеспечение этой задачи спецпрактикума создано в лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем (МОИДС) Отдела прикладных исследований по математике и механике механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

§1. Задача сближения устройства спасения космонавта с орбитальной станцией

1.1. Задача спасения космонавта. При работе космонавта вне орбитальной станции (например, при проведении монтажных работ) возможны различные внештатные ситуации, в число которых входит потеря физического контакта со станцией. Это может быть вызвано отказом средств фиксации страховочного троса, разрушением поручня, а также человеческими ошибками при страховке и т.п. Не имея возможности сохранить контакт, космонавт отделяется от станции и движется в сторону открытого космоса, при этом имея некоторую угловую скорость. Основной задачей в этой ситуации оказывается обеспечение возврата космонавта на станцию в кратчайшие сроки, поскольку у устройств поддержания жизни, расположенных в скафандре, ограничено время работы. Для тех случаев, когда отсутствуют дополнительные средства обеспечить спасение, и космонавту приходится полагаться только на свои возможности, было разработано устройство спасения космонавта (УСК).

1.2. Схема УСК. Устройство спасения космонавта, спроектированное для применения на международной космической станции, представляет собой реактивный ранец. Он крепится на скафандре «Орлан-М» при помощи охватывающей рамы и питается от его батареи. По углам ранца расположены четыре группы по четыре реактивных микродвигателя, работающих на сжиженном газе и направленных ортогонально друг другу в каждом из углов. Устройство допускает проход через люк диаметром 0,8 метра

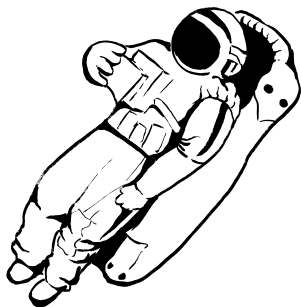


Рис. 1

и приводится в действие переключателем, размещенным на пульте управления скафандра.

В полуавтоматическом режиме система обеспечивает стабилизацию космонавта по трем осям, а также позволяет вручную управлять поворотами вокруг одной выбранной оси с ограниченной угловой скоростью.

Помимо стабилизации угловых вращений, двигатели позволяют перемещаться вдоль каждой из трех осей, связанных с рамой.

Общий вид устройства можно видеть на рисунке 1. При возникновении внештатной ситуации, космонавт самостоятельно включает УСК, сразу после чего происходит автоматическое гашение приобретенных в момент отрыва от станции угловых скоростей с помощью микродвигателей.

Дальнейшая последовательность действий космонавта (циклограмма) при возвращении на станцию состоит из следующих этапов:

1. определение своего положения относительно люков станции;
2. поворот УСК в направлении доступного люка;
3. сближение со станцией.

Приблизившись к люку, космонавт должен погасить свою скорость до уровня, позволяющего коснуться станции без удара.

1.3. Визуальный поиск входного люка МКС и стратегия автоматического управления сближением.

Предположим, что начальный этап, когда происходит автоматическое гашение угловых скоростей УСК закончился и космонавт может начать визуальный поиск входного люка МКС. Люк может находиться как прямо перед космонавтом, так и в произвольной точке его поля зрения.

Поле зрения. Поле зрения — это совокупность видимых точек пространства, которые способен распознать глаз в неподвижном состоянии. В горизонтальной плоскости двумя глазами поле зрения человека составляет около 180° . Четкое видение, которое обеспечивает, например чтение, реализуется центральной частью сетчатки, содержащей наибольшую плотность фоторецепторов — *fovea*. Этот тип зрения называется центральным.

Подробно рассмотреть мы можем только объект, находящийся в поле центрального зрения, если скорость движения изображения объекта по *fovea* не превышает $4^\circ/\text{с}$. При наличии относительного движения рассматриваемого объекта по отношению к глазу четкое видение невозможно. Например, человек не может прочитать надпись на объекте, если относительная скорость движения объекта превышает пороговую.

Для создания визуального окружения, как и в кино, важна частота обновления кадров. Принято считать, что минимальная частота слития световых стимулов, когда дискретные кадры начинают восприниматься как непрерывное движение, равняется 24 Гц. Это верно, если все изображение попадает на достаточно узкую центральную область сетчатки *fovea*. Для периферического зрения минимальный комфортный порог составляет около 60 Гц. Поскольку требуется создавать изображения для двух глаз, фактически необходимо подготавливать визуальный поток с частотой 120 кадров в секунду.

Бинокулярным зрением человека обеспечивается в рамках 110° . Периферическое зрение является монокулярным.

Бинокулярное зрение. При одновременном взгляде двумя глазами возникает некоторое различие, или диспарат-

ность, образов, проецирующихся на сетчатку каждого глаза. Подсознательная оценка относительного расположения световых раздражителей позволяет человеку оценивать расстояния до предметов и их размеры — он способен почувствовать изменение глубины, создающее сдвиг изображения на сетчатках на несколько угловых секунд. Однако восприятие человека устроено таким образом, что изображения предметов, попавшие на соответствующие друг другу участки глаз, сливаются в одно.

Таким образом, для осуществления четкого видения необходимо стабилизировать изображение на сетчатке обоих глаз. При ручной стабилизации движения этот эффект играет немаловажную роль.

Ориентация в пространстве. Для рассмотрения окружающего пространства человеку не всегда достаточно исключительно движений глаз. Для рассмотрения объектов находящихся в периферическом поле зрения он должен менять ориентацию взора, реализующуюся в результате сложного движения, складывающегося из переносного движения головы и относительного движения глазных яблок. Стабилизацию взора при совместном движении головы и глаза обеспечивает вестибуло-окулярный рефлекс.

Вестибуло-окулярный рефлекс (ВОР) — это движение глаз позволяющее стабилизировать изображение на *fovea*.

Для определения изменения ориентации в пространстве рыб, птиц, рептилий и млекопитающих используется вестибулярный аппарат. Этот орган расположен у млекопитающих во внутреннем ухе и состоит из двух частей: отолитовых органов и полукружных каналов¹⁾. Отолитовые органы в основ-

¹⁾Математическая модель полукружных каналов создана в лаборатории МОИДС в сотрудничестве с лабораторией нейрофизиологии Автономного университета штата Пуэбла (Мексика) [9–11]. Надо отметить, что эта группа из шести инерциальных биосенсоров углового ускорения до настоящего времени не имеет аналогов в технике. Только в 2013 году голландскими инженерами с использованием последних исследований, в том числе и результатов нашего моделирования [11], создан технический датчик углового ускорения [12], аналогичный биологическому инерциальному сенсору.

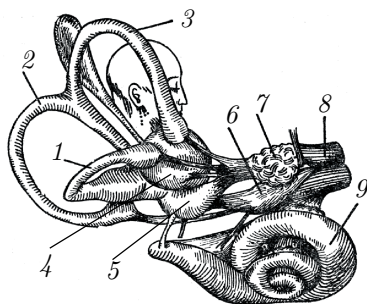


Рис. 2. 1, 2, 3 — соответственно горизонтальный, задний и передний полукружной канал; 4, 5 — отолитов аппарат; 6, 7 — нервные ганглии; 8 — вестибулярный нерв; 9 — улитка.

ном чувствительны к линейным ускорениям, полукружные каналы реагируют на угловые ускорения. Шесть полукружных каналов расположены в плоскостях, расположенных под углами 84° – 98° друг к другу. Можно считать, что каналы попарно перпендикулярны. Каждый из каналов реагирует на угловое ускорение одного направления. Полукружные каналы, связаны через самую короткую в организме трехнейронную цепочку с глазодвигательными мышцами. Реакция глаз на вращение происходит рефлекторно, минуя высшие структуры центральной нервной системы.

Движение глаз — одно из самых быстрых движений доступных человеку. Например, поворот на 40° глаз реализуется за 0,08 с, максимальная скорость поворота глаза превышает $800^{\circ}/с$. Шейным мышцам, чтобы повернуть голову на тот же угол необходимо порядка 0,5 с, максимальная скорость поворота головы не превысит $500^{\circ}/с$. Рассмотрим ситуации, когда человек замечает интересующий объект. Допустим, человек рассматривает пространство перед собой при этом его глаз совершает сканирующие движения. Если человек замечает заинтересовавший его объект периферическим зрением, то сначала начинается движение глаза так, чтобы проекция изображения объекта оказалась на чувствительном пятне «fovea». Затем происходит поворот головы и противовращение глаза, для перехода последнего в исходное поло-

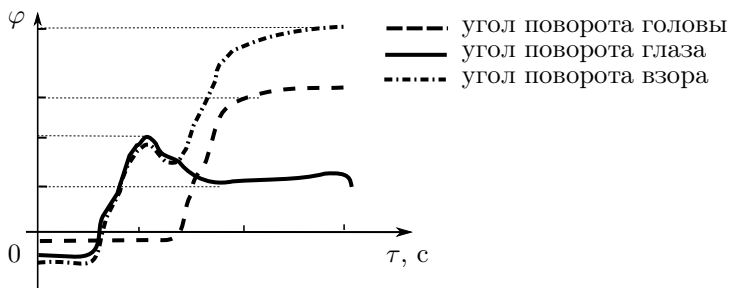


Рис. 3

жение относительно головы с сохранением условий четкого видения (рис. 3).

При фиксации взгляда на точке и пассивных поворотах головы благодаря ВОР сохраняется четкое видение. В условиях невесомости и микрогравитации информация от вестибулярного сенсора не вписывается в привычные земные ситуации в результате вестибуло-сенсорного конфликта. Из-за этого механизм вестибуло-окулярного рефлекса (ВОР) нарушается, и установка взгляда у конкретного человека может происходить дольше, чем обычно.

Для получения информации о ВОР в задачах практики используются технические сенсоры — система комнатной навигации (СКН) и видеоокулограф.

В рамках практикума будет продемонстрирован описанный выше механизм установки взгляда в привычных условиях гравитационного поля. Испытатель, находясь перед экраном в кресле платформы, выполняет задачу нахождения и фиксации причала, который необходим для стыковки. На экране проецируется изображение МКС, необходимо сделать выбор из нескольких стыковочных узлов. Для распознавания нужного причала испытателю необходимо поворачивать голову в разные стороны, так как нужные точки находятся на границе ясной видимости глаз. При установке и фиксации взгляда на определенную точку включается безусловный вестибуло-окулярный рефлекс.

Информация об угловом положении головы испытателя поступает от СКН, а о положении глазных яблок относительно головы — от видеоокулографа. По полученной информации можно определить запаздывание при визуальном поиске входного люка МКС. На практике при подготовке пилотов используют простой критерий — например, для пилотирования вертолетов испытуемый может иметь запаздывание в установке взора не более одной секунды.

После визуального определения необходимого угла поворота УСК, у космонавта возникает потребность построения стратегии управления сближением УСК с МКС. Рассмотрим два варианта:

- а) автоматическое управление;
- б) полуавтоматическое управление.

Вариант автоматического управления предполагает решение трех задач: программный поворот УСК, минимаксная стабилизация углового положения и программный режим сближения.

Вариант полуавтоматического управления рассмотрим в следующей постановке. После программного разворота космонавт обнаружил неисправность в системе автоматического управления и вынужден перейти полностью на персональное управление, заключающееся в стабилизации программного режима сближения. В разделе 1.6 кратко опишем стратегию автоматического управления сближением. Начиная с раздела 2 рассмотрим вариант персонального управления и тестирование его качества на установке «Панорамная система виртуальной реальности» (ПСВР).

1.4. Введение систем координат и параметров системы УСК-станция-Земля Итак, пусть центр масс Земли неподвижен и соответствует точке M , а вокруг Земли движется орбитальная станция, причем точка K соответствующая входному люку на станции движется по идеальной круговой орбите с постоянной угловой скоростью Ω .

Свяжем с люком систему координат $Ky_1y_2y_3$, где ось y_3 направлена вдоль вектора \overrightarrow{MK} , y_2 — по оси вращения, а ось y_1 дополняет систему до правой. Такая система координат называется *орбитальной*.

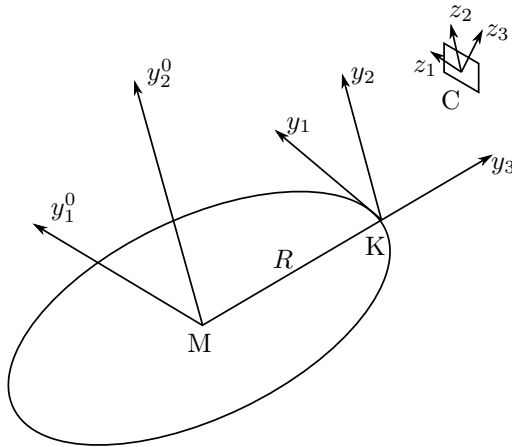


Рис. 4

В то же время, с Землей связана система $My_1^0 y_2^0 y_3^0$ с осями $y_1^0 y_2^0 y_3^0$, параллельными $y_1 y_2 y_3$ соответственно.

Недалеко от станции расположен космонавт с УСК, которое представляет собой прямоугольную раму массой m со сторонами $2a$ и $2b$. По углам рамы находятся по четыре двигателя (рис. 4).

Обозначим точку геометрического центра рамы, совпадающего с центром масс системы космонавта и УСК, как C и свяжем с ней систему координат $Cz_1 z_2 z_3$, где координатные оси совпадают с осями симметрии УСК.

Введем тяги маршевых (направленных вдоль оси z_1 , см. рис. 4) двигателей F_{ij} , причем будем считать, что они работают в известном программном режиме $F_{ij}^p(t) = F^p$ с некоторой неизвестной заранее ошибкой $\Delta F_{ij}^r(t)$: $F_{ij}(t) = F_{ij}^p(t) + \Delta F_{ij}^r(t)$, $i = 1..4, j = 1, 4$.

Будем считать, что тяги остальных (боковых) двигателей реализуются в заранее известных пределах: $0 \leq F_{ij} \leq F_{\max} = \text{const}$, $i = 1..4, j = 2, 3$.

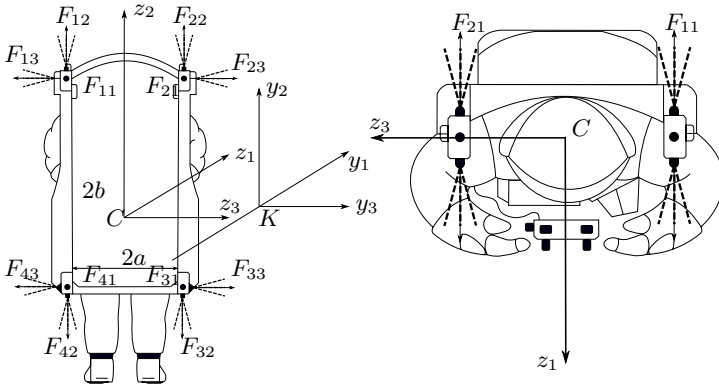


Рис. 5

Предполагается, что расход топлива при выполнении сближения со станцией и соответствующее изменение массы модуля таковы, что ими можно пренебречь.

Рассмотрим процесс сближения с того момента, когда космонавт уже развернулся в сторону люка и его угловая скорость равна нулю, при этом центр масс УСК движется с некоторой скоростью, удаляясь от станции.

Пусть ускорение, вызванное притяжением Земли в точке \$K\$ равно \$g_K\$. Поскольку расстояния, на которые перемещается модуль, малы по сравнению с расстоянием до центра Земли \$|KM| = R\$, изменением \$g_K\$ в процессе сближения в дальнейшем будем пренебрегать.

1.5. Уравнения движения УСК в окрестности станции Запишем уравнения движения центра масс УСК в системе отсчета \$Ky_1y_2y_3\$, связанной со станцией

$$m \left(\frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} + \vec{a}_e + \vec{a}_r \right) = \vec{f} + m g \vec{K}, \quad (1)$$

где \$\vec{a}_e = [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times (\vec{R} + \vec{y})]]\$ и \$\vec{a}_r = 2[\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{y}}{dt}]\$ — переносное и кориолисово ускорения точки \$C\$, \$\vec{f}(t)\$ — тяги двигателей. Но \$m g \vec{K} = m [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{R}]]\$, поэтому уравнение (1) переписыва-

ется как

$$m \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} = \vec{f} - m \left[\vec{\Omega} \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{y} \right] \right] - 2m \left[\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{y}}{dt} \right] \quad (2)$$

Тяга каждого двигателя находится в пределах 3–5 Н, в то время как порядок угловой скорости вращения вокруг Земли Ω для МКС равен 10^{-3} рад./с. Порядок величин координат УСК y_1, y_2, y_3 составляет 10^2 м, его скорости $\frac{dy}{dt} = 10^{-1}$ м/с, а масса УСК с космонавтом — $m = 225$ кг.

Из этого можно сделать вывод, что порядок силы $m \left[\vec{\Omega} \times \left[\vec{\Omega} \times \vec{y} \right] \right]$ составляет 10^{-3} Н. Времена и расстояния, характерные для задачи, таковы, что этой силой можно пренебречь. В то же время, порядок силы Кориолиса несколько выше — 10^{-2} Н, однако для упрощения задачи будем игнорировать и ее. Получаем:

$$m \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} = \vec{f}. \quad (3)$$

Таким образом, в полученном уравнении полностью отсутствуют члены, связанные с гравитацией и обращением МКС вокруг Земли.

Из-за сложности управления большим набором независимых двигателей, в УСК были введены отдельные управляющие сигналы для обеспечения линейного движения и поворота.

Рассмотрим случай линейного движения центра масс УСК. Проекция тяги двигателей на оси приборной системы $Cz_1z_2z_3$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_{z1} &= k_1 \sum_{i=1}^4 F_{i1}^p - (1 - k_1) \sum_{i=1}^4 F_{i4}^p, \\ \Delta f_{z1} &= k_1 \sum_{i=1}^4 \Delta F_{i1} - (1 - k_1) \sum_{i=1}^4 \Delta F_{i4}, \\ f_{z2} &= k_2(F_{32} + F_{42}) - (1 - k_2)(F_{12} + F_{22}), \\ f_{z3} &= k_3(F_{13} + F_{43}) - (1 - k_3)(F_{23} + F_{33}), \end{aligned} \quad (4)$$

где k_i , $i = 1, 2, 3$ принимают значения 0, 1 в зависимости от направления силы тяги вдоль соответствующей оси Cz_i . Кроме того, в тягах боковых двигателей отсутствуют ошибки, что можно записать как $\Delta f_{z2} = \Delta f_{z3} = 0$.

Уравнения движения центра масс УСК в проекции на оси системы $Ky_1y_2y_3$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= \sum_{i=1}^3 \pi_{1i}(f_{zi} + \Delta f_{zi}) \\ m\ddot{y}_2 &= \sum_{i=1}^3 \pi_{2i}(f_{zi} + \Delta f_{zi}) \\ m\ddot{y}_3 &= \sum_{i=1}^3 \pi_{3i}(f_{zi} + \Delta f_{zi}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Pi = \{\pi_{ji}\}$ — матрица поворота системы $Cz_1z_2z_3$ относительно $Ky_1y_2y_3$, которая в нашем приближении считается инерциальной.

Обозначим вектор абсолютной угловой скорости системы $Cz_1z_2z_3$ в проекциях на ее оси как $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда изменение матрицы Π во времени описывается уравнениями Пуассона

$$\frac{d\Pi}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \Pi.$$

Теорема об изменении кинетического момента при движении вокруг центра масс может быть записана в виде:

$$\frac{d}{dt} I\omega + \omega \times I\omega = M_z + \Delta M_z, \quad (6)$$

где M_z — суммарный момент сил, действующих на модуль, в проекции на оси системы Cz , а ΔM_z — суммарный паразитный момент, вызванный разнотяговостью двигателей.

Будем рассматривать случай, когда тензор инерции модуля в осях Cz имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

то есть они являются для него главными.

По соображениям малости, также отбросим влияние моментов сил гравитации и моментов сил аэродинамического сопротивления на движение модуля вокруг центра масс.

В режиме поворота момент сил M_z формируется за счет активных сил и может быть вычислен по формулам

$$\begin{aligned}
 M_{z1} &= k_1^* a (F_{13} + F_{33}) - (1 - k_1^*) a (F_{23} + F_{43}) \\
 M_{z2} &= k_2^* a (F_{14} + F_{44} + F_{21} + F_{31}) - \\
 &\quad - (1 - k_2^*) a (F_{11} + F_{41} + F_{24} + F_{34}) \quad (7) \\
 M_{z3} &= k_3^* b (F_{14} + F_{24} + F_{31} + F_{41}) - \\
 &\quad - (1 - k_3^*) b (F_{11} + F_{21} + F_{34} + F_{44}).
 \end{aligned}$$

где k_i^* , $i = 1, 2, 3$ принимают значения 0, 1 в зависимости от направления активного момента вдоль соответствующей оси Cz_i . Паразитный момент ΔM_z вычисляется аналогично.

В режиме линейного движения $M_z = 0$, а паразитный момент ΔM_z представляется в виде

$$\begin{aligned}
 \Delta M_{z1} &= 0 \\
 \Delta M_{z2} &= k_1 a (\Delta F_{21} + \Delta F_{31} - \Delta F_{11} - \Delta F_{41}) - \\
 &\quad - (1 - k_1) a (\Delta F_{24} + \Delta F_{34} - \Delta F_{14} - \Delta F_{44}) \quad (8) \\
 \Delta M_{z3} &= k_1 b (\Delta F_{14} + \Delta F_{24} - \Delta F_{34} - \Delta F_{44}) - \\
 &\quad - (1 - k_1) b (\Delta F_{11} + \Delta F_{21} - \Delta F_{31} - \Delta F_{41}).
 \end{aligned}$$

В автоматическом режиме УСК способно управлять тягой каждого двигателя независимо, что позволяет обеспечить разворот вокруг любой выбранной в трехмерном пространстве оси.

Будем рассматривать только случай движения модуля в плоскости орбиты Ky_1y_3 . Считаем, что в процессе работы двигателей расходуется рабочее тело, но масса рабочего тела мала по сравнению с общей массой УСК, поэтому массу и моменты инерции УСК будем считать постоянными. Из урав-

нений динамики (5) и (6) получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = (f_{z1} + \Delta f_{z1}) \cos \varphi + f_{z3} \sin \varphi \\ m \frac{d^2 y_3}{dt^2} = f_{z3} \cos \varphi - (f_{z1} + \Delta f_{z1}) \sin \varphi \\ I_{22} \frac{d\omega_2}{dt} = M_{z2} + \Delta M_{z2} \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_2, \\ \frac{d\mu}{dt} = -k(M_{z2} + \Delta M_{z2}). \end{array} \right. \quad (9)$$

где φ — угол поворота системы Cz относительно Ky , μ — масса рабочего тела, $k > 0$ — коэффициент расхода рабочего тела.

1.6. Программный поворот УСК, минимаксная стабилизация и программный режим сближения с МКС

Программный поворот. Рассмотрим задачу плоского поворота устройства спасения космонавта (УСК). Предполагаем, что первый этап сближения УСК с МКС выполнен, то есть УСК неподвижно относительно станции. Космонавт визуально нашел причал, к которому он собирается пристыковаться, и определил угол, на который требуется повернуть УСК для того, чтобы начать сближение.

Уравнения плоского движения УСК в процессе разворота можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \\ \frac{d\mu}{dt} = -k|M|, \end{array} \right.$$

где I — осевой момент инерции УСК, φ — угол поворота УСК, M — момент, создаваемый двигателями, $M \in \{-M^*, 0, M^*\}$, μ — масса рабочего тела, $k > 0$ — коэффициент расхода рабочего тела. Здесь по сравнению с уравнением (9) исключены возмущения и не рассматривается линейное движение

УСК. Чтобы уравнения движения стали линейными, требуется исключить из них модуль. Для этого можно представить вращающий момент в виде разности двух неотрицательных моментов, $M = M_1 - M_2$, $M_1 = \{0, M^*\}$, $M_2 = \{0, M^*\}$. Уравнения движения примут вид

$$\begin{cases} I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_1 - M_2, \\ \frac{d\mu}{dt} = -k(M_1 + M_2). \end{cases}$$

Начальные условия известны, $\varphi(0) = \varphi_0 \neq 0$, $\frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$, $\mu(0) = \mu_0 > 0$. Решим оптимальную задачу — найти закон изменения $M_1(\cdot)$, $M_2(\cdot)$, переводящий систему из заданного начального положения в известное конечное $\varphi(t_k) = 0$, $\frac{d\varphi}{dt}(t_k) = 0$ при заданном t_k с минимальным расходом рабочего тела, то есть обеспечивающего $\max \mu(t_k)$.

Для решения этой задачи будем использовать принцип максимума Понтрягина [13]. Прежде всего, расширим возможности управления, будем считать, что оно может принимать все промежуточные значения, $0 \leq M_1 \leq M^*$, $0 \leq M_2 \leq M^*$. Запишем уравнения движения в форме Коши, вводя новые переменные $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, $x_3 = \mu$, $x_4 = t$. Получим задачу оптимизации прихода из заданного начального положения на многообразии (с нефиксированным временем) для системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (M_1 - M_2)/I, \\ \frac{dx_3}{dt} = -k(M_1 + M_2), \\ \frac{dx_4}{dt} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \varphi_0, & x_1(t_k) &= 0, \\ x_2(0) &= 0, & x_2(t_k) &= 0, \\ x_3(0) &= \mu_0, & x_3(t_k) &\rightarrow \max, \\ x_4(0) &= 0, & x_4(t_k) &= t_k. \end{aligned}$$

Введем вектор сопряженных переменных $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T$. Составим функцию Понтрягина $H = x_2\psi_1 + (M_1 - M_2)/I\psi_2 - k(M_1 + M_2)\psi_3 + \psi_4$. На оптимальном управлении эта функция достигает своего максимума, откуда

$$M_1^{opt} = \begin{cases} M^*, & \text{если } \psi_2/I - k\psi_3 > 0, \\ 0, & \text{если } \psi_2/I - k\psi_3 < 0, \end{cases}$$

$$M_2^{opt} = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_2/I + k\psi_3 > 0, \\ M^*, & \text{если } \psi_2/I + k\psi_3 < 0. \end{cases}$$

Сопряженные переменные удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \\ \frac{d\psi_3}{dt} = 0, \\ \frac{d\psi_4}{dt} = 0. \end{cases}$$

Условия трансверсальности дают граничное условие для сопряженной переменной $\psi_3(t_k) = 1$, откуда $\psi_3(t) \equiv 1$ и

$$M_1^{opt} = \begin{cases} M^*, & \text{если } \psi_2/I - k > 0, \\ 0, & \text{если } \psi_2/I - k < 0, \end{cases}$$

$$M_2^{opt} = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_2/I + k > 0, \\ M^*, & \text{если } \psi_2/I + k < 0. \end{cases}$$

Особый режим управления может существовать при $\psi_2/I - k\psi_3 \equiv 0$ или $\psi_2/I + k\psi_3 \equiv 0$. В обоих случаях это приводит к $\psi_1(t) \equiv 0$ и далее $\psi_2(t) \equiv kI$ для первого случая, $\psi_2(t) \equiv -kI$ — для второго. Причем в обоих случаях $\psi_2(t)$ является константой и не меняет своего значения на всем интервале $0 \leq t \leq t_k$. Но тогда одно из управлений не переключается и остается постоянным в течение всего интервала движения, следовательно, суммарный вращающий момент, приложенный к объекту,

может быть либо неотрицательным, либо неположительным, и граничные условия задачи

$$\begin{aligned}x_1(0) &= \varphi_0, & x_1(t_k) &= 0, \\x_2(0) &= 0, & x_2(t_k) &= 0,\end{aligned}$$

невыполнимы.

Из линейной зависимости от времени ψ_2 , а следовательно, и функций переключения вытекает, что регулярные оптимальные управления M_1^{opt} и M_2^{opt} могут иметь не более одного переключения каждое.

Покажем, что при выполнении некоторых условий на параметры задачи существует решение, удовлетворяющее принципу максимума. Используя симметрию задачи по начальной и конечной скоростям, будем искать его в следующем виде. Пусть $\varphi_0 < 0$. Тогда рассмотрим управление

$$\begin{aligned}M_1^o(t) &= M^*, & M_2^o(t) &= 0, & 0 \leq t \leq t^* < t_k/2; \\M_1^o(t) &= 0, & M_2^o(t) &= 0, & t^* \leq t < t_k - t^*; \\M_1^o(t) &= 0, & M_2^o(t) &= M^*, & t^* \leq t \leq t_k.\end{aligned}$$

При таком управлении на участке $0 \leq t \leq t^*$ имеем

$$x_1(t) = \frac{M^*}{2I}t^2 + \varphi_0, \quad x_2(t) = \frac{M^*}{I}t,$$

при $t = t^*$ $x_1(t^*) = \frac{M^*}{2I}t^{*2} + \varphi_0$, $x_2(t^*) = \frac{M^*}{I}t^*$, а на участке $t^* \leq t \leq t_k/2$

$$x_1(t) = \varphi_0 + \frac{M^*t^*}{I}t - \frac{M^*t^*}{2I}.$$

Для симметричного решения должно выполняться условие $x_1(t_k/2) = \varphi_0/2$, и тогда получается квадратное уравнение для определения t^*

$$t^{*2} - t_k t^* - \frac{\varphi_0 I}{M^*} = 0,$$

решение которого

$$t^* = \frac{t_k}{2} - \sqrt{\left(\frac{t_k}{2}\right)^2 + \frac{\varphi_0 I}{M^*}}.$$

Условие неотрицательности подкоренного выражения связывает ресурсы управления M^* и инерционные характеристики объекта I с требуемым углом поворота φ_0 и временем поворота t_k .

В силу уравнений для сопряженных переменных $\psi_1(t) = \psi_{10} \equiv \text{const}$, $\psi_2(t) = -\psi_{10}t + \psi_{20}$. Получаем систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} -\psi_{10} \left(\frac{t_k}{2} - \sqrt{\left(\frac{t_k}{2}\right)^2 + \frac{\varphi_0 I}{M^*}} \right) + \psi_{20} &= kI, \\ -\psi_{10} \left(\frac{t_k}{2} + \sqrt{\left(\frac{t_k}{2}\right)^2 + \frac{\varphi_0 I}{M^*}} \right) + \psi_{20} &= -kI, \end{aligned}$$

решением которой является

$$\psi_{10} = \frac{kI}{\sqrt{\left(\frac{t_k}{2}\right)^2 + \frac{\varphi_0 I}{M^*}}}, \quad \psi_{20} = \frac{\psi_{10} t_k}{2}.$$

Максимизируемое в момент времени t_k значение $x_3(t_k)$ при таком управлении будет равняться

$$x_3(t_k) = \mu_0 - kM^*t_k + kM^* \sqrt{t_k^2 + \frac{4\varphi_0 I}{M^*}}.$$

Естественно, должно выполняться условие $x_3(t_k) \geq 0$, накладывающее ограничения на ресурсы управления M^* , инерционные характеристики объекта I , требуемый угол поворота φ_0 и время поворота t_k .

Для случая $\varphi_0 > 0$ решение получается аналогичным образом.

Пример 1.1

Рассмотрим задачу об оптимальном развороте при следующих значениях параметров: $I = 38,8$ кг м², $M^* = 0,32$ кг м²/с², $k = 1,2$ с/м², $\varphi_0 = -0,7$ рад, $t_k = 20$ с, $\mu_0 = 10$ кг. Для определения момента переключения t^* требуется найти наименьший положительный корень квадратного уравнения $t^{*2} - 20t^* + 84,875 = 0$, им является $t^* = 10 - \sqrt{15,125} \approx$

$10 - 3,889 = 6,111$ с. Получаем программный закон оптимального управления в виде

$$\begin{aligned} M_1^o(t) &= M^*, & M_2^o(t) &= 0, & 0 \leq t \leq 10 - \sqrt{15,125}; \\ M_1^o(t) &= 0, & M_2^o(t) &= 0, & 10 - \sqrt{15,125} \leq t < 10 + \sqrt{15,125}; \\ M_1^o(t) &= 0, & M_2^o(t) &= M^*, & 10 + \sqrt{15,125} \leq t \leq 20. \end{aligned}$$

В конечный момент времени остаток топлива составит $\mu(t_k) = 10 - 7,68 + 0,384\sqrt{400 - 339,5} \approx 10 - 7,68 + 0,384 \cdot 7,778 = 10 - 4,69325 = 5,30675$ кг.

Минимаксная стабилизация. Вследствие того, что начальные условия для оптимального поворота УСК известны неточно, получаем, что и по окончании программного поворота условия $\varphi(t_k) = 0$, $\frac{d\varphi}{dt}(t_k) = 0$ выполняться не будут. Тогда можно поставить и решить задачу об оптимальной стабилизации углового положения УСК и определении наилучшего начального положения УСК.

В отличие от предыдущего раздела будем полагать, что топливо не расходуется, уравнения движения принимают вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M.$$

Считаем, что начальные условия таковы, что $\varphi^2(0) + \dot{\varphi}^2(0) \leq \delta > 0$, ограничений на вращающий момент M нет. В виде Коши уравнения записываются как

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2, \\ \frac{d}{dt}x_2 = u, \end{cases}$$

где $x_1 = \varphi$, $x_2 = \frac{d}{dt}\varphi$, $u = M/I$ — управление. В качестве закона стабилизации выберем управление, минимизирующее функционал

$$\Phi(x(0), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) d\tau$$

для таких управлений $u(\cdot)$, при которых несобственный интеграл сходится. Здесь $x = (x_1, x_2)^T$.

В соответствии с общей теорией и результатам Р. Калмана [13], такое управление может быть найдено в виде $u^{opt} = -(0, 1)Lx$, где L — решение алгебраического уравнения Риккати

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T L + L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - L(0, 1)^T(0, 1)L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица L получается симметричной и положительно определенной,

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

соответственно $u^{opt} = -(1, \sqrt{3})x$, $M^{opt} = -I(1, \sqrt{3})(\varphi, \frac{d}{dt}\varphi)^T$.

Значение $\Phi^{opt}(x(0)) = \min_{u(\cdot)} \Phi(x(0), u(\cdot))$ находится в виде

$$\Phi^{opt}(x(0)) = x(0)^T Lx(0).$$

Таким образом, найденное оптимальное управление $u^{opt}(\cdot)$ (и, соответственно, $M^{opt}(\cdot)$) стабилизирует наш объект при начальном положении $x(0)$ с наименьшим значением функционала $\Phi(x(0), u(\cdot))$, при этом само значение функционала зависит от начального положения объекта $x(0)$.

Теперь можно поставить задачу — а каково же наилучшее начальное положение объекта, при котором наш минимизируемый функционал принимает свое максимальное значение? Ответив на этот вопрос, мы получим оценку сверху для значения функционала при оптимальном управлении и произвольных начальных условиях из области $\varphi^2(0) + \dot{\varphi}^2(0) \leq \delta$, а также сможем оценить произвольное управление объектом, сравнивая значение функционала на этом управлении и при найденных наилучших начальных условиях со значением на оптимальном управлении.

Для того, чтобы найти наилучшие начальные условия, мы воспользуемся соотношением

$$x(0)^T Lx(0) \leq \mu_{\max} \|x(0)\|^2,$$

где μ_{\max} — максимальное собственное число матрицы L . Так как по условиям задачи $\|x(0)\|^2 = x_1^2(0) + x_2^2(0) = \varphi^2(0) +$

$\frac{d}{dt}\varphi^2(0) \leq \delta$, то

$$\max_{\|x(0)\|^2 \leq \delta} x(0)^T Lx(0) = \mu_{\max}\delta$$

и достигается на нормированном собственном векторе матрицы L , отвечающем собственному числу μ_{\max} . Заметим, что в силу квадратичности критерия такой вектор заведомо не единственный, если максимум достигается на векторе $x^o(0)$, то такое же значение функционал примет и на векторе $-x^o(0)$. В нашем случае $\mu_{\max} = \sqrt{3} + 1$, $x^o(0) = \delta(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)^T$.

Как сказано в работе [14], динамическая игра между управлением и возмущением, под которым понимаются начальные условия, в рассматриваемой задаче всегда имеет седловые точки, поэтому решение задачи на минимакс будет тем же самым, что и на максимин. Это позволяет организовать тестирование качества автоматической стабилизации УСК следующим образом: в качестве начальных условий выбрать соответствующие одной из седловых точек $x^o(0) = \delta(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)^T$ и сравнить значение функционала $\Phi(x^o(0), u(\cdot))$ с оптимальным значением $\Phi(x^o(0), u^{opt}(\cdot)) = \delta(\sqrt{3} + 1)$.

Подробнее задача тестирования будет рассмотрена в разделе 2.

Отдельным вопросом является определение времени стабилизации. Изначально по постановке задачи это время считается бесконечным, что невыполнимо на практике. Поэтому предлагается процедуру тестирования (стабилизации) проводить до тех пор, пока текущая норма отклонения не уменьшится в 10 раз, то есть до момента t_s : $\varphi^2(t_s) + \frac{d}{dt}\varphi^2(t_s) \leq \delta/10$ (существование такого конечного момента времени при $u = u^{opt}(\cdot)$ следует из сходимости интеграла, задающего функционал $\Phi(x(0), u^{opt}(\cdot))$), но не далее чем заранее заданное время t_{fin} , определяющее полное время выполнения задания.

Программный режим сближения. Рассмотрим процесс программного сближения УСК со станцией после разворота на точку причаливания. Будем считать, что расстояние

от центра масс УСК до точки причаливания, а также время всего процесса настолько мало, что систему координат, с началом в точке причаливания C и связанную с МКС можно считать инерциальной. Кроме того, будем считать, что в начальный момент скорость центра масс УСК относительно станции, направлена вдоль прямой соединяющей центр масс с точкой причаливания. Тогда в идеальном случае (при отсутствии возмущающих факторов) движение вокруг центра масс УСК отсутствует и достаточно рассмотреть программное движение центра масс модуля по прямой, соединяющей центр масс с точкой причаливания. Уравнения (9), описывающие процесс сближения, можно переписать в следующем упрощенном виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v & y(0) &= y_0 < 0, & y(t_k) &= 0, \\ m \frac{dv}{dt} &= f & v(0) &= v_0 < 0, & v(t_k) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где m суммарная масса УСК с космонавтом, f — суммарная тяга маршевых двигателей УСК, y_0, v_0 — начальное положение и начальная скорость центра масс УСК, t_k — время сближения. Мы рассматриваем наиболее интересный случай, когда в начальный момент космонавт удаляется от станции $v_0 < 0$. Программную тягу двигателей $f(t)$ можно найти из решения экстремальной задачи

$$t_k \rightarrow \min_{|f(t)| \leq f_m} \quad (11)$$

при ограничениях (10) и фазовом ограничении $v(t) \leq v_m > 0$, возникающем из требований по безопасности процесса сближения. Необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями сложны и трудно реализуемые на практике [13, 14]. Решение нашей задачи для случая, когда оптимальная траектория состоит из двух регулярных кусков и одного промежутка с выходом на фазовое ограничение имеет следующий вид:

- а) на промежутке времени $[0, t_1]$ оптимальная тяга $f^0(t) = f_m$,
- б) на промежутке времени $[t_1, t_2]$ оптимальная тяга $f^0(t) = 0$,

в) на промежутке времени $[t_1, t_k]$ оптимальная тяга $f^0(t) = -f_m$.

Моменты времени t_1, t_2 и t_k таковы, что $v(t_1) = v_m$, а $y(t_k) = v(t_k) = 0$ и зависят от начальных условий сближения.

Пример 1.2. Найдем программную траекторию сближения модуля со станцией при следующих исходных данных: масса модуля — $m = 215$ кг; максимальная суммарная тяга маршевых двигателей — $f_m = 20$ Н; начальное расстояние до люка — $L = 10$ м; начальная относительная скорость модуля — $v(0) = -0,3$ м/с; максимальная скорость сближения $v_m = 0,2$ м/с;

На рис. 3 представлены зависимости программного ускорения модуля и скорости центра масс от времени. Общее вре-

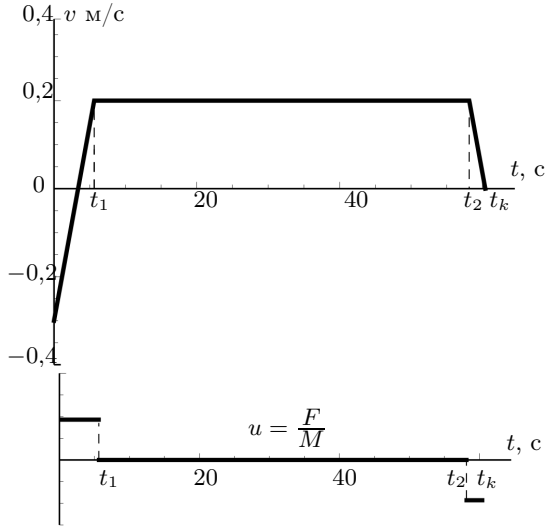


Рис. 6

мя сближения составляет $t_k = 60,4$ с, промежуток разгона $t_1 = 5,62$ с, момент начала торможения — $t_2 = 58,15$ с.

1.7. Уравнения в отклонениях относительно программного движения УСК

Рассмотрим ситуацию, когда этап угловой стабилизации за-

вершен и модуль ориентирован «лицом» к станции. У части двигателей могут возникать ошибки при отработке команд, начальные координаты и скорости УСК также даны с некоторой ошибкой. В этих предположениях, получим уравнения в отклонениях от идеального (при отсутствии ошибок) движения. После чего рассматривается задача о персональной стабилизации движения модуля с помощью боковых двигателей.

Будем считать, что углы поворота модуля и угловые скорости малы. Также исключим из рассмотрения расход топлива по причине его малого влияния на процесс персональной стабилизации. Тогда можно записать линеаризованное представление уравнений динамики (9)

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = f_{z1} + \Delta f_{z1} + \varphi f_{z3}, \\ m \frac{d^2 y_3}{dt^2} = f_{z3} - \varphi(f_{z1} + \Delta f_{z1}), \\ I_{22} \frac{d\omega_2}{dt} = M_{z2} + \Delta M_{z2}, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_2. \end{cases} \quad (12)$$

Запишем уравнения (12) в безразмерном виде, взяв в качестве характерных величин времени и длины T и L соответственно.

Здесь и далее $y'_i = \frac{y_i}{L}$ — безразмерные координаты, $u_{z3} = \frac{f_{z3} T^2}{mL}$, $u_{z1}^p = \frac{f_{z1} T^2}{mL}$ — безразмерные тяги двигателей, $v_{z1} = \frac{\Delta f_{z1} T^2}{mL}$ — безразмерные ошибки тяги маршевых двигателей, $M'_{zi} = M'_{zi} T^2 / I_{zi}$ — безразмерные моменты двигателей, а $\Delta M'_{zi} = \Delta M'_{zi} T^2 / I_{zi}$ — безразмерные паразитные моменты. Производную по безразмерному времени τ будем обозначать $(\dot{})$. Тогда

$$\begin{cases} \ddot{y}'_1 = u_{z1}^p + v_{z1} + \varphi u_{z3}, \\ \ddot{y}'_3 = u_{z3} - \varphi u_{z1}^p - \varphi v_{z1}, \\ \ddot{\varphi} = M'_{z2} + \Delta M'_{z2}. \end{cases} \quad (13)$$

Будем считать, что в идеальном случае (при отсутствии возмущающих факторов) в начальный момент времени модуль ориентирован таким образом, что $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, точка C лежит на оси y_1 и скорость модуля направлена вдоль этой же оси. Возмущающими факторами в задаче сближения являются ошибки тяги маршевых двигателей, а также ошибки в определении начальной позиции и скорости модуля УСК.

Если возмущения отсутствуют и тяги боковых двигателей u_{zi} равны нулю, то можно вычислить программный режим работы маршевых двигателей $u_{z1}^p(t)$ такой, что в некоторый момент времени t_k центр масс УСК будет иметь нулевые скорость и координаты в системе координат $Ky_1y_2y_3$.

Как следует из прошлого параграфа программное движение состоит из трех этапов:

1) Время от 0 до τ_1 — гашение начальной скорости удаления от станции вместе с разгоном, когда работают только маршевые двигатели первой группы F_{i1}^p ,

2) Время от τ_1 до τ_2 — дрейф, т.е. движение с выключенными маршевыми двигателями,

3) Время от τ_2 до τ_k — торможение, когда работают маршевые двигатели второй группы F_{i4}^p .

Интегрируя систему (13) при заданной программной тяге, получим программное движение модуля, которое в нашем случае представляет собой движение по прямой с переменной скоростью.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда возмущающие факторы присутствуют. Положим, что величины возмущений v_{zi} и тяги боковых двигателей u_{zi} на порядок меньше тяги маршевых двигателей u_{z1}^p . Рассмотрим случай, когда боковые двигатели работают только в режиме поступательного движения, т.е. момент $M'_{z2} = 0$. Отклонения по углу будем считать малыми.

Для этого случая выпишем линеаризованные уравнения в отклонениях от идеального (программного) движения со-

гласно (13):

$$\begin{cases} \ddot{x}'_1 = v_{z1} \\ \ddot{x}'_3 = u_{z3} - \varphi' u_{z1}^p \\ \ddot{\varphi}' = \Delta M'_{z2}, \end{cases} \quad (14)$$

где $x'_i(\tau) = y'_i(\tau) - y_i^*(\tau)$, $\varphi'(\tau) = \varphi(\tau) - \varphi^*(\tau)$ — отклонения по соответствующим переменным от программной траектории $y_i^*(\tau)$, $\varphi^*(\tau)$. Отметим, что в системе (14) возмущения v_{z1} и $\Delta M'_{z2}$ и известная тяга маршевых двигателей $u_{z1}^p(\tau)$ отличны от нуля только на интервалах (τ_0, τ_1) и (τ_2, τ_k) . Кроме того, в качестве возмущений выступают начальные ошибки в определении координат и скоростей $x(0)$.

1.8. Задача тестирования качества стабилизации космонавтом программной траектории сближения УСК с МКС Как было отмечено, задачей космонавта является стабилизация отклонений, вызванных воздействием возмущений, при помощи боковых двигателей. При этом он не знает реальные возмущения, то есть решение приходится принимать в *условиях неопределенности*.

При проведении работ в космосе цена ошибки крайне высока, поэтому необходима тренировка космонавтов на Земле с целью выработки требуемых навыков. Для адекватной оценки способностей космонавта инструктору, отвечающему за тестирование, требуется найти наихудшие (т.е. максимально отклоняющие модуль от цели в конечный момент времени) возмущения в заданных рамках. Если космонавт справится с наихудшими возмущениями, то из этого делается вывод, что он способен стабилизировать и любые другие. Для получения данных возмущений и объективной оценки действий космонавта используется *методика максиминного тестирования*.

§2. Методика максиминного тестирования качества робастного управления движением

2.1. Постановка задачи тестирования в общем виде Имеется динамическая система, представляемая уравне-

нием вида

$$\dot{x} = f(x, u, v) \quad (15)$$

Начальные условия $x(0) \in X^0$, управления $u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in KC[\tau_0, \tau_k] | u(\tau) \in P \subset R_s\}$ и действующие в процессе движения возмущения $v(\cdot) \in V = \{v(\cdot) \in L_\infty[\tau_0, \tau_k] | v(\tau) \in Q \subset R_m, X_0, P, Q — выпуклые замкнутые и ограниченные множества. Введем вектор всех возмущений $w(\cdot) = (x(0), v) \in W$, где $W = X^0 \times V$, причем u и w будем считать независимыми. Будем рассматривать задачу как игру двух игроков: отвечающего за управление и отвечающего за возмущения.$

Введем функционал качества вида

$$J(w, u) = \|x(\tau_k)\|, \quad (16)$$

зависящий от управлений и возмущений (в задаче сближения он характеризует расстояние от космонавта до цели в заданный конечный момент времени τ_k).

Пусть задачей управления является приближение функционала качества к нулю, возмущений — отдаление от нуля. *Стратегией* игрока назовем совокупность правил, определяющих выбор его действия в зависимости от сложившейся ситуации.

Необходимо объективно оценить качество стратегий управления системой с точки зрения функционала J , для чего представим эту задачу в виде *дифференциальной игры* [8].

Тогда задачей игрока, отвечающего за возмущения, является ухудшение (максимизация) функционала даже при наилучших управлениях, то есть получение

$$J_0(u^0, w^0) = \sup_{w \in W} \inf_{u \in U} J(w, u) \quad (17)$$

В то время как задача управляющего игрока представляет собой улучшение (минимизацию) функционала даже при наихудших возмущениях

$$J^0(u_0, w_0) = \inf_{u(\cdot) \in U} \sup_{w(\cdot) \in W} J(w, u) \quad (18)$$

Предположим, что решение задач (17),(18) существует в рассматриваемом классе управлений и возмущений. Тогда в этих

соотношениях можно заменить операции \inf и \sup на \min и \max .

Задачи (17) и (18) представляют антагонистическую игру в нормальной форме, которую обозначим как тройку $\Gamma = (W, U, J)$.

Теорема 1. *Для любой антагонистической игры Γ верно неравенство*

$$J_0(u^0, w^0) = \max_{w(\cdot) \in W} \min_{u(\cdot) \in U} J \leq \min_{u(\cdot) \in U} \max_{w(\cdot) \in W} J = J^0(u_0, w_0) \quad (19)$$

Доказательство: Зафиксируем произвольное $w' \in W$. Тогда для любых $\forall u \in U$ по определению максимума выполнено неравенство:

$$J(w', u) \leq \max_{w(\cdot) \in W} J(w, u)$$

Отсюда следует, что и

$$\min_{u(\cdot) \in U} J(w', u) \leq \min_{u(\cdot) \in U} \max_{w(\cdot) \in W} J(w, u) = J^0(u_0, w_0).$$

Поскольку это неравенство выполняется для $\forall w' \in W$, следовательно:

$$J_0(w^0, u^0) = \max_{w'(\cdot) \in W} \min_{u(\cdot) \in U} J(w', u) \leq \min_{u(\cdot) \in U} \max_{w(\cdot) \in W} J(w, u) = J^0$$

Ч.т.д.

Необходимо оценить качество какого-нибудь алгоритма управления \tilde{u} в смысле выбранного функционала (16). Согласно приведенной выше теореме величина J_0 является оценкой снизу для значения функционала, т.е. выполнено неравенство $J_0(u^0, w^0) \leq J(w, \tilde{u})$.

Предположим, что существует ситуация равновесия, когда выполнено условие $J_0 = J^0$ (определение ситуации равновесия дано в п. 2.2). Предложена [13] так называемая *максиминная* методика оценки качества алгоритма управления. В методике можно выделить три этапа:

1-й этап — предварительный. На этом этапе осуществляется поиск максимина J_0 , проверка ситуации равновесия и вычисление оптимальной (наихудшей для управляющего игрока) стратегии для возмущений w^0 .

2-й этап — основной. На втором этапе производится моделирование (компьютерное, либо с помощью динамического стенда) процесса управления системой (15) под действием проверяемого алгоритма управления \tilde{u} . Можно тестировать как некий автоматический алгоритм управления, так и управление, осуществляемое человеком-оператором вручную (персональное управление). При этом на управляемый объект воздействуют наихудшие возмущения w^0 , найденные на первом этапе. В конце второго этапа получим значение функционала качества $\tilde{J}(\tilde{u}, w^0) = \|x(\tau_k)\|$.

3-й этап — заключительный. На этом этапе происходит сравнение наилучшего J_0 и реального \tilde{J} значений функционалов. Здесь будет использоваться сравнение вида $\text{int } 100 \cdot J_0 / \tilde{J}$, что обеспечивает оценку качества управления по стобалльной шкале.

На рис. 7 представлена функциональная схема компьютерного варианта системы тестирования.

Для реализации данной схемы необходимо иметь в распоряжении модель функционирования управляемого объекта, измерительных и исполнительных устройств. Сам тестируемый алгоритм стабилизации может быть представлен как «черный ящик» с известным выходом. Блок алгоритма тестирования подает в компьютерную модель управляемого объекта наихудшие возмущения, найденные на первом этапе.

Процесс показа автоматического сближения УСК с МКС реализуется в соответствии со схемой на рис. 7

При тестировании человека на имитационном стенде (рис. 7) оператор, который формирует алгоритм управления \tilde{u} , должен испытывать те же визуальные и акселерационные ощущения, что и в реальном движении. Таким образом здесь помимо алгоритмов тестирования требуется разработка системы визуальной и динамической имитации, обеспечивающих требуемую внешнюю среду для управляемого объекта. Алгоритм тестирования формирует наихудшие возмущения, которые подаются на компьютерную модель управляемого объекта, являющуюся частью математического обеспечения стенда.



Рис. 7

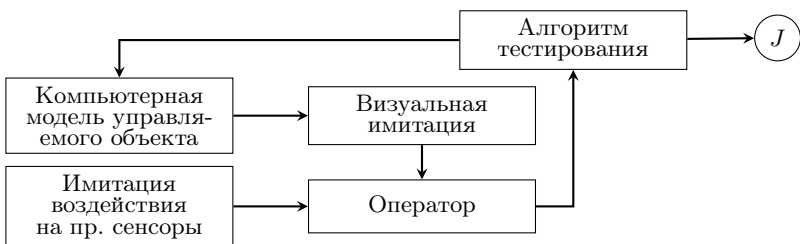


Рис. 8

Важнейшим свойством предложенной схемы тестирования является возможность объективного сравнения между собой нескольких представленных для тестирования алгоритмов управления.

2.2. Ситуация равновесия (седловая точка) в динамической игре первого этапа тестирования Обычно в процессе игры игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Феномен процедуры тестирования на имитационном стенде заключается в том, что нет необходимости искать стратегию возмущения как позиционную, так как антагонистическая игра имитируется (инструктор решил эту игру на первом этапе). То есть максиминное тестирование это решение антагонистической динамической игры при наличии дискриминации, когда инструктор имеет преимущество перед испытуемым.

При реализации первого этапа тестирования предпочтительно найти *программную* стратегию для наихудших возмущений. Программными называются такие стратегии, при которых решения приняты игроком заранее (независимо от сложившейся ситуации) и зависят только от времени. Они наиболее просты для реализации на втором этапе тестирования.

Из теоремы 19 следует, что у управляющего игрока есть объективный шанс получить оценку в 100 баллов только при выполнении условия $J_0 = J^0$, т.е.

$$\max_{w(\cdot) \in W} \min_{u(\cdot) \in U} J = \min_{u(\cdot) \in U} \max_{w(\cdot) \in W} J \quad (20)$$

Докажем, что этим условиям удовлетворяет *седловая точка* (*ситуация равновесия*). По определению, это такая пара стратегий (u^*, w^*) , что для любых $u \in U$ и $w \in W$ выполняется неравенства:

$$J(w, u^*) \leq J(w^*, u^*) \leq J(w^*, u) \quad (21)$$

Как видно из определения, стратегия, обеспеченная седловой точкой, является оптимальной для обоих игроков — от нее не выгодно отклоняться ни тому, ни другому игроку.

К сожалению, ситуация равновесия не всегда существует в классе программных стратегий. В случае ее отсутствия

возможны несколько вариантов. Для линейных управляемых систем и аддитивных возмущений можно рассмотреть задачу тестирования в классе позиционных стратегий. Для случая выпуклого функционала качества [8] здесь всегда существует ситуация равновесия.

В других случаях для существования седловой точки в динамической игре задачи тестирования можно перейти к смешанным или позиционным стратегиям тестирования.

Верно следующее утверждение:

Теорема 2. *Для того, чтобы в антагонистической игре существовала точка равновесия (w^*, u^*) , необходимо и достаточно, чтобы существовали максимин и минимакс*

$$J_0(w^0, u^0) = \max_{w(\cdot) \in W} \min_{u(\cdot) \in U} J$$

– нижнее значение игры;

$$J^0(w_0, u_0) = \min_{u(\cdot) \in U} \max_{w(\cdot) \in W} J$$

– верхнее значение игры; и выполнялось равенство

$$J^0(w_0, u_0) = J_0(w^0, u^0) = J(w^*, u^*) \quad (22)$$

Доказательство необходимости. По определению седловой точки (21), верны неравенства

$$J(w_0, u^*) \leq J(w^*, u^*) \leq J(w^*, u^0).$$

В то же время из теоремы 19 следует, что для $\forall w, u$ (в том числе и w^*, u^*) выполняется

$$\begin{aligned} J(w^*, u^0) &\leq \max_{w(\cdot) \in W} J(w, u^0) = J_0(w^0, u^0) \leq \\ &\leq J^0(w_0, u_0) = \min_{u(\cdot) \in U} J(w_0, u) \leq J(w_0, u^*). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$J(w_0, u^*) \leq J(w^*, u^*) \leq J(w^0, u^0) \leq J(w_0, u_0) \leq J(w_0, u^*)$$

и выполнение равенств (22). **ч.т.д.**

Сформулируем и докажем еще одну теорему, которую в дальнейшем будем использовать для нахождения точки равновесия. Заметим, что при этом не требуется вычислять значение минимакса.

Теорема 3. Для того чтобы пара стратегий (w^*, u^*) была точкой равновесия антагонистической игры $\Gamma = (W, U, J)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$J(w^*, u^*) = \max_{w \in W} \min_{u \in U} J(w, u) \geq J(w, u^*), \quad \forall w \in W. \quad (23)$$

Доказательство. Необходимость: Если пара стратегий (w^*, u^*) является точкой равновесия антагонистической игры Γ , по теореме 3 верно равенство $J(w^*, u^*) = \max_{w \in W} \min_{u \in U} J(w, u)$, а по определению точки равновесия (21) выполнено неравенство (23).

Достаточность: В точке максимина верно неравенство $J(w^*, u^*) = \max_{w \in W} \min_{u \in U} J(w, u) = \min_{u \in U} J(w^*, u) \leq J(w^*, u'), \quad \forall u' \in U.$

С другой стороны, выполнено неравенство (23), что приводит к определению ситуации равновесия:

$$J(w, u^*) \leq J(u^*, w^*) \leq J(w^*, u), \quad \forall u \in U, \forall w \in W.$$

Ч.т.д.

Следовательно для поиска точки равновесия надо сначала решить задачу на максимин, а потом для всех возмущений проверить неравенство (23), что в некоторых случаях проще, чем вычисление минимакса.

2.3. Редукция игровой задачи первого этапа к геометрической игре и ее решение Рассмотрим задачу тестирования качества управления в линейной системе вида

$$\dot{x} = A(\tau)x + Bu + Cv, \quad (24)$$

где матрица $A(\tau)$ является кусочно-постоянной матрицей на известных интервалах $[0, \tau_1]$, (τ_1, τ_2) , $[\tau_2, \tau_k]$, а матрицы B и C постоянны.

Начальные отклонения $x(0) \in X^0$, управления $u(\cdot) \in U$, где $U = \{u(\cdot) \in KC[0, \tau_k] \mid \|u(\tau)\| \in P\}$, постоянно действующее возмущение $v(\cdot) \in V$, где $V = \{v(\cdot) \in KC[0, \tau_k] \mid v(\tau) \in Q\}$.

Здесь KC , как и ранее — кусочно-непрерывная функция, а X_0, P, Q — известные выпуклые замкнутые и ограниченные

множества. Введем вектор всех возмущений $w = (v, x(0)) \in W = V \times X_0$. Функционал качества представляет собой ошибку в конечный момент времени τ_k .

$$J(u, w) = \|x(\tau_k)\|.$$

Используем разложение $x(\tau) = s(\tau) - q(\tau)$ и декомпозируем исходную систему на возмущаемую и управляемую подсистемы:

$$\dot{s} = A(\tau)s + Cv, \quad s(0) = x(0) \quad (25)$$

$$\dot{q} = A(\tau)q - Bu, \quad q(0) = 0. \quad (26)$$

Функционал качества

$$J(w, u) = \|x(\tau_k)\| = \|s(\tau_k) - q(\tau_k)\|.$$

Введем понятие *множества достижимости* как множества всех таких состояний, в которые можно привести динамическую систему при помощи допустимого управления (возмущения) из начального состояния за заданный промежуток времени.

Множество достижимости $D_u(\tau_k, q(0))$ по управлениям записывается как

$$D_u(\tau_k, q(0)) = \{q(\tau_k) \mid \dot{q} = A(\tau)q - Bu, q(0) = 0, \forall u \in U.\}$$

Множество достижимости по возмущениям $D_w(\tau_k, X^0)$ является объединением множеств достижимости при всех возможных начальных условиях $s(0) = x(0) \in X^0$:

$$D_w(\tau_k, X^0) = \bigcup_{x(0) \in X^0} D_v(\tau_k, s(0)) = \{s(\tau_k) \mid \dot{s} = A(\tau)s + Cu, s(0) = x(0), \forall v \in V\}.$$

Исходную дифференциальную игру Γ можно редуцировать к геометрической игре, построив множества достижимости D_w и D_u в одном пространстве переменных.

Функционал качества $J(w, u) = \|x(\tau_k)\| = \|s(\tau_k) - q(\tau_k)\| = \rho(s, q)$ и представляет собой евклидово расстояние между точками из множеств D_w и D_u . Каждой паре точек множеств достижимости D_w и D_u

соответствуют некое программное управление $u(\tau) \in P$, возмущение $v(\tau) \in Q$, начальные возмущения $x(0) \in X_0$ и некоторое движение исходной управляемой системы.

Тогда вопрос о седловых точках исходной дифференциальной игры сводится к поиску соответствующих пар точек, принадлежащих множествам достижимости D_w и D_u .

Аналогом неравенства (23) из теоремы 3 является следующее:

$$\begin{aligned} \rho(s(\tau_k)^*, q(\tau_k)^*) &= \max_{s(\tau_k) \in D_w} \min_{q(\tau_k) \in D_u} \rho(s(\tau_k), q(\tau_k)) \geq \\ &\geq \rho(s(\tau_k), q(\tau_k)^*), \forall s(\tau_k) \in D_w \quad (27) \end{aligned}$$

Условия (27) означают, что если седловая точка в геометрической (а, следовательно, и в исходной игре) существует, то шар с центром в $q(\tau_k)^*$, где пара $(s(\tau_k)^*, q(\tau_k)^*)$ соответствует максимуму, и радиусом $\rho(s(\tau_k)^*, q(\tau_k)^*)$ содержит все множество достижимости по возмущениям D_w целиком.

В дальнейшем мы покажем, как можно использовать эти результаты для получения тестовых возмущений в задаче сближения космического модуля со станцией.

2.4. Постановка задачи тестирования качества управления УСК космонавтом Напомним, что рассматривается последний этап сближения космонавта со станцией — маршевое движение для восстановления потерянного контакта. Необходимо оценить то, насколько успешно космонавт справляется с задачей коррекции отклонений от требуемой траектории. Согласно представленной в предыдущих пунктах методике тестирования, для этого необходимо найти наихудшие возмущения, действующие на устройство спасения космонавта.

Эту задачу можно представить как игру двух игроков: **Космонавта** и **Инструктора**, отвечающих за управление и возмущение соответственно. Если первый стремится приблизить УСК к люку, то второй — помешать первому.

Система (14), описывающая возмущенное движение УСК, имеет вид аналогичный (24) и можно поставить игровую задачу в рамках линейной модели с терминальным функционалом качества.

Действительно, систему (14) можно представить в виде

$$\dot{x} = A(\tau)x + Bu + Cv, \quad (28)$$

где вектор состояния $x = (x'_1, \dot{x}'_1, x'_3, \dot{x}'_3, \varphi', \dot{\varphi}')^\top$ имеет шестой порядок, управление $u = u_{z3}$ — тяга боковых двигателей, $|u(\tau)| \leq u_{\max}$ и два постоянно действующих возмущения: $v_1 = v_{z1}$ — погрешность тяги маршевых двигателей $|v_1(\tau)| \leq \mu_1$ и $v_2 = \Delta M'_{z2}$ — паразитный момент, вызванный разнотяговостью маршевых двигателей $|v_2(\tau)| \leq \mu_2$. Начальные условия $x(0)$ также рассматриваются в качестве возмущений в дифференциальной игре.

Матрицы A, B, C имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^p(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Для определения успешности сближения в конечный момент времени будем использовать функционал качества вида $J = (x_1^2(\tau_k) + x_3^2(\tau_k))^{1/2}$, представляющий из себя расстояние до люка космической станции.

Из уравнений (28) видно, что в рамках линейной модели возмущения v_i влияют на отклонения по всем координатам x_i , в то время как управление u влияет только на отклонения по координате и скорости вдоль оси, перпендикулярной направлению сближения (переменные x_3 и x_4). Вместе с условием ограниченности $u(\cdot)$, это определяет вид множества достижимости по управлениям D_u как отрезка на плоскости Ox_1x_3 .

Для поиска концов отрезка требуется решить задачу Булгакова о максимальном отклонении, однако для нашей системы она вырождается в поиск $u(\tau)$, доставляющих $\max_{u(\tau)} \int_0^{\tau_k} u(\tau) d\tau^2$ и $\min_{u(\tau)} \int_0^{\tau_k} u(\tau) d\tau^2$ при ограничении $|u(\tau)| \leq u_{\max}$. Легко доказать, что максимум и минимум

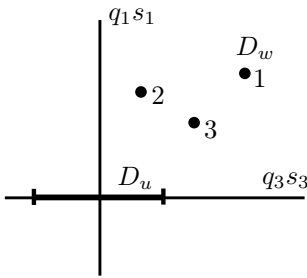


Рис. 9

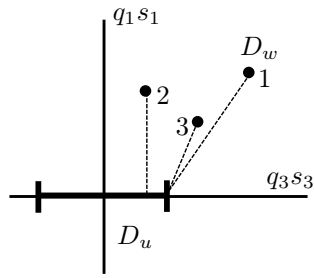


Рис. 10

достигаются при $u(\tau) \equiv u_{\max}$ и $u(\tau) \equiv -u_{\max}$ соответственно. После этого достаточно рассмотреть финальные отклонения $x_3(\tau_k)$ при данных управлениях.

Приведем пример решения задачи на поиск седловой точки. Рассмотрим систему с такими параметрами, что в результате построения множества достижимости был получен вид, изображенный на рис. 9. Множество D_w состоит из трех точек. Чтобы определить $J_0 = \rho_0 = \max \min \rho$, найдем сначала минимальные расстояния от отрезка до каждой из точек (рис. 10) После чего выберем максимальное из полученных расстояний (рис. 11). Таким образом, мы получили две точки из множеств управления и возмущения соответственно, а также функционал J_0 . Для того, чтобы определить, отвечает ли найденное точке равновесия, воспользуемся интерпретацией

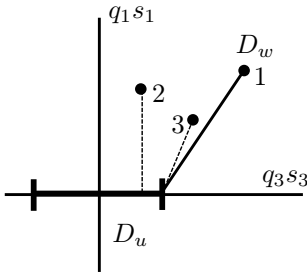


Рис. 11

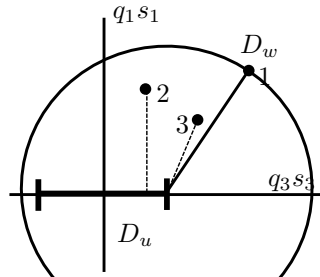


Рис. 12

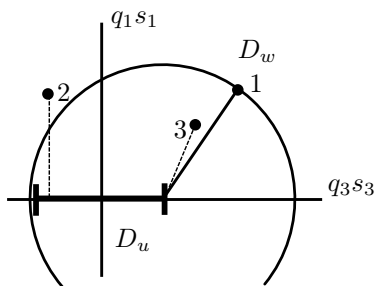


Рис. 13

(27) теоремы 3, построив окружность: (рис. 12) Как можно заметить, все D_w лежит в окружности, следовательно, седловая точка найдена.

На рис. 13 приведен пример, когда ситуация равновесия отсутствует.

Тогда используются *смешанные* или *позиционные* стратегии, рассмотрение которых выходит за рамки нашей задачи.

§3. Проведение второго этапа тестирования на установке виртуальной реальности

Непосредственное тестирование космонавта (2-й этап) происходит на компьютерной установке визуальной имитации процесса сближения со станцией.

На вход компьютерной модели подаются наилучшие возмущения на основании алгоритма тестирования, найденного на 1 этапе. С их использованием моделируется работа маршевых (расположенных в направлении грудь-спина) двигателей. В это время космонавт непосредственно управляет боковыми двигателями компьютерной модели УСК, основываясь на визуальной имитации окружения модуля. На выходе программы получаем расстояние, на которое модуль оказался отклонен от станции в конечный момент времени (то есть значение функционала $\tilde{J} = \sqrt{x_1^2(t_k) + x_3^2(t_k)}$), и $100 \cdot J_0 / \tilde{J}$ как оценка действий космонавта.

Для достижения эффекта присутствия, требуется качественная визуальная имитация окружения космонавта — космической станции. Этого можно добиться, используя качественную графическую систему и имитируя объемность объектов при помощи современных трехмерных технологий.

В качестве аппаратного обеспечения для данной задачи практикума будет использоваться панорамная система виртуальной реальности (ПСВР).

3.1. Аппаратная часть комплексного стенда ПСВР. Опишем подробнее каждую часть стенда. Основными элементами комплекса являются стереоэкран, проекторы, специализированная графическая станция и система комнатной навигации.

Стереоэкран. Чтобы испытуемый мог свободно оценивать ситуацию вокруг, используется полуцилиндрический акриловый экран радиусом 3 метра и высотой 2,5 метра. На него с обратной стороны проецируется изображение в разрешении 5760×1080 пикселей (3FullHD) через три проектора. Причем, визуализация изображения для каждого из проекторов проходит на отдельной видеокарте — такая система называется многоканальной.

Формирование стереоизображения на экране. Для имитации объемного пространства необходимо создавать на экране два различных изображения для каждого глаза, построенных в соответствии с желаемым геометрическим расположением виртуальных объектов. Эта возможность определяет преимущества стереоэкранов перед привычными моноэкранами — человек видит виртуальные объекты так, как они выглядели бы в реальности.

Полуцилиндрическое строение экрана ПСВР, в отличие от обычного монитора, позволяет активно задействовать периферическое (боковое) зрение. Кроме того, человек может переводить взгляд в широком диапазоне, не замечая края экрана, что также положительно сказывается на восприятии.

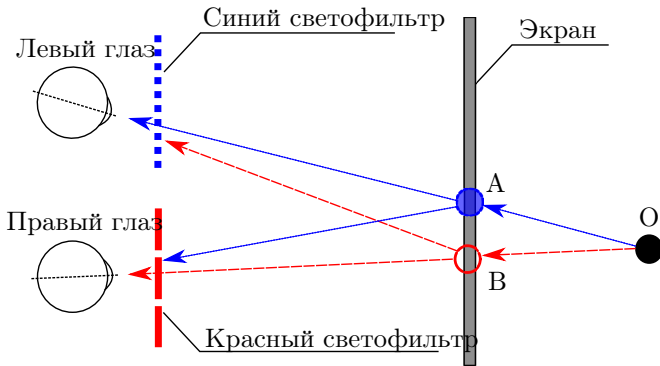


Рис. 14

Опишем принцип работы стереозэкрана. Зритель наблюдает изображение некоторой точки O воспроизводимого объекта. Для этого используются спектральные очки (например, красно-синие). Левый глаз зрителя видит через фильтр изображение A , а правый глаз — изображение B . Сама точка O тогда будет представляется зрителю расположенной в пространстве за экраном на пересечении визирных осей, идущих от левого глаза к точке A и от правого к точке B .

Использование вышеописанной системы вывода видеоизображения позволяет получить очень качественную визуальную картину, необходимую для реализации второго этапа методики тестирования.

Система комнатной навигации (СКН). Как можно было заметить, стереопара строится для вполне конкретного расположения головы человека. В случае, если она сдвигается с расчетной точки, изображение начинает казаться искаженным. Для компенсации данного эффекта используется система комнатной навигации, включенная в ПСВР, которая позволяет отслеживать положение головы человека в пространстве и динамически изменять геометрию проекции под новые координаты.

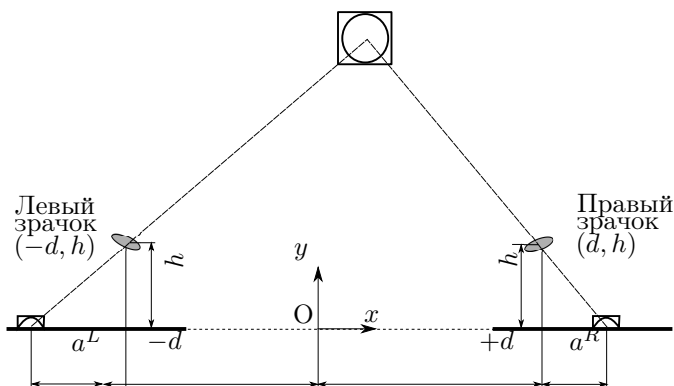


Рис. 15

Для наглядности, приведем простейшую модель работы системы комнатной навигации, состоящей из двух камер. Важно отметить, что принцип работы системы схож с таковым у биноклярного зрения человека.

Смоделируем камеру как систему из линзы и светочувствительной пластины, видимый объект представляет собой точечный источник света и находится на одном уровне с глазами. Систему координат расположим на равном расстоянии от центров светочувствительных пластин, ось y направим вперед, ось x направо. Расстояние от линзы до светочувствительной пластины равно h , причем линза расположена напротив центра пластины. Расстояние между линзами равно $2d$. В результате компьютерной обработки известны координаты точек на светочувствительной плоскости, в которые попал свет от объекта: $(-d - a^L, 0)$ для левой и $(d + a^R, 0)$ для правой соответственно. Требуется найти координаты (x, y) видимого объекта. Для упрощения, считаем, что $0 < x < d$.

Из геометрических соображений о подобии треугольников, получаем соотношения:

$$\frac{x}{h} = \frac{d+a^L+x}{da^L}, \quad \frac{y}{h} = \frac{d+a^R-x}{da^R}.$$

Откуда находим искомые координаты объекта:

$$x = \frac{d(a^L - a^R)}{da^L + a^R}, \quad y = \frac{h \left(d - \frac{d(a^L - a^R)}{da^L + a^R} \right)}{a^R} + h.$$

В ПСВР используется система комнатной навигации ARTtrac, включающая в себя восемь камер, работающих в инфракрасном диапазоне, восемь соответствующих ИК-излучателей и набор отражающих маркеров. В отличие от модельного примера, определяется не позиция отдельно взятого маркера, а положение и ориентация «тела»: набора из нескольких маркеров, жестко скрепленных между собой. Вместо ручного измерения расстояний между камерами, перед началом работы системы решается задача калибровки: по снимкам известного набора «тел» восстанавливается система координат комнаты и вычисляется взаимное расположение камер.

В дальнейшем одно из «тел» фиксируется на стереочках. Информация об угловом положении очков представляется в виде матрицы направляющих косинусов, по элементам которой можно вычислить углы поворота и использовать их для построения правильной стереопроекции на экран.

Таким образом, использование системы трекинга вместе с панорамным стереозэкраном позволяет человеку воспринимать имитируемую визуальную среду как продолжение реального пространства, в том числе при перемещении по комнате.

3.2. Программное обеспечение и виртуальная среда Прежде, чем изображение визуальной обстановки в окрестности станции подается на проектор, оно просчитывается в графическом ядре компьютера. В то же время, для корректного отображения всего процесса сближения, программе необходимо в реальном времени интегрировать уравнения движения устройства спасения космонавта с учетом заданных возмущений и текущего управления со стороны испытуемого.

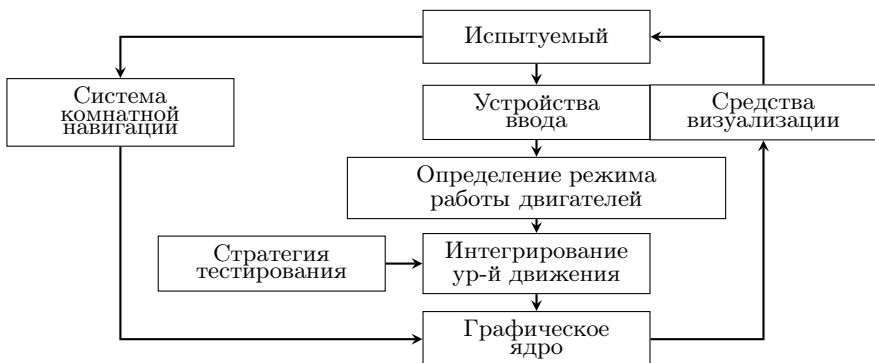


Рис. 16

Таким образом, берется трехмерная модель станции, а камера в графической сцене помещается на место головы космонавта, который движется в соответствии с математической моделью. В качестве движка для симулятора сближения используется Unity3D, рассчитанный на работу с многоканальным выводом.

Рассмотрим (рис. 16) структуру алгоритма работы программы визуальной имитации второго этапа тестирования.

Испытуемый формирует управление компьютерной моделью УСК с помощью устройств ввода (джойстика). Управление подается на вход блока интегрирования уравнений движения. Также на вход этого блока подаются возмущения (стратегия тестирования), найденные на первом этапе тестирования. В результате интегрирования, в реальном масштабе времени имеем относительное положение и ориентацию УСК относительно орбитальной станции, что позволяет построить визуальную обстановку, такую, как ее видит космонавт в процессе сближения. Блок визуализации отображает эту визуальную обстановку на экране. При этом, если установка имитации обладает системой комнатной навигации, она также учитывается в блоке визуализации.

3.3. Оценка качества визуального сближения УСК на 3-ем этапе тестирования На первом занятии, после определения угла программного поворота и показа страте-

гии автоматического сближения на ПСВР определяются: общее время сближения; время, затраченное на программный поворот; время программного режима сближения.

Также находятся расход массы сжатого газа на каждом интервале стратегии автоматического сближения. При предположении, что экстремальная ситуация в связи с неисправностью реактивных двигателей имеет место, сразу после программного поворота были определены время сближения и запас сжатого газа для реализации визуального сближения при наличии как начальных, так и постоянно-действующих возмущений.

Описание начальных и постоянно-действующих возмущений, реализующих экстремальную ситуацию в смысле заданного функционала дается преподавателем после 1-го занятия. До второго занятия требуется доказать существование седловой точки в геометрической антагонистической игре (что соответствует ситуации равновесия) и найти ее.

Таким образом, ко второму занятию известны: цена игры и оптимальная стратегия и контрстратегия, что дает возможность сравнить результат эксперимента по персональной стабилизации с ценой игры, которая является достижимой оценкой снизу для этого результата.

Введем стохастическую систему оценки качества персонального сближения в экстремальной ситуации:

$$z = \text{int} \left[\frac{J_0(u^0, v^0)}{\tilde{J}(\tilde{u}, v^0)} \right] \cdot 100,$$

где u^0, v^0 — оптимальные стратегия и контрстратегия в ситуации равновесия, J_0 — цена антагонистической игры, \tilde{u} — позиционная стратегия персонального сближения, реализованная во время эксперимента, $\tilde{J}(\tilde{u}, v^0)$ — значение функционала качества сближения, полученное по результатам эксперимента.

Следует отметить, что рассматриваемый функционал — отклонение в фиксированный момент времени — носит количественный характер. Можно было бы рассматривать и качественное описание игры — наличие или отсутствие контакта

с МКС в конечный момент времени. Также важным является вопрос ограничения расхода сжатого газа. Во всех новых вариантах (например, минимизации времени сближения), задача становится более сложной (см. [7]).

§4. Порядок выполнения и сдачи работы

4.1. Выполнение работы *Теоретическая часть:*

1. знакомство с физической постановкой задачи;
2. изучение задачи визуального поиска входного люка МКС;
3. описание экстремальной ситуации и математической постановке гарантированного максиминного тестирования.

Индивидуальное задание практикума по **нахождению наихудших возмущений** нацелено на закрепление понимания принципов построения множеств достижимости и нахождения седловой точки.

Домашнее задание состоит из нахождения седловой точки в геометрической игре (или доказательство, что она отсутствует), цены игры и наихудших возмущений.

Пусть масса УСК $m = 225$ кг, ширина $2a = 0,58$ м, высота $2b = 1,13$ м, диагональные элементы тензора инерции $I_{11} = 38,8$ кг/м², $I_{22} = 12,5$ кг/м², $I_{33} = 39,4$ кг/м². Кроме того, индивидуально предоставляются начальные координаты и скорости УСК $y_i(0)$ и $\frac{dy_i}{dt}(0)$, программные тяги двигателей $f_{z1}(t)$, предельные значения тяг боковых двигателей f_{z3}^{\max} , а также дискретный набор возможных ошибок в работе маршевых двигателей и ошибок в определении начальных отклонений.

По предоставленным данным необходимо:

1. Составить уравнения движения в безразмерном виде;
2. Аналитически построить множества достижимости;
3. Выяснить, существует ли седловая точка для данных условий задачи;
4. В случае, если седловая точка существует, найти наихудшие возмущения w^* для безразмерной системы (а также соответствующие им ΔF_{ij}^* и $\Delta y^*(0)$) и определить наилучшее значение функционала качества J_0 .

Пример:. Рассмотрим следующий режим работы маршевых двигателей:

1. Разгон: от $t = 0$ с до $t_1 = 5$ с, $f_{z1}^1 = 20$ Н,
2. Дрейф: от $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с, $f_{z1}^2 = 0$ Н,
3. Торможение: от $t_2 = 10$ с до $t_2 = 15$ с, $f_{z1}^3 = -20$ Н,

где f_{z1}^i — суммарная тяга. В качестве характерных времени и расстояния возьмем $T = 15$ с, $L = 1$ м. Положим, что тяга боковых двигателей $|f_{z3}| \leq 4$ Н. Начальные отклонения от программной траектории по продольной оси $x_1(0) = 0$ м, по оси, перпендикулярной направлению сближения $x_3(0) = -34,7$ м. Набор дискретных возмущений на каждом этапе сближения (для разгона и торможения — индексы 1 и 3 соответственно, во время дрейфа возмущения отсутствуют) следующий:

а) $\Delta M_{z2}^1 = 0,004$ Нм, $\Delta M_{z2}^3 = -0,005$ Нм, $\Delta f_{z1}^1 = 0$ Н, $\Delta f_{z1}^3 = 0,2$ Н,

б) $\Delta M_{z2}^1 = 0,004$ Нм, $\Delta M_{z2}^3 = 0$ Нм, $\Delta f_{z1}^1 = 0$ Н, $\Delta f_{z1}^3 = -0,5$ Н,

в) $\Delta M_{z2}^1 = 0,0042$ Нм, $\Delta M_{z2}^3 = 0$ Нм, $\Delta f_{z1}^1 = -0,03$ Н, $\Delta f_{z1}^3 = 0$ Н,

г) $\Delta M_{z2}^1 = 0,0041$ Нм, $\Delta M_{z2}^3 = 0$ Нм, $\Delta f_{z1}^1 = 0$ Н, $\Delta f_{z1}^3 = 0,2$ Н.

Для решения используется метод сведения к геометрической игре, описанный в §2. Множество достижимости по возмущениям строится путем интегрирования возмущаемой подсистемы при каждом наборе возмущений. В то же время, концы отрезка $[-32, 32]$, которым является множество достижимости по управлениям, находятся после интегрирования управляемой подсистемы при $u_{z3} = 4$ и $u_{z3} = -4$. Седловая точка находится из геометрических соображений, наилучшим набором возмущений является набор б). Нижняя оценка функционала качества $J_0 = 0,44$.

Эксперимент на ПСВР. После получения теоретических результатов проводится эксперимент на ПСВР по персональному сближению с МКС, по результатам которого выставляется оценка качества сближения по найденному ранее значению цены игры.

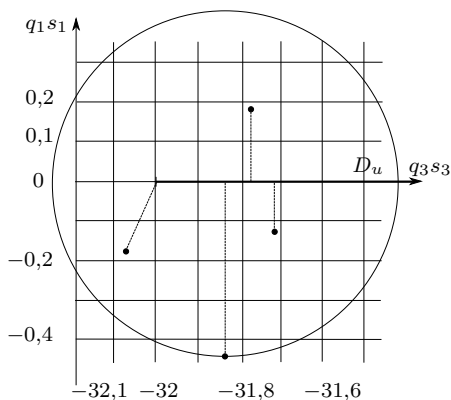


Рис. 17

Практическая часть проводится в помещении, где расположена установка виртуальной реальности. Вся работа выполняется индивидуально.

Порядок выполнения работы:

1. Демонстрируется работа стереоскопической системы визуализации. На этом этапе есть возможность проверить корректность работы системы комнатной навигации, перемещаясь в пределах комнаты;
2. Демонстрируется процесс визуального поиска причала;
3. Воспроизводится режим автоматического сближения УСК со станцией, который включает в себя поворот УСК на требуемый угол и маршевое движение со стабилизацией возмущений;
4. Каждому выполняющему практикуму назначается инструктор из числа остальных выполняющих. Инструктор вносит найденные им наихудшие возмущения в компьютерную программу с имитацией сближения. Начальные отклонения реализуются перемещением УСК в окне программы, постоянно действующие возмущения вводятся в соответствующие поля интерфейса программы как некие константы для каждого из этапов сближения (разгон, дрейф, торможение). После чего требуется собрать тестирующее приложение нажатием на кнопку «Build»;

5. Каждый из выполняющих практикум управляет полетом УСК на стенде виртуальной реальности. Управлять возможно только группами боковых двигателей;

6. При составлении заданий практикума в компьютерную программу заложено правильное значение J_0 для каждого набора начальных условий. По окончании сближения на экране системы возникают функционал \tilde{J} и оценка качества управления по стобалльной шкале ($100 \cdot J_0 / \tilde{J}$). Выполняющему дается три попытки сблизиться, из которых выбирается наилучшая.

§5. Контрольные вопросы

1. Циклограмма полуавтоматического сближения с орбитальной станцией в экстремальной ситуации потери контакта, ограниченности энергоресурсов и времени функционирования системы жизнеобеспечения.
2. Кинематика поворота взора на большой угол.
3. Автоматическое сближение в орбитальной плоскости.
4. Применение принципа максимума Понтрягина для оптимизации программного разворота.
5. Минимаксная оптимизация асимптотической стабилизации и нахождение наихудших начальных возмущений.
6. Расчет режима программного сближения.
7. Уравнения в отклонениях от программной траектории и их декомпозиция.
8. Описание экстремальной ситуации и постановка задачи гарантированного максиминного тестирования.
9. Теоремы о ситуации равновесия в антагонистических играх и редукция к геометрической игре.
10. Определение седловой точки дифференциальной игры.
11. Гарантированная оценка качества персональной робастной стабилизации с помощью программных стратегий в антагонистической игре и проведению эксперимента на ПСВР.
12. Как устроено устройство спасения космонавта?
13. Какими факторами пренебрегали при составлении модели УСК?
14. Что такое функционал качества?

15. Почему для поиска наилучших возмущения используется седловая точка игровой задачи?
16. Из каких этапов состоит максиминное тестирование?

Литература

1. Александров В.В., Блаженнова-Микулч Л.Ю., Гутьерес-Ариас И.М., Лемак С.С. Максиминное тестирование точности стабилизации и седловые точки в геометрических играх // Вестник МГУ. сер. Мат. мех. 2005. №1.
2. Александров В.В., Герра Л., Каленова И.Н., Трифонова А.В. Минимаксная стабилизация и максиминное тестирование линейных управляемых систем // Вестник МГУ. сер. Мат. мех. 1999. №5. с. 58–65.
3. Александров В.В., Лебедев А.В., Лемак С.С. Компьютерный тестирующий тренажер по управлению устройством спасения космонавта // 5-й международный аэрокосмический конгресс, тезисы докладов, 2006, г.Москва, с. 69.
4. Helmut Jorke, Markus Fritz. Infitec — a new stereoscopic visualisation tool
5. Leonid Sigal. Human Motion Modeling and Analysis, lectures // Carnegie Mellon University, 2012.
6. Лемак С.С. Максиминный контроль качества стабилизации космических объектов // Дисс. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва. 2004.
7. Лебедев А.В. Алгоритмы максиминного тестирования качества стабилизации космических систем // Дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва. 2008г.
8. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. Кн. Дом «Университет», 1998. — 300 с.
9. Садовничий В.А., Александров В.В., Александрова Т.Б. и др. Информационный процесс в латеральных полукружных каналах. ДАН 2011, Т. 436 № 1, с.129–132.

10. *Садовничий В.А., Александров В.В., Александрова Т.Б. и др.* Формирование выходной информации в вертикальных полукружных каналах. ДАН 2011, Т. 441 № 1, с.122–125.
11. *Vega R., Alexandrov V.V., Alexandrova T.B., Soto E.* Mathematical model of the cupula-endolymph system with morphological parameters for the axolotl (*Ambystoma tigrinum*) semicircular canals. Open Medical J., 2008, vol. 2, pp. 138–148
12. *Yromesteyn J., Droogendijk H., de Boer M.J. et al.* An Angular acceleration sensor inspired by the Vestibular System with a fully circular fluid channel and thermac read-out. IEEE MEMS 2014, San-Francisco, USA, January 26–30, 2014.
13. *Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А.* Лекции по механике управляемых систем. М.: МаксПресс, 2014, 240 с.
14. *Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М.* Оптимизация динамики управляемых систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000, 304 с.