МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

С.С Лемак, В.М. Морозов,
М.Ю. Попеленский, В.В. Тихомиров,
О.Ю. Черкасов

МЕХАНИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ
Сборник задач

Под редакцией
В.В. Александрова, Ю.В. Болотина

Москва 2012

С.С Лемак, В.М. Морозов, М.Ю. Попеленский,
В.В. Тихомиров, О.Ю. Черкасов

Механика управляемых систем
Сборник задач.

Под редакцией В.В. Александрова, Ю.В. Болотина

М., Издательство попечительского совета
механико-математического факультета МГУ, 121стр.

Настоящий сборник сформирован для сопровождения практических занятий по курсу «Механика управляемых систем». Сборник содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задания для самостоятельного решения. Включает в себя разделы по устойчивости, управляемости, наблюдаемости, стабилизации динамических систем, анализу стохастических систем, оптимальному оцениванию и теории оптимального управления движением.

Предназначен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области навигации и управления движением, и преподавателей соответствующих дисциплин.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 28.10.2012 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 7,5 п.л.
Заказ 12 Тираж 100 экз.

Издательство попечительского совета механико-математического факультета МГУ
г. Москва, Ленинские горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета

Оглавление

Предисловие

Настоящий сборник сформирован для сопровождения практических занятий по курсу «Механика управляемых систем», читаемого студентам четвертого курса отделения механики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

В 1967 году профессор кафедры прикладной механики Я.Н. Ройтенберг начал чтение разработанного им курса «Автоматическое регулирование» [18]. В 1989-91 годах профессора кафедры В.В. Александров и Н.А. Парусников модернизировали курс, что привело к изменению названия на «Механика управляемых систем».

Специфика курса «Механика управляемых систем» заключается в том, что для его освоения студентам необходимо активно использовать знания по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теоретической механике, теории вероятностей и случайных процессов, вариационного исчисления.

Сборник включает разделы по устойчивости, управляемости, наблюдаемости, стабилизации динамических систем, анализу стохастических систем, оптимальному оцениванию и теории оптимального управления движением. Он содержит краткие теоретические сведения, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. В сборнике имеются как относительно простые упражнения, так и задачи-исследования и теоретические вопросы. К некоторым задачам даны ответы или указания. Задачи и разделы повышенной трудности помечены символом «*».

При подготовке сборника использовались и хорошо известные задачи, и научные публикации последних лет. Большинство задач предлагалось на семинарских занятиях по курсу «Механика управляемых систем», на контрольных работах, в вариантах письменных зачетов и экзаменов, а также использовалось для наполнения системы компьютерного тестирования. Ряд задач основан на результатах, которые получили преподаватели и сотрудники кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета, лаборатории навигации и управления и лаборатории математического обеспечения имитационных динамических систем: В.В. Александров, Ю.В. Болотин, Д.И. Бугров, Н.Б. Вавилова, А.А. Голован, С.С. Лемак, А.И. Матасов, В.М. Морозов, Н.А. Парусников, М.Ю. Попеленский, В.В. Тихомиров, А.М. Формальский, О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев.

Вместе с курсом лекций "Оптимальное управление движением" [1] данный сборник составляет единое пособие как по чтению лекций, так и по проведению семинаров.

В конце сборника приведен список литературы, которая может использована при углубленном изучении соответствующих разделов курса.

Компьютерное тестирование по курсу «Механика управляемых систем» доступно по адресу `http:\\sdo.damc.ru`.

Сборник предназначен для студентов и аспирантов, специализирующихся в области управления и оценивания динамических систем, преподавателей и инженеров.

Редакторы

Глава 1

Динамические системы. Линеаризация. Устойчивость

Управляемые динамические системы (УДС), как правило, описываются при помощи систем нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = f(y, u, t), \tag{1.1}$$

где y — вектор состояния размерности n, u — вектор управления размерности r, t — время, f — вектор-функция, принадлежащая определенному классу. В дальнейшем, если не оговорено иного, функцию f будем считать дифференцируемой функцией своих аргументов. Если правые части системы (1.1) явным образом не зависят от времени, она называется автономной, в противном случае — неавтономной. В случае, когда управление выбрано как функция времени и (или) фазовых координат, анализ движения УДС может производиться методами теории дифференциальных уравнений.

Предположим, что исходя из некоторых соображений, например простоты реализации или минимизации какой-то целевой функции, выбрано управление u^*, которое в дальнейшем будем называть желаемым, или программным управлением, а соответствующее ему движение УДС y^* — желаемым, или программным, движением. В этом случае естественна постановка задачи анализа устойчивости желаемого движения. Эта задача традиционно сводится к анализу устойчивости тривиального решения уравнения в отклонениях.

Рассмотрим отклонение $x(t) = y(t) - y^*(t)$ реального движения от желаемого. Пусть $w(t) = u(t) - u^*(t)$ — отклонение управлений от желаемых обозначим через. Запишем дифференциальное уравнение в отклонениях:

$$\dot{x}(t) = f(y^*(t) + x, u^*(t) + w, t) - f(y^*(t), u^*(t), t) = g(x, w, t). \tag{1.2}$$

Полагая отклонения управлений и фазовых переменных малыми, разложим $g(x, w, t)$ в ряд Тейлора, и, удерживая члены первого порядка малости, получим уравнение в отклонениях в первом приближении в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w, \tag{1.3}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. В большинстве задач данного сборника эти матрицы полагаются не зависящими от времени.

В приложениях часто рассматривается задача линейного синтеза, или построения управления w в виде линейной обратной связи по отклонению x: $w = Kx$, где K — матрица, элементы которой подлежат выбору с целью обеспечения устойчивости тривиального решения уравнения в отклонениях.

Важным частным случаем программного движения является стационарное программное движение. Для таких движений, как правило, функция $g(x, w, t) = g(x, w)$ не зависит от времени. При $w \equiv 0$ уравнение в отклонениях превращаются в

$$\dot{x} = g(x), \tag{1.4}$$

а уравнение первого приближения – в

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{1.5}$$

Напомним определения, связанные с понятием устойчивости.

Определение 1.1. *Тривиальное решение* (1.4) *называется устойчивым по Ляпунову, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из выполнения условия* $|x(t_0)| \le \delta$ *следует* $|x(t)| < \varepsilon$ $\forall t > t_0$.

Определение 1.2. *Тривиальное решение* (1.4) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует открытая окрестность нуля* X^0 *такая, что* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ $\forall x(t_0) \in X^0$.

Множество X^0 начальных условий, для которых выполнено условие асимптотической устойчивости, называют областью притяжения тривиального решения. Если это множество совпадает с пространством состояний, то решение $x(t) \equiv 0$ называют асимптотически устойчивым в целом, или глобально асимптотически устойчивым.

Теорема 1.1. *1) Тривиальное решение* (1.5) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения матрицы* A

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

имеют отрицательные действительные части.

2) Тривиальное решение (1.5) *неустойчиво, если хотя бы один корень уравнения* $\Delta(\lambda) = 0$ *имеет положительную действительную часть.*

Теорема 1.2. ***(Критерий Гурвица).*** *Действительные части всех корней уравнения*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{1.6}$$

с действительными коэффициентами отрицательны, если и только если все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 =& a_1 > 0, \\ \Delta_2 =& \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ & \ldots\ldots \\ \Delta_n =& \det\Gamma > 0 \end{aligned}$$

положительны.

Теорема 1.3. *Для того, чтобы корни* (1.6) *имели отрицательные действительные части, необходимо, чтобы все коэффициенты* a_i *были положительны* ($a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$).

Предположим, что правые части (1.4), (1.5) связаны соотношением

$$\|g(x) - Ax\| \le C\|x\|^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда (1.5) является системой первого приближения для (1.4).

Теорема 1.4. ***(теорема об устойчивости по первому приближению).*** *1) Если все корни характеристического уравнения системы* (1.5) *имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение системы* (1.4) *асимптотически устойчиво.*

2) Если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то тривиальное решение (1.4) *неустойчиво.*

Другой метод исследования устойчивости тривиального решения (1.4) состоит в применении функций Ляпунова.

Рассмотрим функцию $V(x)$, определенную и непрерывную в области $\mathcal{D} = \{\|x\| < h\}$ и предположим, что $V(x)$ обладает в области $\mathcal{D}$ непрерывными частными производными $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Определение 1.3. *Функция* $V(x)$ *называется положительно определенной в области* $\mathcal{D}$, *если* $V(0) = 0$ *и всюду в* $\mathcal{D}$, *кроме точки* $x = 0$, *имеет место неравенство* $V(x) > 0$. *Если же выполняется неравенство* $V(x) < 0$, *то функция* $V(x)$ *называется отрицательно* *определенной. Если в области $\mathcal{D}$ всюду имеет место неравенство $V \geq 0$ или $V \leq 0$, то функция V называется знакопостоянной.*

Определение 1.4. *Функция*

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_k} g_k(x) = \quad \operatorname{grad} V, g(x)$$

называется полной производной по времени от $V(x)$ в силу системы (1.4).

Говорят также, что $\dot{V}$ — производная от функции V, взятая вдоль траекторий (1.4).

Теорема 1.5. ***(Барбашина-Красовского).*** *Если для системы (1.4) существует положительно определенная функция $V(x)$, такая, что $\dot{V} < 0$ вне M и $\dot{V} = 0$ на M, где M — множество, не содержащее целых траекторий (1.4), кроме точки $x = 0$, то тривиальное решение (1.4) асимптотически устойчиво.*

Эта теорема обобщает теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости, где требуется отрицательная определенность $\dot{V}$.

Пример 1. *Рассмотрим движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием силы тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости точки. Найти стационарные движения системы и исследовать их устойчивость.*

Решение. Уравнение движения точки имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - c\dot{\vec{r}}. \tag{1.7}$$

Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор, m – масса точки; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения; c – коэффициент сопротивления среды. Пусть x, y — горизонтальная и вертикальная координаты точки. Уравнение (1.7) в проекциях на оси x, y можно представить в виде

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \qquad \ddot{y} = -g - k\dot{y}, \qquad k = \frac{c}{m}. \tag{1.8}$$

Здесь x, y — циклические координаты (они не входят явно в уравнения движения). Поэтому стационарное движение определяется соотношениями $\dot{x} = \text{const}$, $\dot{y} = \text{const}$. В данном случае $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -\dfrac{g}{k}$, что соответствует вертикальному движению вниз с постоянной скоростью. Введем отклонения от стационарного решения $\xi = \dot{x}$, $\eta = \dot{y} + \dfrac{g}{k}$. Тогда уравнения в отклонениях примут вид $\dot{\xi} = -k\xi, \qquad \dot{\eta} = -k\eta$. В силу линейности они совпадают с уравнениями первого приближения. Асимптотическая устойчивость (и даже глобальная асимптотическая устойчивость) стационарного решения здесь очевидна.

Пример 2. *Рассмотрим уравнение нелинейных колебаний*

$$\ddot{y} + a\dot{y} + 2by + 3y^2 = 0, \qquad (a, b > 0). \tag{1.9}$$

Требуется определить положения равновесия системы, исследовать их устойчивость и оценить области их притяжения.

Решение. Представим (1.9) в виде системы уравнений первого порядка, полагая $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$

$$\dot{y}_1 = y_2, \qquad \dot{y}_2 = -2by_1 - ay_2 - 3y_1^2. \tag{1.10}$$

Система имеет два положения равновесия

$$1) \quad y_1 = 0,\ y_2 = 0; \qquad 2) \quad y_1 = -\frac{2}{3}b,\ y_2 = 0.$$

Для исследования устойчивости положений равновесия запишем линеаризованные уравнения в отклонениях.

$$1) \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2bx_1 - ax_2. \end{array} \qquad 2) \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 2bx_1 - ax_2. \end{array}$$

Характеристические уравнения этих систем имеют вид

$$1) \quad \lambda^2 + a\lambda + 2b = 0, \qquad 2) \quad \lambda^2 + a\lambda - 2b = 0$$

В соответствии с теоремами 1.2 и 1.3 корни первого уравнения имеют отрицательные действительные части, а у второго один из корней — положительную действительную часть. Тогда по теореме 1.4 первое положение равновесия асимптотически устойчиво, а второе неустойчиво.

Применим для исследования устойчивости первого положения равновесия $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ метод функций Ляпунова. В качестве функции Ляпунова возьмем полную энергию системы

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + bx_1^2 + x_1^3.$$

Функция V является положительно определенной при любом x_2 и $x_1 > -b$. Полная производная от функции V в силу системы (1.10) имеет вид $\dot{V} = -ax_2^2 \le 0$. Множество M, на котором $\dot{V} = 0$, описывается уравнением $x_2 \equiv 0$. Для применимости теоремы 1.5 это множество не должно содержать других положений равновесия, кроме точки $x_1 = 0$, т.е. точки M должны удовлетворять неравенству $x_1 > -\frac{2}{3}b$. По теореме 1.5 тривиальное положение равновесия $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ асимптотически устойчиво.

Проведем оценку (изнутри) области притяжения этого положения равновесия, используя выбранную функцию V. Рассмотрим поверхность уровня $V = c$ и определим постоянную c из условия прохождения этой поверхности через точку $(-\frac{2}{3}b, 0)$ (второе положение равновесия). Получим $bx_1^2 + x_1^3 = c$, где $x_1 = -\frac{2}{3}b$, откуда $c = \frac{4}{27}b^3$.

Рис. 1.1. P

Построим кривую

$$V(x_1, x_2) - c = \frac{1}{2}x_2^2 + bx_1^2 + x_1^3 - \frac{4}{27}b^3 = 0.$$

Имеем $\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2bx_1 + 3x_1^2 = 0$ при $x_1 = -\frac{2}{3}b$. Таким образом, точка $x_1 = -\frac{2}{3}b$ является двукратным корнем уравнения $V(x_1, 0) - c = 0$ и функцию $V(x_1, 0)$ можно представить в виде $V(x_1, 0) = (x_1 + \frac{2}{3}b)^2(x_1 - \frac{1}{3}b) + c$.

Заштрихованная область, находящаяся внутри кривой $V(x_1, x_2) = c$, является областью притяжения начала координат (областью асимптотической устойчивости тривиального положения равновесия). Внутри этой области $V > 0$, $\dot{V} \leq 0$ и множество

$$M = \quad -\frac{2}{3}b < x_1 < \frac{1}{3}b, \quad x_2 = 0$$

не содержит целых траекторий, кроме точки $(0, 0)$. Конечно же, это только оценка области притяжения, которая в действительности имеет больший размер.

Примечание. *Теорема 1.4 устанавливает только факт устойчивости тривиального решения системы* (1.10). *Это означает, в соответствии с определением 1.2, что решение $x = 0$ асимптотически устойчиво при достаточно малых начальных отклоне-*

ниях. В то же время применение теоремы 1.5 позволяет при помощи функции Ляпунова V оценить область начальных отклонений, для которых асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ гарантируется.

Пример 3. *В пространстве параметров (a, b) укажите область устойчивости тривиального решения уравнения*

$$x^{IV} + a\dddot{x} + b\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

где $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$. Составим матрицу Гурвица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

В соответствии с теоремой 1.2 условия асимптотической устойчивости имеют вид

$$\Delta_1 = a > 0, \quad \Delta_2 = ab - 1 > 0, \quad \Delta_3 = ab - a^2 - 1 > 0.$$

Из этих условий следует, что искомая область есть $a > 0$, $b > a + \frac{1}{a}$.

Определение 1.5. *Тривиальное решение* (1.5) *называется устойчивым с запасом $\mu > 0$, если все корни его характеристического уравнения удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i \leq \mu$.*

Пример 4. *В пространстве (k_1, k_2) укажите область устойчивости с запасом 2 тривиального решения системы*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 + u_1, \\ \dot{x_2} &= x_1 + u_2 \end{aligned}$$

при управлении вида $u_1 = k_1x_1$, $u_2 = k_2x_2$.

Решение. Для того, чтобы определить область устойчивости тривиального решения системы с запасом 2, сделаем замену переменных $x_k = e^{-2t}y_k$, $k = 1, 2$. Тогда в новых переменных система имеет вид

$$\dot{y}_1 = (k_1 + 2)y_1 + y_2, \qquad \dot{y}_2 = y_1 + (k_2 + 2)y_2,$$

а ее характеристическое уравнение есть

$$(\lambda - 2)^2 - (k_1 + k_2)(\lambda - 2) + k_1k_2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет корни с отрицательными действительными частями, если и только если

$$k_1 + k_2 + 4 < 0, \qquad (k_1+2)(k_2+2) > 1.$$

Пример 5. *В пространстве параметров (k_1, k_2) укажите область устойчивости тривиального решения системы*

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 + f_1(x_1, x_2) + u_1, \\ \dot{x_2} &= x_2 + f_2(x_1, x_2) + u_2 \end{aligned}$$

при использовании управления вида $u_1 = k_1 x_1$, $u_2 = k_2 x_1$. Здесь функции $f_k(x_1, x_2)$ содержат члены не ниже второго порядка малости по переменным x_1, x_2.

Решение. Запишем характеристическое уравнение для системы уравнений первого приближения

$$\begin{vmatrix} k_1 - \lambda & 1 \\ k_2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (k_1+1)\lambda + k_1 - k_2 = 0.$$

Условия отрицательности действительных частей корней этого уравнения задаются условиями $k_1 + 1 < 0$, $k_1 - k_2 > 0$. В соответствии с теоремой 1.4 эти условия являются условиями асимптотической устойчивости тривиального решения исходной нелинейной системы.

1.1. Положения равновесия. Линеаризация. Устойчивость по первому приближению

Задача 1.1. Найдите все положения равновесия системы. Определите, какие устойчивы, а какие нет.

а) $$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \ln(2 - y_2^2), \\ \dot{y}_2 &= e^{y_1} - e^{y_2}. \end{aligned}$$ б) $$\begin{aligned} \dot{x} &= \ln(y^2 - x), \\ \dot{y} &= x - y - 1. \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1^2 + y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\ln(1 - y_1 + y_1^2) + \ln 3. \end{aligned}$$

Задача 1.2. Уравнение колебаний математического маятника имеет вид

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega^2 \sin x = 0.$$

Здесь x – угол отклонения маятника от нисходящей вертикали; $\delta > 0$ – коэффициент сопротивления, $\omega^2 = g/l$, где l – длина маятника, g – ускорение свободного падения.

а) Найдите стационарные решения и запишите уравнения в отклонениях от стационарного решения. Исследуйте устойчивость стационарных решений при помощи теоремы 1.4.

б) Обозначим через Δx отклонение от стационарного решения $x^* = 0$: $\Delta x = x - x^*$. Исследуйте устойчивость нулевого решения уравнения в отклонениях $\Delta\ddot{x}+\delta\Delta\dot{x}+\omega^2\Delta x = 0$ при помощи функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\Delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\Delta x^2.$$

Воспользуйтесь теоремой 1.5.

Задача 1.3. Уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x + bx^3 = 0$$

описывает нелинейные колебания материальной точки под действием силы сопротивления $-a\dot{x}$, $a > 0$, пропорциональной скорости, и нелинейной восстанавливающей силы, причем случай $b > 0$ соответствует «сильной» пружине, $b < 0$ — «слабой».

а) Найдите стационарные решения и запишите линейные уравнения в отклонениях от стационарных решений. Покажите, что при $a > 0, b > 0$ единственное стационарное решение устойчиво, $a > 0, b < 0$ имеются еще два неустойчивых стационарных решения. Постройте фазовый портрет исходного уравнения при $a = 1$, $b = -0,04$.

б)* Рассмотрите функцию Ляпунова

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(bx_1^4 + 2x_1^2 + 2x_2^2),$$

где $x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$, и убедитесь, что при $a > 0, b > 0$ устойчивое стационарное решение является асимптотически устойчивым в целом, при $a > 0, b < 0$ асимптотически устойчиво, но не в целом. Используйте указанную функцию Ляпунова для оценки изнутри области притяжения тривиального стационарного решения при $b < 0$ (см. пример 2).

Задача 1.4. Уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

описывает электрические колебания в замкнутом контуре, состоящем из соединенных последовательно конденсатора, индуктивности, нелинейного сопротивления и элементов, обеспечивающих подкачку энергии извне. Функция $x(t)$ имеет смысл электрического тока, а в параметре ε заложены количественные соотношения между составляющими электрической цепи, в том числе и нелинейной компонентой сопротивления.

а) Запишите линейные уравнения в отклонениях от стационарного решения, проанализируйте устойчивость этого решения в зависимости от параметра ε. Используйте теорему 1.4.

б) Рассмотрите функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \qquad (x_1 = x,\ x_2 = \dot{x})$$

и воспользуйтесь теоремой 1.5 для установления асимптотической устойчивости тривиального решения и оценки области его притяжения.

Задача 1.5. Уравнения возмущенного движения центра масс спутника, линеаризованные в окрестности невозмущенной экваториальной круговой орбиты с орбитальной угловой скоростью Ω и радиусом r_0, имеют вид [17]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\,2\dfrac{\Omega}{r_0}\dot{x}_2 + b_1u_1, \\ \ddot{x}_2 = 3\Omega^2 x_2 + 2r_0\Omega\dot{x}_1 + b_2u_2, \\ \ddot{x}_3 = -\,\Omega^2 x_3 + b_3u_3, \end{cases} \tag{1.11}$$

Здесь $x_1 = \lambda - \Omega t$, $x_2 = r - r_0$, $x_3 = \theta$, где λ, r, θ — сферические координаты спутника, $u_{1,2,3}$ — управляющие воздействия, $b_{1,2,3}$ — весовые коэффициенты при управлениях.

Уравнения (1.11) можно интерпретировать как уравнения относительного движения космического аппарата в окрестности орбитальной станции, движущейся по круговой орбите.

Покажите, что при $u_j = 0$ движение $x_j = 0$, $\dot{x}_j = 0$, $j = 1, 2, 3$ неустойчиво. Поэтому уравнениями (1.11) можно пользоваться лишь при условии, что управляющие силы u_1 и u_2 обеспечивают малость отклонений $x_1(t)$, $x_2(t)$ в течении всего рассматриваемого отрезка времени (см. задачу 2.37 в гл. 2).

Вместо вектора $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ можно ввести вектор меньшей размерности $(x_2, x_3, y_1 = \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ т.к. координата φ (и соответствующая ей переменная x_1) циклическая. Тогда (1.11) примет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\,2\dfrac{\Omega}{r_0}\dot{x}_2 + b_1u_1, \\ \ddot{x}_2 = \ \ 3\Omega^2 x_2 + 2r_0\Omega y_1 + b_2u_2, \\ \ddot{x}_3 = -\,\Omega^2 x_3 + b_3u_3. \end{cases}$$

Покажите, что при $u_j = 0$, $j = 1, 2, 3$ тривиальное решение этой системы устойчиво.

Задача 1.6. *Устойчивость прямолинейных траекторий сближения.* Для исследования управляемых маневров в окрестности орбитальной станции уравнения относительного движения можно записывать в полярной системе координат, связанной со станцией. Например, это удобно, когда управляющее воздействие вырабатывается по результатам измерений расстояния между объектами и угловой скорости линии визирования.

Уравнения (1.11) относительного движения центра масс космического корабля в окрестности орбитальной станции, движущейся по круговой орбите Земли с угловой орбитальной скоростью Ω, имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot\rho - 2\rho\Omega\dot\varphi - \rho\dot\varphi^2 - 3\rho\Omega^2\sin^2\varphi = a_\rho, \\ \rho\ddot\varphi + 2\dot\rho(\Omega + \dot\varphi) - \dfrac{3}{2}\rho\Omega^2\sin 2\varphi = a_\varphi. \end{cases}$$

Здесь ρ — расстояние между станцией и космическим аппаратом, φ — угол между касательной к орбите станции и линией визирования станция-корабль.

Продольное управление a_ρ, направленное вдоль линии визирования, вырабатывается так, чтобы скорость сближения космического корабля и станции изменялась по закону $\dot\rho = k\Omega\rho$, где $k < 0$. Управление, ортогональное линии визирования, отсутствует: $a_\varphi = 0$. В этом случае угловое движение описывается уравнением:

$$\ddot\varphi + 2k\Omega\dot\varphi - \frac{3}{2}\Omega^2\sin 2\varphi = -2k\Omega^2.$$

а) Найдите стационарные решения $\varphi(t) = \varphi_0$ уравнения углового движения, отвечающие прямолинейным траекториям сближения, запишите уравнения в отклонениях и определите значения k, при которых эти решения существуют. Проведите анализ устойчивости стационарных решений.

б) Пусть сближение по дальности осуществляется по закону

$$\dot\rho = \frac{k\omega + k_1\dot\varphi}{\omega + \dot\varphi}\omega\rho, \qquad k_1 > 0, \qquad a_\varphi = 0.$$

Тогда угловое движение описывается уравнением

$$\ddot\varphi + 2k_1\Omega\dot\varphi - \frac{3}{2}\omega^2\sin 2\varphi = -2k\Omega^2.$$

Найдите стационарные решения этого уравнения, запишите уравнения в отклонениях. Проведите анализ устойчивости. Покажите, что устойчивые стационарные решения удовлетворяют условию

$\cos 2\varphi_0 < 0$, и им соответствуют особые точки типа устойчивого узла или фокуса, а неустойчивым решениям соответствуют особые точки типа седла.

Задача 1.7. Уравнения вертикального движения ракеты имеют вид

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \dfrac{P - Q(v,h)}{m} - g(h), \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}, \end{cases}$$

Здесь h — высота подъема ракеты, v — скорость центра масс, m — масса ракеты, P — сила тяги двигателя, $Q(v,h)$ — сила сопротивления среды, $g(h)$ — ускорение свободного падения, c — относительная скорость истечения газа из сопла двигателя.

При движении в небольшом диапазоне высот и на дозвуковых скоростях можно считать, что $Q(v,h) = kv^2$, где k — константа, а также пренебречь зависимостью ускорения свободного падения от высоты полета. Допустим также, что изменение массы в процессе подъема пренебрежимо мало, и рассмотрим уравнение для v, в котором P и m — константы.

Найдите решение уравнения движения ракеты, соответствующее полету с постоянной скоростью, и исследуйте его устойчивость.

Задача 1.8. Уравнения движения центра масс осесимметричного снаряда в вертикальной плоскости имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = P - kv^2 - g\sin\theta, \\ \dot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{v}, \end{cases}$$

где x и y — горизонтальная и вертикальная координаты центра масс снаряда, v — скорость движения центра масс, θ — угол наклона траектории (угол между вектором скорости центра масс и осью Ox), P — отнесенная к массе сила тяги двигателя, направленная точно по вектору скорости, $g = \mathrm{const}$ — ускорение свободного падения, $k = \mathrm{const}$ — отнесенный к массе коэффициент лобового сопротивления.

Видно, что первые два кинематических уравнения отщепляются от системы, и если скорость и угол наклона траектории известны, дальность и высота полета определяются при помощи квадратур. Поэтому представляет интерес исследование последних двух динамических уравнений системы.

а) Найдите стационарное решение динамической части системы уравнений пассивного (при $P = 0$) движения снаряда в вертикальной плоскости, запишите уравнения в отклонениях от стационарного решения и исследуйте их устойчивость. Постройте эскиз фазового портрета на плоскости (θ, v).

б) Выполните предыдущее задание, считая, что сила тяги P равна положительной константе. Покажите, что движение вертикально вверх неустойчиво, а вниз — устойчиво.

Задача 1.9.* Уравнения пассивного движения центра масс летательного аппарата в вертикальной плоскости имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = -kv^2 - g\sin\theta, \\ \dot{\theta} = k_1 v - \dfrac{g\cos\theta}{v}, \end{cases}$$

где обозначения совпадают с обозначениями задачи 1.8, $k_1 = \mathrm{const}$ — коэффициент подъемной силы.

Найдите стационарное решение динамической части системы уравнений движения летательного аппарата в вертикальной плоскости, запишите уравнения в отклонениях от стационарного решения и исследуйте их устойчивость. Постройте эскиз фазового портрета на плоскости (θ, v).

Задача 1.10. *Устойчивость движения мобильного робота по трассе.* Пусть робот состоит из корпуса, двух ведущих колес, расположенных на одной оси, перпендикулярной продольной оси корпуса робота, и пассивного колеса. Уравнения движения мобильного робота имеют вид [6]:

$$\begin{cases} \dot{x} = V\cos\alpha - k_0\omega\sin\alpha, \\ \dot{y} = V\sin\alpha + k_0\omega\cos\alpha, \\ \dot{\alpha} = \omega, \\ \dot{V} = -V + k_1k_2\omega^2 + u_S, \\ \dot{\omega} = -k_3(1 + \frac{k_2}{k_1}V)\omega + \frac{k_3}{k_1}u_D, \end{cases}$$

где x и y — безразмерные декартовы координаты некоторой точки робота, расположенной на его продольной оси, α — угол между продольной осью робота и осью абсцисс, ω — угловая скорость робота, V — продольная скорость робота, k_0, k_1, k_2, k_3 — безразмерные коэффициенты, связанные с массовыми, геометрическими и электромеханическими параметрами робота, u_S, u_D — управляющие воздействия, являющиеся полусуммой и полуразностью напряжений на обмотках электродвигателей правого и левого колес.

а) Программное движение заключается в движении с постоянной скоростью вдоль оси абсцисс. Убедитесь, что рассмотренная система имеет решение, отвечающее этому программному движению. Запишите уравнения в отклонениях от программного движения.

б) Обратите внимание, что система уравнений в отклонениях разделяется на две независимые подсистемы. Первая из них (уравнения для Δx и ΔV) описывает продольное движение робота, а вторая — поперечные и угловые перемещения. Исследуйте устойчивость первой подсистемы, полагая $u_S = 0$.

в) Для системы уравнений в отклонениях, описывающей поперечное и угловое движение, проверьте устойчивость тривиального решения при отсутствии управления u_D.

Задача 1.11. *Задача преследования объекта, убегающего по линии визирования.* Рассмотрим задачу преследования цели, стратегия которой заключается в убегании по линии визирования: в каждый момент времени скорость цели направлена в сторону, противоположную направлению на преследователя. Преследователь и цель считаются материальными точками, движущимися в плоскости с постоянными по модулю скоростями. Уравнения движения имеют вид [25]

$$\begin{cases} \dot{\varrho} = -\cos\beta + b, \\ \dot{\beta} = \dfrac{\sin\beta}{\varrho} + u, \end{cases}$$

где ϱ — нормированное расстояние между преследователем и целью, β — угол между вектором скорости преследователя и линией визирования, u — управление, кусочно-непрерывная функция времени, b — отношение скорости цели к скорости преследователя. Граничные условия имеют вид $\varrho(0) = \varrho_0$, $\beta(0) = \beta_0$, $\varrho(T) = \varrho_T$, $\beta(T)$ — свободно. На управление наложено ограничение $|u(t)| \le \bar{u}, \bar{u} > 0, t \in [0, T]$, где T — момент окончания процесса.

Для случая $0 < b < 1$ найдите стационарные решения динамической системы с управлениями $u(t) = \bar{u}$ и $u(t) = -\bar{u}$, запишите уравнения в отклонениях и проанализируйте их устойчивость и характер стационарных решений в зависимости от значений параметра b. Установите отсутствие предельных циклов. Постройте эскиз фазового портрета.

Задача 1.12. Математическая модель управляемой системы, записанная в полярных координатах r, φ, имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{r} = (u - 2)r - r^3, \\ &\dot{\varphi} = r + 1. \end{aligned}$$

Определите при каких значениях постоянного управления $u = \mathrm{const}$ можно получить замкнутую траекторию (предельный цикл) на плоскости ($y_1 = r\cos\varphi$, $y_2 = r\sin\varphi$). Вычислите амплитуду и период этого движения. Исследуйте его устойчивость по отношению к переменной r.

Задача 1.13. Рассмотрите следующие системы:

$$\text{а)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1); \end{aligned}$$

$$\text{б)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1); \end{aligned}$$

$$\text{c)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

Исследуйте устойчивость положения равновесия $x_1 = x_2 = 0$ в этих системах. Убедитесь, что в системе а) имеется устойчивый предельный цикл, в системе б) имеется неустойчивый предельный цикл, а в системе в) - полуустойчивый предельный цикл. Для решения задачи перепишите уравнения в полярных координатах, используя преобразование

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1}.$$

Тогда система а) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -r(r^2 - 1), \\ \dot{\varphi} &= -1. \end{aligned}$$

Единственный устойчивый предельный цикл совпадает с единичной окружностью. Аналитическое решение имеет вид

$$r(t) = \frac{1}{(1 + c_0 e^{-2t})^{1/2}}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 - t, \quad c_0 = \frac{1}{r_0^2} - 1.$$

1.2. Критерий Гурвица

Задача 1.14. Найдите все k, при котором тривиальное решение уравнения $\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + u = 0$ стабилизируется при помощи управления а) $u = kx$, б) $u = k\dot{x}$, в) $u = k\ddot{x}$. г) Найдите все k, при котором тривиальное решение уравнения $k\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ асимптотически устойчиво.

Задача 1.15. На плоскости параметров (k_1, k_2) укажите область асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения

$$\text{а) } \dddot{x} + k_1\ddot{x} + k_2\dot{x} + x = 0, \quad \text{в) } k_1\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + k_2 x = 0,$$
$$\text{б) } \dddot{x} + \ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2 x = 0, \quad \text{г) } k_1\dddot{x} + \ddot{x} + k_2\dot{x} + x = 0,$$
$$\text{д) } k_1\dddot{x} + k_2\ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

Задача 1.16. На плоскости параметров (k_1, k_2) укажите область устойчивости с запасом 1 тривиального решения системы уравнений

$$\text{а) } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = k_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = k_2 x_1 + x_2. \end{array} \qquad \text{б) } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - k_2 x_2. \end{array} \qquad \text{г) } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = k_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + k_2 x_2. \end{array}$$

$$\text{д) } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2. \end{array} \qquad \text{е) } \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + k_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + k_1 x_1. \end{array}$$

Задача 1.17. Малые колебания плоского математического маятника относительно вертикали при наличии вязкого трения описываются системой уравнений

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 - \varepsilon x_2, \end{array}$$

где x_1 – угол отклонения маятника от вертикали; x_2 – угловая скорость маятника; $\omega = \sqrt{g/l}$, l – длина маятника, g – ускорение свободного падения; ε – коэффициент вязкого трения на оси колебаний маятника.

Укажите в плоскости параметров $(\omega^2; \varepsilon)$:
а) область асимптотической устойчивости тривиального решения,
б) область устойчивости с запасом 1 тривиального решения.

Задача 1.18. В плоскости параметров (k_1, k_2) укажите область асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_2 x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1. \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -k_2 x_1. \end{cases}$$

Глава 2

Анализ наблюдаемости и управляемости. Декомпозиция по наблюдению и по управлению

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad z(\tau) = Hx(\tau), \qquad \tau \in [t_0, t]. \tag{2.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние системы, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^s$ — s-мерный вектор-столбец управляющих воздействий ($u(\cdot) \in \mathrm{KC}[t_0, t]$, где КС — пространство векторных кусочно-непрерывных функций), B — постоянная матрица размерности $n \times s$, z — m-мерный вектор-столбец измерений, H — постоянная матрица размерности $m \times n$.

Определение 2.1. *Система* (2.1) *называется наблюдаемой на отрезке* $[t_0, t]$*, если можно определить состояние* $x(t)$ *из наблюдения* $z(\tau)$ *на отрезке* $[t_0, t]$.

Определение 2.2. *Система* (2.1) *называется управляемой на отрезке* $[t_0, t]$*, если для любого начального состояния* $x(t_0) = \xi$ *существует управление* $u(\tau)$, $t_0 \le \tau \le t$*, переводящее систему в заданное состояние* $x(t) = \eta$.

Определение 2.3. *Матрица*

$$N = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \dots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix}$$

называется матрицей наблюдаемости.

Теорема 2.1. *(Критерий наблюдаемости Калмана). Для наблюдаемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} N = n$.

Следствие. *При* $m = 1$ *условие наблюдаемости можно записать в виде* $\det N \neq 0$.

Определение 2.4. *Матрица* $W = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ *называется матрицей управляемости.*

Теорема 2.2. *(Критерий управляемости Калмана). Для управляемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} W = n$.

Следствие. *При* $s = 1$ *условие управляемости можно записать в виде* $\det W \neq 0$.

Полезны также следующие модификации критериев управляемости и наблюдаемости, известные как критерии Попова.

Теорема 2.3. *Для наблюдаемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *выполнялось условие*

$$\operatorname{rank} \quad \begin{matrix} A - \lambda E \\ H \end{matrix} \quad = n.$$

Теорема 2.4. *Для управляемости системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *выполнялось условие*

$$\operatorname{rank}\,(A - \lambda E, B) = n.$$

Рассмотрим линейную механическую систему, представленную в форме

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx &= Lu, \\ z &= H_1 x + H_2 \dot{x}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где x — n-мерный вектор состояния системы, M, D, K — постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, u — s-мерный вектор управляющих воздействий, z — m-мерный вектор измерений, L — постоянная матрица размерности $(n \times s)$, H_1, H_2 — постоянные матрицы размерности $(m \times n)$.

Для системы (2.2) критерии наблюдаемости и управляемости Попова принимают следующий вид.

Теорема 2.5. *Для наблюдаемости системы* (2.2) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\lambda \in \mathbb{C}$ *выполнялось условие*

$$\operatorname{rank} \quad \begin{matrix} M\lambda^2 + D\lambda + K \\ H_1 + \lambda H_2 \end{matrix} \quad = n.$$

Теорема 2.6. *Для управляемости системы* (2.2) *необходимо и достаточно, чтобы для любого* λ *выполнялось условие*

$$\operatorname{rank}\,(M\lambda^2 + D\lambda + K, L) = n.$$

Поскольку при λ, не являющихся корнем соответствующего характеристического уравнения, матрица $M\lambda^2 + D\lambda + K$, очевидно, невырождена, проверку условий теорем 2.3–2.6 достаточно проводить только для соответствующих корней.

Обозначив $\alpha_1 = -a_n, \ldots \alpha_n = -a_1$, представим характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ матрицы A в виде $\Delta(\lambda) = \lambda^n - \alpha_1 - \alpha_2\lambda - \ldots - \alpha_n\lambda^{n-1}$.

Рассмотрим систему (2.1) со скалярными управлением и наблюдением ($s = 1, m = 1$) — систему с одним входом и одним выходом

$$\dot{x} = Ax + bu, \qquad z = h^\top x, \tag{2.3}$$

где b, h — векторы размерности $(n \times 1)$.

Определение 2.5. *Пара матриц*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

называется канонической формой по управлению системы (2.3).

Определение 2.6. *Пара матриц*

$$A^0 = \begin{pmatrix} \alpha_n & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad h_0^\top = (1\ 0\ \ldots\ 0) \tag{2.5}$$

называется канонической формой по наблюдению системы (2.3).

Теорема 2.7. *В пространстве состояний существует базис, в котором пара матриц $\{A, b\}$ имеет каноническое представление* (2.4)*, тогда и только тогда, когда* (2.3) *управляема.*
В пространстве состояний существует базис, в котором пара матриц $\{A, h\}$ имеет каноническое представление (2.5)*, тогда и только тогда, когда* (2.3) *наблюдаема.*

Пусть система (2.1) не является управляемой, т.е. ранг матрицы W равен k, причем $k < n$.

Теорема 2.8. *(О декомпозиции по управлению.) Если система* (2.1) *не является управляемой, то она представима в виде двух подсистем, одна из которых управляема в своем подпространстве, а другая является неуправляемой.*

Декомпозированная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{11}\xi + A_{12}\eta + B_1 u, \\ \dot{\eta} &= A_{22}\eta. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь ξ — k-мерный вектор управляемой подсистемы, η — $(n-k)$-мерный вектор неуправляемой подсистемы, причем пара (A_{11}, B_1) управляема.

Пусть система (2.1) не является наблюдаемой, т.е. ранг матрицы N равен l, причем $l < n$.

Теорема 2.9. *(О декомпозиции по наблюдению). Если система* (2.1) *не является наблюдаемой, то она представима в виде двух подсистем, одна из которых наблюдаема в своем подпространстве, а другая является ненаблюдаемой.*

Декомпозированная система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} =& \tilde{A}_{11}\xi, \\ \dot{\eta} =& \tilde{A}_{21}\xi + \tilde{A}_{22}\eta, \end{aligned} \qquad z = H_1\xi. \tag{2.7}$$

Здесь ξ — l-мерный вектор наблюдаемой подсистемы, η — $(n-l)$-мерный вектор ненаблюдаемой подсистемы, причем пара (A_{11}, H_1) наблюдаема.

Пример 1. *Система* (2.3) *наблюдаема. Привести ее к канонической форме по наблюдению.*

Решение. Решение заключается в поиске базиса в $\mathbb{R}^n$, в котором система примет канонический вид (2.5). В силу наблюдаемости система векторов

$$g_1 = h, g_2 = A^\top g_1, \ldots, g_n = A^\top g_{n-1}$$

является базисом и $g_{n+1} = Ag_n$ представляется, согласно теореме Гамильтона-Кели, в виде $g_{n+1} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 \ldots + \alpha_n g_n$, где α_i $(i = 1, \ldots, n)$ — заранее вычисленные коэффициенты характеристического уравнения матрицы A.

Введем новые ковариантные координаты $\xi_i = x^\top f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и найдем базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Из (2.5) получим:

$$\begin{aligned} \xi_1 =& g_1^\top x = x^\top f_1 \Rightarrow f_1 = g_1, \\ \xi_2 =& \dot{\xi}_1 - \alpha_n \xi_1 \Rightarrow \xi_2 = x^\top (A^\top g_1 - \alpha_n g_1) = x^\top f_2 \Rightarrow f_2 = g_2 - \alpha_n g_1, \\ \xi_3 =& \dot{\xi}_2 - \alpha_{n-1}\xi_1 \Rightarrow \xi_3 = x^\top (A^\top g_2 - \alpha_n A^\top g_1 - \alpha_{n-1} g_1) = x^\top f_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow& f_3 = g_3 - \alpha_n g_2 - \alpha_{n-1} g_1 \\ &\ldots \\ \xi_n =& \dot{\xi}_{n-1} - \alpha_2 \xi_1 \Rightarrow \xi_n = x^\top (g_n - \alpha_n g_{n-1} - \alpha_{n-1} g_{n-2} - \ldots \\ &- \alpha_3 g_2 - \alpha_2 g_1) = x^\top f_n \Rightarrow f_n = g_n - \alpha_n g_{n-1} - \ldots - \alpha_2 g_1, \\ \dot{\xi}_n =& x^\top (g_{n+1} - \alpha_n g_n - \alpha_{n-1} g_{n-1} - \ldots - \alpha_3 g_3 - \alpha_2 g_2) = \\ =& x^\top \alpha_1 g_1 = \alpha_1 \xi_1. \end{aligned}$$

Пример 2. *Исследуйте наблюдаемость системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \\ z = x_1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} h^\top &= \ 1\ 0\ 0\ , \\ h^\top A &= \ 0\ 1\ 0\ , \\ h^\top A^2 &= \ 1\ 1\ 1\ , \end{aligned} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда $\det N \neq 0$, так что система наблюдаема.

Пример 3. *Исследуйте наблюдаемость системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3, \\ z = x_2. \end{cases}$$

Если система не вполне наблюдаема, проведите декомпозицию по наблюдению.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h^\top &= \ 0\ 1\ 0\ = g_1^\top, \\ h^\top A &= \ 1\ 1\ 1\ = g_2^\top, \\ h^\top A^2 &= \ 2\ 2\ 2\ = g_3^\top, \end{aligned} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} N = 2$, система не вполне наблюдаема. Проведем декомпозицию по наблюдению. Вектор $g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, где $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2$. Введем наблюдаемые координаты $\xi_1 = z = g_1^\top x$, $\xi_2 = g_2^\top x$. Наблюдаемая подсистема имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = g_1^\top \dot{x} = g_1^\top Ax = g_2^\top x = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = g_2^\top \dot{x} = g_2^\top Ax = g_3^\top x = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 2\xi_2 \\ z = \xi_1 \end{cases}$$

Дополним систему векторов $\{g_1, g_2\}$ до базиса, выбрав линейно-независимый вектор $f_1 = (s_1\ s_2\ s_3)^\top$, например, ортогональным g_1, g_2 ($g_1^\top f_1 = 0$, $g_2^\top f_1 = 0$), откуда следует $s_2 = 0$, $s_1 + s_3 = 0$ и $f_1 = (1\ 0\ -1)^\top$. Ненаблюдаемая подсистема в этом базисе представлена ковариантной координатой $\eta_1 = f_1^\top x$, откуда $\dot{\eta}_1 = f_1^\top Ax$.

Найдем разложение вектора $A^\top f_1$ по векторам базиса:

$$A^\top f_1 = \begin{pmatrix} -\ 1 \\ 1 \\ -\ 1 \end{pmatrix} = \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2 + \nu_1 f_1,$$

где $\gamma_2 = -1$, $ga_1 = 2$, $\nu_1 = 0$. Уравнение ненаблюдаемой подсистемы примет вид:

$$\dot{\eta}_1 = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \nu_1 \eta_1 = -\xi_1 + 2\xi_2 + 0\eta_1.$$

Пример 4. *Исследуйте наблюдаемость системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ z = x_1 + C, \quad C = \text{const}, \end{cases}$$

в которой измерение содержит неизвестную постоянную погрешность.

Решение. Введем новую переменную $x_3 = C$, $\dot{x}_3 = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = 0, \\ z = x_1 + x_3, \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} h^\top \\ h^\top A \\ h^\top A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } N = 3.$$

Таким образом, система полностью наблюдаема. Это означает, что неизвестная погрешность в измерении тоже может быть определена.

Пример 5. *Исследуйте наблюдаемость системы*

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -x_1, z = x_1 + \nu \sin \omega t, \end{aligned}$$

в которой измерение содержит нестационарную ($\omega \neq 0$) *погрешность* $\nu \sin \omega t$, $\nu = \text{const}$ *— неизвестна, а частота* ω *известна.*

Решение. Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} x_3 &= \nu \sin \omega t, & \dot{x}_3 &= \nu\omega \cos \omega t, & \dot{x}_3 &= \omega x_4, \\ x_4 &= \nu \cos \omega t, & \dot{x}_4 &= -\nu\omega \sin \omega t, & \dot{x}_4 &= -\omega x_3, \\ & & & & z &= x_1 + x_3. \end{aligned}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&\omega\\0&0&-\omega&0\end{pmatrix},\qquad h^\top=\begin{matrix}1&0&1&0\end{matrix},$$

$$N=\begin{pmatrix}h^\top\\h^\top A\\h^\top A^2\\h^\top A^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&\omega\\-1&0&-\omega^2&0\\0&-1&0&-\omega^3\end{pmatrix},$$

$$\det N=\begin{matrix}1&0&\omega\\0&-\omega^2&0\\-1&0&-\omega^3\end{matrix}+\begin{matrix}0&1&\omega\\-1&0&0\\0&-1&-\omega^3\end{matrix}=\omega(\omega^2-1)^2.$$

Следовательно, $\det N\neq 0$ при $\omega\notin\{-1,0,1\}$. Отсюда следует, что при $\omega\notin\{-1,1\}$ система является наблюдаемой. В этом случае неизвестная погрешность ν также может быть определена.

Пример 6. *Проведите анализ управляемости системы*

$$\begin{cases}\dot x_1=x_2+x_3,\\ \dot x_2=x_1+x_2+u,\\ \dot x_3=-x_2-x_3.\end{cases}$$

В случае отсутствия управляемости проведите декомпозицию системы по управлению.

Решение. Выпишем матрицы системы

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

и вычислим матрицу управляемости

$$Ab=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad A^2b=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\quad\Rightarrow\quad W=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&2\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank}W=2$, система не является управляемой. Проведем декомпозицию по управлению. Приведем систему к базису $\{g^1=b,g^2=Ag^1,f^1\}$, где $f^1=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^\top$ ортогонален g^1,g^2: $(f^1,g^1)=(f^1,g^2)=0\Rightarrow\alpha_2=0,\alpha_1-\alpha_3=0$. Можно принять $f^1=\begin{matrix}1&0&1\end{matrix}^\top$. Тогда

$$Ag^2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=2g^1,\quad Af^1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=g^2.$$

Сделав замену переменных $x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \eta f^1$, получим:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_2 + \eta, \\ x_2 = \xi_1 + \xi_2, \\ x_3 = -\xi_2 + \eta. \end{cases}$$

Для записи системы в новых переменных подставим замену переменных в правую и левую части выражения $\dot{x} = Ax + bu$ и приведем подобные члены при соответствующих базисных векторах g^1, g^2, f^1:

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\eta} f^1 = Ax + bu = \xi_1 g^2 + \xi_2 2 g^1 + \eta g^2 + g^1 u.$$

В новых переменных

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ \xi_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ \eta = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\xi_2 + u, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \eta, \\ \dot{\eta} = 0. \end{cases}$$

Подсистема (ξ_1, ξ_2) является управляемой, неуправляемая часть представлена через переменную η.

Пример 7. *Проанализируйте управляемость системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_3 + x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 = 2x_4 + u_1. \end{cases}$$

Декомпозируйте систему по компонентам вектора управления. Разберите два варианта: последовательную и параллельную (челночную) декомпозиции.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 12 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} W = 4$$

$$g^1 = b^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad g^2 = Ag^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \quad g^3 = Ag^2 = \begin{pmatrix}1\\0\\4\\4\end{pmatrix},$$

$$g^4 = Ag^3 = \begin{pmatrix}1\\0\\12\\8\end{pmatrix} = 4g^1 - 8g^2 + 5g^3,$$

$$f^1 = b^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f^2 = Af^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad f^3 = Af^2 = \begin{pmatrix}2\\1\\4\\0\end{pmatrix},$$

1. Последовательная декомпозиция: базис $\{g^1, g^2, g^3, f^1\}$.

$$g^4 = 4g^1 - 8g^2 + 5g^3,\ f^2 = 6g^1 - 7g^2 + 2g^3 + f^1,\ x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \xi_3 g^3 + \eta_1 f^1,$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\xi}_3 g^3 + \dot{\eta}_1 f^1,$$

$$Ax + Bu = \xi_1 g^2 + \xi_2 g^3 + \xi_3(4g^1 - 8g^2 + 5g^3) + \eta_1(6g^1 - 7g^2 + 2g^3 + f^1),$$

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ x_2 = \eta_1, \\ x_3 = \xi_2 + 4\xi_3 + \eta_1, \\ x_4 = \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 4\xi_3 + 6\eta_1 + u_1, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 - 8\xi_3 - 7\eta_1, \\ \dot{\xi}_3 = \xi_2 + 5\xi_3 + 2\eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = \eta_1 + u_2. \end{cases}$$

2. Параллельная (челночная) декомпозиция: базис $\{g^1, f^1, g^2, f^2\}$.

$$g^3 = -3g^1 + \frac{7}{2}g^2 - \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^2,\ f^3 = \frac{2}{3}g^1 - \frac{1}{3}g^2 - \frac{2}{3}f^1 + \frac{5}{3}f^2,$$

$$x = \xi_1 p^1 + \xi_2 p^2 + \eta_1 v^1 + \eta_2 v^2,$$

$$\begin{array}{l} p^1 = g^2 - \frac{7}{2}g^1 \\ p^2 = g^1 \\ v^1 = f^2 - \frac{5}{3}f^1 \\ v^2 = f^1 \end{array}, \quad x = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -3\xi_1 + \frac{7}{2}\xi_2 + \frac{2}{3}\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 + u_1, \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\frac{2}{3}\eta_1 + \frac{5}{3}\eta_2 - \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + u_2. \end{cases}$$

2.1. Приведение к канонической форме по наблюдению

Задача 2.1. Приведите к канонической форме по наблюдению систему

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ z = x_1. \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \\ z = x_1. \end{cases}$$

Задача 2.2. Приведите систему

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - \dot{x} - \alpha x = 0, \\ &z = x + \dot{x}. \end{aligned}$$

к канонической форме по наблюдению, установив предварительно, при каких значениях параметра α это возможно.

2.2. Анализ наблюдаемости

Задача 2.3. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\text{а)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ z = x_1. \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ z = x_2. \end{cases} \qquad \text{в)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ z = x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$\text{г)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ z = x_1. \end{cases} \qquad \text{д)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ z = x_2. \end{cases} \qquad \text{е)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ z = x_1 + x_2. \end{cases}$$

$$\text{ж)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ z = x_2. \end{cases} \qquad \text{з)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ z = x_1 + x_2. \end{cases} \qquad \text{и)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ z = x_1 + a x_2. \end{cases}$$

Задача 2.4. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\text{а)} \qquad \begin{aligned} &\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0, \\ &z = x + \dot{x}. \end{aligned}$$

При каких значениях параметров α и β система наблюдаема?

$$\text{б)} \qquad \begin{aligned} &\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0, \\ &z = hx + \dot{x}. \end{aligned}$$

При каких значениях параметра h система ненаблюдаема?

Задача 2.5. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\text{а)}\begin{cases}\dot x_1 = x_2,\\ \dot x_2 = x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot x_3 = x_1 - x_3,\\ z = x_1.\end{cases}\qquad \text{б)}\begin{cases}\dot x_1 = x_2,\\ \dot x_2 = x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot x_3 = x_1 - x_3,\\ z = x_2.\end{cases}$$

$$\text{в)}\begin{cases}\dot x_1 = x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot x_2 = x_1,\\ \dot x_3 = x_2 + x_3,\\ z = x_1.\end{cases}\qquad \text{г)}\begin{cases}\dot x_1 = -x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot x_2 = x_1 - x_3,\\ \dot x_3 = x_2,\\ z = x_2.\end{cases}$$

$$\text{д)}\begin{cases}\dot x_1 = x_2 + x_3,\\ \dot x_2 = x_1 + x_2 - x_3,\\ \dot x_3 = x_2 + x_3,\\ z = x_2.\end{cases}\qquad \text{е)}\begin{cases}\dot x_1 = 2x_1 - 5x_2,\\ \dot x_2 = -x_1 + 3x_2,\\ \dot x_3 = x_1 - 2x_2 + x_3,\\ z = x_1 + x_2.\end{cases}$$

$$\text{ж)}\begin{cases}\dot x_1 = x_1 - x_2 + x_3,\\ \dot x_2 = x_1 + x_2 - x_3,\\ \dot x_3 = 2x_1 - x_2,\\ z = x_1 + \alpha x_3.\end{cases}\qquad \text{з)}\begin{cases}\dot x_1 = -x_1 + x_2 - 2x_3,\\ \dot x_2 = 4x_1 + x_2,\\ \dot x_3 = 2x_1 + x_2 - x_3,\\ z = x_2 + \alpha x_3.\end{cases}$$

$$\text{и)}\begin{cases}\dot x_1 = 2x_1 - x_2 - x_3,\\ \dot x_2 = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3,\\ \dot x_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3,\\ z_1 = x_1, \qquad z_2 = x_2 + \alpha x_3.\end{cases}\qquad \text{к)}\begin{cases}\dot x_1 = 3x_1 - 2x_2 - x_3,\\ \dot x_2 = 3x_1 - 4x_2 - 3x_3,\\ \dot x_3 = 2x_1 - 4x_2,\\ z_1 = x_1 + \alpha x_3, \qquad z_2 = x_2\end{cases}$$

В задачах ж)–к) определить, при каких значениях параметра α система наблюдаема.

Задача 2.6. Рассмотрим линеаризованные уравнения движения модуля относительно орбитальной станции из задачи 1.5, считая, что управляющее воздействие отсутствует, т.е. $b_i = 0$. В этом случае уравнение для x_3 отщепляется от системы, и движение в плоскости орбиты можно рассматривать независимо от движения вне плоскости орбиты. Введем новые переменные $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = \dot x_1$, $y_4 = \dot x_2$, и запишем уравнения плоского относительного движения в форме Коши:

$$\begin{cases}\dot y_1 = y_3,\\ \dot y_2 = y_4,\\ \dot y_3 = -2\dfrac{\Omega}{r_0} y_4,\\ \dot y_4 = 3\Omega^2 y_2 + 2\Omega r_0 y_3.\end{cases}$$

Проверьте наблюдаемость системы в следующих случаях:

а) наблюдается компонента y_1 вектора состояния;

б) наблюдается компонента y_2 вектора состояния;

в) наблюдается компонента y_3 вектора состояния;

г) наблюдается компонента y_4 вектора состояния;

д) наблюдается сумма компонент $y_1 + y_2$ вектора состояния.

Исследуйте наблюдаемость системы в этих случаях без перехода к переменным y_i при помощи теоремы 2.5.

Задача 2.7. Исследуйте наблюдаемость системы

а) $$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - x_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 - x_1 = 0 \\ z = x_1 + \dot{x}_1 \end{cases}$$ б) $$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - 5x_1 = 0 \\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 6x_1 = 0 \\ z = x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - x_2 = 0 \\ -\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 - 2x_2 = 0 \\ z = x_1 + \dot{x}_2 \end{cases}$$ г) $$\begin{cases} 3\ddot{x}_1 - \dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dot{x}_1 + x_1 - x_2 = 0 \\ z = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \end{cases}$$

2.3. Декомпозиция по наблюдению

Задача 2.8. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = l_2 x_2, \\ z = x_1 + x_2. \end{cases}$$

При каких значениях параметров l_1 и l_2 система является наблюдаемой? В случае отсутствия наблюдаемости проведите декомпозицию.

Задача 2.9. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_I = A_I x_I, \\ \dot{x}_{II} = A_{II} x_{II}, \\ z = h_I^\top x_I + h_{II}^\top x_{II}. \end{cases}$$

Пары (A_I, h_I), (A_{II}, h_{II}) наблюдаемы. Каковы в этом случае условия наблюдаемости всей системы?

Указание: рассмотрите упрощенный вариант: $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1$, $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$, $z = x_1 + x_2$.

Задача 2.10. Исследуйте наблюдаемость системы. Если система не является наблюдаемой, проведите декомпозицию по наблюдению и приведите наблюдаемую подсистему к каноническому иду.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \\ z = x_2. \end{cases}$$

Задача 2.11. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2, \\ z = x_2. \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3, \\ z = x_2. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + x_2 + 2x_3. \\ z = x_1 + x_3. \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2 + x_3, \\ z = x_1 + x_3. \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 2x_2 + 2x_3, \\ z = x_1 + x_3. \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 - x_3, \\ z = x_1 + x_3. \end{cases}$$

$$\text{ж)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_3, \\ z = x_1 - x_3. \end{cases} \quad \text{з)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -2x_3, \\ z = -x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Если система не является наблюдаемой, проведите декомпозицию по наблюдению.

Задача 2.12. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\text{а)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_4, \\ \dot{x}_4 = x_4, \\ \quad z = x_1 + x_4. \end{cases} \qquad \text{б)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{x}_4 = x_3 + 2x_4, \\ \quad z = x_2 + x_3. \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dfrac{1}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\ \dot{y}_3 = y_2 + \dfrac{1}{2}y_3 - \dfrac{1}{2}y_4, \\ \dot{y}_4 = -y_1 - \dfrac{1}{2}y_3 + \dfrac{1}{2}y_4, \\ \quad z = \dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{1}{2}y_2. \end{cases}$$

Если система не является наблюдаемой, проведите декомпозицию по наблюдению.

Задача 2.13. Исследуйте наблюдаемость системы

а) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 - x_3, \\ \dot{x}_2 = v_2, \\ \dot{x}_3 = v_3 + x_1, \\ \dot{v}_1 = -x_1 - v_3, \\ \dot{v}_2 = -x_2, \\ \dot{v}_3 = 2x_3 + v_1, \\ z_1 = x_3. \end{cases}$$ б) $$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + y_3, \\ \dot{y}_2 = y_4 - y_1, \\ \dot{y}_3 = -y_1 + y_4, \\ \dot{y}_4 = -y_2 - y_3, \\ \dot{y}_5 = y_6, \\ \dot{y}_6 = -y_5, \\ z_2 = y_1. \end{cases}$$

Если система не является наблюдаемой, проведите декомпозицию по наблюдению. Покажите, что оба случая а) и б) описывают пространственное движение спутника в окрестности круговой орбиты. Дайте физическую интерпретацию измерениям z_1, z_2.

Задача 2.14. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\begin{cases} \dot{\varkappa}_1 = \pi_1 - \varkappa_3, \\ \dot{\varkappa}_3 = \pi_3 + \varkappa_1, \\ \dot{\pi}_1 = -\pi_3 - \varkappa_1, \\ \dot{\pi}_3 = \pi_1 + 2\varkappa_3, \\ z_1 = \varkappa_1, \\ z_3 = \varkappa_3. \end{cases}$$

Если система не является наблюдаемой, проведите декомпозицию по наблюдению. Рассмотрите два варианта: последовательную и параллельную декомпозиции. Покажите, что уравнения описывают плоское движение спутника в окрестности круговой орбиты. Дайте физическую интерпретацию измерениям z_1, z_3.

Задача 2.15. Исследуйте наблюдаемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4, \\ \dot{x}_2 = x_2, \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{3}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4, \\ \dot{x}_4 = 2x_4, \\ z_1 = x_1 + x_3 + x_4, \\ z_2 = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Если система не является наблюдаемой, проведите декомпозицию по наблюдению. Рассмотрите два варианта: последовательную и параллельную декомпозиции.

2.4. Нестационарные наблюдения

Задача 2.16. Исследуйте наблюдаемость системы (C — неизвестная постоянная погрешность измерений)

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ z = x_1 + C. \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ z = x_2 + Ce^t. \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ z = x_1 + Ce^{\alpha t}. \end{cases}$$

При каких значениях параметра α система наблюдаема?

$$\text{г)} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ z = x_1 + C\sin\omega t. \end{cases}$$

При каких значениях параметра ω система наблюдаема?

Задача 2.17. Исследуйте на наблюдаемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \\ z = x_1 \sin\omega t + x_2 \cos\omega t. \end{cases}$$

При каких значениях параметра ω система наблюдаема?

2.5. Анализ управляемости

Задача 2.18. Исследуйте управляемость системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u. \end{aligned}$$

Задача 2.19. Исследуйте управляемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3. \end{cases}$$

Приведите ее к базису g^i.

Задача 2.20. Приведите систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \alpha x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 2x_2 + u \end{aligned}$$

к канонической форме по управлению и представьте в виде скалярного дифференциального уравнения второго порядка. При каких значениях параметра α это возможно?

Задача 2.21. Приведите систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + \beta u, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 5x_2 + u \end{aligned}$$

к канонической форме по управлению и представьте в виде скалярного дифференциального уравнения второго порядка. При каких значениях параметра β это возможно?

Задача 2.22. Представьте в виде скалярного дифференциального уравнения второго порядка систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 + x_2 + u_1. \end{aligned}$$

Задача 2.23. Для линейной динамической системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_I &= A_I x_I + b_I u, \\ \dot{x}_{II} &= A_{II} x_{II} + b_{II} u \end{aligned}$$

пары $(A_I, b_I), (A_{II}, b_{II})$ управляемы. Каковы в этом случае условия управляемости всей системы?
Указание: рассмотрите упрощенный вариант

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + u. \end{aligned}$$

Задача 2.24. Исследуйте управляемость системы

а) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_3 + \alpha u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_3 + u. \end{cases}$$ б) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 - x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 + \alpha u. \end{cases}$$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 4x_3 + \alpha u, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 - x_3 + \alpha u. \end{cases}$

При каких значениях параметра α система управляема?

Задача 2.25. Исследуйте управляемость системы

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2 - x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 - x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + 2x_3 + \alpha u_1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_3 + u_1 + \alpha u_2. \end{cases}$

При каких значениях параметра α система управляема?

Задача 2.26. Исследуйте управляемость системы

а) $\begin{array}{c} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 3x_1 + x_2 = 2u, \\ \ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + x_1 - 2x_2 = u. \end{array}$ б) $\begin{array}{c} 3\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 5\dot{x}_2 - 5x_1 = -2u, \\ \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 - 5\dot{x}_1 + 5x_2 = u. \end{array}$

в) $\begin{array}{c} 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 3x_1 + x_2 = 2u, \\ \ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 + x_1 - 2x_2 = u. \end{array}$ г) $\begin{array}{c} \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + x_1 + x_2 = u, \\ \ddot{x}_1 + 2\ddot{x}_2 + 3x_1 + \beta x_2 = 3u. \end{array}$

При каких значениях параметра β система управляема?

Задача 2.27. Дана динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + \beta u, \\ z = x_1 + \alpha x_2. \end{cases}$$

При каких α и β имеет место управляемость и наблюдаемость?

2.6. Декомпозиция по управлению

Задача 2.28. Исследуйте управляемость системы

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u. \end{array}$$

Если система не является управляемой, проведите декомпозицию по управлению.

Задача 2.29. Исследуйте управляемость системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = \dot{u} + u$. Если система не является управляемой, проведите декомпозицию по управлению.

Задача 2.30. Исследуйте управляемость системы

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + x_3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 + x_3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_3. \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = 2x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u. \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 + 3x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_3. \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 + x_3 + u. \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 3x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 4x_3. \end{cases}$

и) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = 3x_1 - 2x_2 + x_3. \end{cases}$ к) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3. \end{cases}$

л) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3. \end{cases}$ м) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + 2x_3. \end{cases}$

Если система не является полностью управляемой, проведите декомпозицию по управлению.

Задача 2.31. Исследуйте управляемость системы уравнений плоского движения спутника в окрестности круговой орбиты

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1 - \omega x_2, \\ \dot{x}_2 = v_2 + \omega x_1, \\ \dot{v}_1 = -\omega^2 x_1 - \omega v_2 + u_1, \\ \dot{v}_2 = 2\omega^2 x_2 + \omega + u_2, v_1. \end{cases}$$

Рассмотрите два варианта скалярного управления а) $u = u_1$, б)$u = u_2$. В случае отсутствия управляемости проведите декомпозицию по управлению. Указание: привести систему к двум уравнениям второго порядка для x_1, x_2 и воспользоваться теоремой 2.6).

Задача 2.32. Исследуйте управляемость системы

$$
\text{а)}\ \begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 + u, \\ \dot x_2 = x_1 + 2x_2, \\ \dot x_3 = x_3, \\ \dot x_4 = x_3 + x_4 + u. \end{cases}
\qquad
\text{б)}\ \begin{cases} \dot x_1 = 3x_1 + x_2, \\ \dot x_2 = 3x_2 + u, \\ \dot x_3 = 2x_1 + x_4 + u, \\ \dot x_4 = 2x_4. \end{cases}
$$

$$
\text{в)}\ \begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot x_2 = 2x_2 + u, \\ \dot x_3 = x_3 + x_4 + u, \\ \dot x_4 = x_4. \end{cases}
\qquad
\text{г)}\ \begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot x_2 = x_1 - x_2 + u, \\ \dot x_3 = x_3 + x_4 + u, \\ \dot x_4 = x_4. \end{cases}
$$

$$
\text{д)}\ \begin{cases} \dot x_1 = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + u, \\ \dot x_2 = -6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + u, \\ \dot x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + u, \\ \dot x_4 = -x_1 + x_3. \end{cases}
$$

$$
\text{е)}\ \begin{cases} \dot x_1 = -3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + u, \\ \dot x_2 = -6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + u, \\ \dot x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + u, \\ \dot x_4 = -x_1 + x_3. \end{cases}
$$

Если система не является управляемой, проведите декомпозицию по управлению.

Задача 2.33. Проведите декомпозицию системы

$$
\begin{cases} \dot x_1 = x_1 - x_2 + u_1, \\ \dot x_2 = x_2 + u_2, \\ \dot x_3 = 2x_3 - x_4 + u_2, \\ \dot x_4 = 2x_4 + u_1. \end{cases}
$$

по компонентам вектора управления. Решите задачу двумя способами: с помощью последовательной и параллельной (челночной) декомпозиции.

Задача 2.34. Проведите декомпозицию системы

$$
\begin{cases} \dot x_1 = x_2 + x_3, \\ \dot x_2 = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2, \\ \dot x_3 = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}u_1 + \dfrac{1}{2}u_2, \\ \dot x_4 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + u_2. \end{cases}
$$

по компонентам вектора управления. Решите задачу двумя способами: с помощью последовательной и параллельной (челночной) декомпозиции.

Задача 2.35. На подвижной тележке установлены два математических маятника с длинами l_1 и l_2. Положения маятников определены углами φ_1 и φ_2, отсчитываемыми от восходящей вертикали. Ускорение тележки примем за управление. Составьте линеаризованные (в окрестности неустойчивого положения равновесия $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) уравнения движения и проанализируйте управляемость.

Задача 2.36. На подвижной тележке установлен двузвенный математический маятник с длинами звеньев l_1 и l_2. Ускорение тележки считается управлением. Составьте уравнения в отклонениях от вертикального неустойчивого положения равновесия и проанализируйте управляемость.

Задача 2.37. Рассмотрим линеаризованные уравнения относительного движения модуля в окрестности орбитальной станции из задачи 1.5. Уравнение для x_3 отщепляется от системы, и движение в плоскости орбиты можно рассматривать независимо от движения вне плоскости орбиты. Уравнения движения в плоскости орбиты имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\frac{\Omega}{r_0}\dot{x}_2 + b_1 u_1 \\ \ddot{x}_2 &= 3\Omega^2 x_2 + 2r_0\Omega\dot{x}_1 + b_2 u_2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Введем новые переменные $y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ y_3 = \dot{x}_1,\ y_4 = \dot{x}_2$ и запишем уравнения плоского относительного движения в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_3, \\ \dot{y_2} = y_4, \\ \dot{y_3} = -2\dfrac{\Omega}{r_0}y_4 + b_1 u_1, \\ \dot{y_4} = 3\Omega^2 y_2 + 2\Omega r_0 y_3 + b_2 u_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Исследовать управляемость системы, используя либо уравнения (2.8), либо уравнения движения в форме (2.9) для двух случаев: а) управляющее воздействие приложено по нормали к орбите ($b_1 = 0$); б) управляющее воздействие приложено вдоль касательной к орбите ($b_2 = 0$).

Глава 3

Линейное оценивание и стабилизация управляемой системы

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ z &= Hx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Предположим, что система (3.1) управляема и наблюдаема, т.е. выполняются условия теорем 2.1 и 2.2.

Оценивание вектора состояния

Асимптотический алгоритм оценки вектора состояния системы (3.1) имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(z - H\tilde{x}), \tag{3.2}$$

где $\tilde{x}$ — n-мерный вектор оценки состояния x, L — постоянная матрица размерности $(n \times m)$, элементы которой подлежат выбору. Введем вектор ошибки оценки $\Delta x = x - \tilde{x}$. Этот вектор удовлетворяет уравнению

$$\Delta\dot{x} = (A - LH)\Delta x. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Пусть система* (3.1) *наблюдаема. Тогда всегда можно выбрать постоянную матрицу L в алгоритме оценивания* (3.2) *так, чтобы характеристический многочлен матрицы $A - LH$ системы уравнений ошибок оценки* (3.3) *совпадал с любым наперед заданным многочленом n-ой степени с действительными коэффициентами $\Delta(\lambda) = \lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}\lambda + \beta_n$.*

В частности, из теоремы 3.1 следует, что коэффициенты L можно выбрать так, чтобы корни характеристического уравнения имели наперед заданные отрицательные действительные части. В этом случае система (3.3) асимптотически устойчива, и притом с произвольным заданным запасом устойчивости.

Пример 1. *Построить асимптотический алгоритм оценки для системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \;\, z = x_1. \end{cases}$$

Решение. Наблюдаемость системы очевидна. Алгоритм оценки имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + l_1(z - \tilde{x}_1) \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 + l_2(z - \tilde{x}_1). \end{cases}$$

Коэффициенты l_1 и l_2 подлежат выбору. Уравнения ошибок оценки

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}_1 = -l_1\Delta x_1 + \Delta x_2, \\ \Delta\dot{x}_2 = (1 - l_2)\Delta x_1. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + l_1\lambda + l_2 - 1 = 0$. Зададим произвольный многочлен 2-й степени $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2$, где β_1, β_2 произвольны. Сравнивая эти многочлены, получим $l_1 = \beta_1$, $l_2 = \beta_2 + 1$. В частности, если $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > -1$, то система уравнений ошибок оценки асимптотически устойчива.

Пример 2. *Построить асимптотический алгоритм оценки для системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = 2x_1 - x_2, \\ \quad z = x_1. \end{cases}$$

Решение. Проверим наблюдаемость системы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; h^\top = \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; , \; N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\operatorname{rank} N = 3$ — система наблюдаема. Алгоритм оценки имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + l_1(z - \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 + l_2(z - \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_3 = 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + l_3(z - \tilde{x}_1). \end{cases}$$

Уравнения ошибок оценки

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}_1 = (1 - l_1)\Delta x_1 - \Delta x_2 + \Delta x_3, \\ \Delta\dot{x}_2 = (1 - l_2)\Delta x_1 + \Delta x_2 - \Delta x_3, \\ \Delta\dot{x}_3 = (2 - l_3)\Delta x_1 - \Delta x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + (l_1 - 2)\lambda^2 + (l_3 - l_2 - l_1 - 1)\lambda + (2 - l_1 - l_2) = 0.$$

Зададим произвольный многочлен третьей степени $\varphi(\lambda) = \lambda^3 + \beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_3$. Из сравнения получаем систему уравнений относительно l_1, l_2, l_3

$$l_1 - 2 = \beta_1, \quad l_3 - l_2 - l_1 - 1 = \beta_2, \quad 2 - l_1 - l_2 = \beta_3,$$

откуда

$$l_1 = \beta_1 + 2, \quad l_2 = -\beta_1 - \beta_3, \quad l_3 = \beta_2 - \beta_3 + 3.$$

Иногда в качестве многочлена $\varphi(\lambda)$ принимают многочлен $\varphi(\lambda) = (\lambda + \lambda_0)^3$, где $\lambda_0 > 0$ задано. В таком случае система уравнений ошибок оценки асимптотически устойчива с запасом устойчивости λ_0, а коэффициенты оценивателя принимают вид

$$l_1 = 3\lambda_0 + 2, \quad l_2 = -3\lambda_0 - \lambda_0^3, \quad l_3 = 3\lambda_0^2 - \lambda_0^3 + 3.$$

Пример 3. *Провести декомпозицию по наблюдению и выяснить возможность построения асимптотического алгоритма оценивания для системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3, \\ \ z = x_1 - x_3. \end{cases}$$

Укажите, какой запас устойчивости уравнений ошибок оценки можно обеспечить и какие при этом должны быть коэффициенты обратной связи оценивателя?

Решение. Проверим наблюдаемость системы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ h^\top = \ 1 \ 0 \ -1 \ , \ g_1 = h, \quad g_2 = A^\top g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = A^\top g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad g_3 = 2g_1 - g_2 \Rightarrow \operatorname{rank} N = 2 \qquad (3.4)$$

и система не является наблюдаемой.

Проверим возможность построения асимптотического оценивателя. Проведем декомпозицию системы по вектору наблюдения. Согласно (3.4), наблюдаемая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= 2\xi_1 - \xi_2, \end{aligned} \qquad z_1 = \xi_1.$$

Чтобы выделить ненаблюдаемую часть, дополним систему векторов $\{g_1, g_2\}$ до базиса вектором $f_1 = (0\ 2\ 1)^\top$ и найдем разложение вектора $f_2 = A^\top f_1$ по векторам базиса

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1,$$

где $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = -2$. Тогда ненаблюдаемая подсистема имеет вид

$$\dot{\eta}_1 = f_1^\top \dot{x} = f_1^\top A x = (g_1 - 2f_1)^\top x = \xi_1 - 2\eta_1.$$

Сформируем линейный оцениватель для наблюдаемой подсистемы и запишем систему уравнений ошибок оценки:

$$\begin{cases} \Delta\xi_1 = \Delta\xi_2 - l_1 \Delta\xi_1, \\ \Delta\xi_2 = 2\Delta\xi_1 - \Delta\xi_2 - l_2 \Delta\xi_1, \\ \Delta\eta_1 = \Delta\xi_1 - 2\Delta\eta_1. \end{cases}$$

Выберем l_1, l_2 таким образом, чтобы характеристическое уравнение ошибок оценки наблюдаемой подсистемы имело вид $\varphi(\lambda) = \;\lambda + (2+\varepsilon)\;^2$, где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$l_1 = -1 + 2(2+\varepsilon), \qquad l_2 = 2 - l_1 + (2+\varepsilon)^2$$

, и запас устойчивости наблюдаемой части равен $2 + \varepsilon$. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению система уравнений ошибок для ненаблюдаемой части устойчива с запасом устойчивости $\lambda_0 = 2$ и асимптотический оцениватель для всей системы существует.

Стабилизация положения равновесия при наличии полной информации о состоянии

Рассмотрим закон управления в виде линейной обратной связи

$$u(t) = Kx(t), \tag{3.5}$$

где K — постоянная матрица размерности $(s \times n)$. Система (3.1), замкнутая управлением (3.5), принимает вид

$$\dot{x} = (A + BK)x. \tag{3.6}$$

Определение 3.1. *Линейная система* (3.1) *стабилизируема, если существует такая матрица K, что при управлении* (3.5) *тривиальное решение системы* (3.6) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.2. *Если система* (3.1) *управляема, то она стабилизируема.*

Примечание. *Обратное утверждение неверно. Если система стабилизируема, то либо она управляема, либо не является управляемой, но при этом тривиальное решение неуправляемой подсистемы* (2.5) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.3. *Пусть система* (3.1) *полностью управляема. Тогда всегда можно выбрать постоянную матрицу K в законе управления* (3.5) *так, чтобы характеристический многочлен матрицы* $(A + BK)$ *замкнутой системы* (3.6) *совпадал с любым наперед заданным многочленом n-ой степени с действительными коэффициентами $\psi(\lambda) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}\lambda + \gamma_n$.*

Из теоремы 3.3 следует, что коэффициенты K можно выбрать такими, чтобы корни характеристического уравнения имели наперед заданные отрицательные действительные части. В этом случае система (3.6) асимптотически устойчива, причем с произвольным заданным запасом устойчивости.

Пример 4. *При наличии полной информации о состоянии стабилизируйте систему*

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + u.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\operatorname{rank} W = 2$ и система управляема. Рассмотрим $u = k_1x_1 + k_2x_2$, Тогда

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 + 1 & k_2 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение для матрицы A_u имеет вид $\Delta_u(\lambda) = \lambda^2 - k_2\lambda - (k_1 + 1)$. Система стабилизируема, если $k_1 < -1$, $k_2 < 0$.

Пример 5. *При наличии полной информации о состоянии стабилизируйте систему*

$$\dot{x}_1 = x_2 + u,$$
$$\dot{x}_2 = -x_2.$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank} W = 1$, поэтому система не управляема. Отметим, что управляемая подсистема описывается переменной x_1, а неуправляемая — переменной x_2. При этом тривиальное решение $x_2 = 0$ асимптотически устойчиво. Стабилизируем управляемую подсистему с помощью управления $u = k_1 x_1$

$$A_u = \begin{matrix} k_1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}, \quad |A_u - \lambda E| = (\lambda - k_1)(\lambda + 1).$$

Видно, что характеристическое уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = k_1$. Таким образом, система стабилизируема при $k_1 < 0$.

Отличие примера 5 от примера 4 в том, что в примере 4 скорость затухания переходных процессов в замкнутой системе соответствующим выбором коэффициентов обратной связи в управлении может быть сделана сколь угодно большой, а в примере 5 — эта скорость ограничена величиной -1.

Пример 6. *Провести декомпозицию и выяснить возможность стабилизации системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - x_2 - 4x_3 - u, \\ \dot{x}_4 = x_1 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

Какой максимальный запас устойчивости можно обеспечить в системе?

Решение. Проверим управляемость системы. Составим систему векторов

$$g_1 = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = Ag_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = Ag_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Имеем $g_3 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$, где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, так что ранг матрицы управляемости равен двум и управляемости нет. Проведем декомпозицию системы, для чего дополним систему векторов g_1, g_2 до базиса векторами

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$Af_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_{11} g_1 + \beta_{12} g_2 + \gamma_{11} f_1 + \gamma_{12} f_2,$$

$$Af_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_{21} g_1 + \beta_{22} g_2 + \gamma_{21} f_1 + \gamma_{22} f_2,$$

где $\beta_{11} = 2$, $\beta_{12} = 5$, $\gamma_{11} = -2$, $\gamma_{12} = 1$, $\beta_{21} = 0$, $\beta_{22} = 1$, $\gamma_{21} = 0$, $\gamma_{22} = -1$.

Декомпозированная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + 2\eta_1 + 5\eta_2 + u, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + \eta_2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = -2\eta_1 + \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\eta_2. \end{cases}$$

Неуправляемая подсистема устойчива (корни характеристического уравнения равны $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$). Следовательно, можно стабилизировать всю систему. При этом выбором коэффициентов обратной связи вида $u = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ можно обеспечить запас устойчивости $0 < \lambda_0 < 1$.

Стабилизация положения равновесия по оценке вектора состояния

Для формирования закона управления в виде (3.5) необходима информация о всех компонентах вектора состояния $x(t)$, который в общем случае не доступен для измерения. В нашем распоряжении имеется лишь вектор $z(t) = Hx(t)$, используя который можно построить оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния x согласно алгоритму (3.2).

Используем в законе управления (3.5) вместо вектора состояния его оценку

$$u = K\tilde{x}(t). \tag{3.7}$$

Примечание. *В некоторых случаях возможно не проводить оценку вектора состояния, а в законе управления (3.7) использовать непосредственно измерение $z(t)$, т.е. $u(t) = Kz(t)$. Такой закон управления называется статической обратной связью.*

Пример 7. *Стабилизировать систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + u, \\ \ \ z = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Решение. Сформируем управление $u = k_1 z$. Характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - (3 + k_1)\lambda + 2 - k_1 = 0$. Если выбрать $k_1 < -3$, то замкнутая система будет устойчивой.

Будем предполагать, что пара (A, B) — управляема, а пара (A, H) — наблюдаема. Тогда можно получить асимптотически точную оценку вектора состояния с помощью алгоритма (3.2).

Система (3.1), замкнутая управлением (3.7), принимает вид

$$\dot{x} = Ax + BK\tilde{x}, \tag{3.8}$$

а алгоритм оценивания

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + BK\tilde{x} + L(z - H\tilde{x}). \tag{3.9}$$

Полная система уравнений, описывающая управляемый процесс в замкнутой системе, имеет размерность $2n$ и определяется совокупностью уравнений (3.8),(3.9). Эту систему удобнее представить в переменных x и $\Delta x = x - \tilde{x}$:

$$\begin{cases} \quad \dot{x} = (A + BK)x - BK\Delta x, \\ \Delta\dot{x} = (A - LH)\Delta x. \end{cases} \tag{3.10}$$

Характеристический многочлен (3.10) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \det[\lambda E - (A + BK)] \det[\lambda E - (A - LH)]$$

и представляет собой произведение характеристических многочленов (3.3) и (3.6).

Таким образом, в соответствии с теоремами 3.1 и 3.3 выбор элементов матриц K и L можно осуществить независимо.

Пример 8. *Стабилизируйте систему*

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \end{matrix} \qquad z = x_1$$

при помощи управления с обратной связью по оценке вектора состояния.

Решение. Запишем систему в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исследуем наблюдаемость и управляемость системы:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} W = \operatorname{rank} N = 2,$$

то есть система является управляемой и наблюдаемой. Следовательно, можно решить задачу стабилизации положения равновесия с помощью обратной связи по оценке вектора состояния. Строим управление в виде $u = k_1\tilde{x}_1 + k_2\tilde{x}_2$.

Характеристические уравнения соответствующих подсистем:

$$\Delta_1(\lambda) = \det[\lambda E - (A + bk^\top)] = \lambda^2 + (1 - k_2)\lambda - k_1 = 0,$$

$$\Delta_2(\lambda) = \det[\lambda E - (A - lh^\top)] = \lambda^2 + (1 + l_1)\lambda + l_1 + l_2 = 0.$$

Выбором коэффициентов k_1, k_2 и l_1, l_2 можно обеспечить любые наперед заданные корни этих уравнений.

В частности, если

$$k_1 < 0, \quad k_2 < 1, \qquad l_1 > -1, \quad l_1 + l_2 > 0$$

эти корни будут иметь отрицательные действительные части, что обеспечивает асимптотическую устойчивость уравнений ошибок оценки и стабилизацию положения равновесия исходной системы.

В данном примере задачу стабилизации можно также решить с помощью управления, построенного в виде $u = k_1 z = k_1 x_1$, где $k_1 < 0$.

Примечание. *В случае, когда нет управляемости пары (A, B) и наблюдаемости пары (A, H), стабилизация системы по оценке тоже возможна, если матрицы неуправляемой и ненаблюдаемой подсистем являются гурвицевыми (устойчивыми).*

Пример 9. *Провести декомпозицию системы по управлению и по наблюдению и выяснить возможность стабилизации системы по оценке*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 + 2x_3 + u \qquad\qquad z = 2x_2 + x_3. \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - u \end{aligned}$$

Какой запас устойчивости можно обеспечить в системе?

Решение. Ранг матрицы управляемости и матрицы наблюдаемости данной системы равен двум (проверьте!). Проведем декомпозицию системы, для чего дополним систему векторов

$$g_1 = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = Ag_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

до базиса вектором $f_1 = (0, 0, 1)^\top$.

$$g_3 = Ag_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, \ \alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 1,$$

$$Af_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \gamma_1 f_1, \qquad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_1 = -2$$

и декомпозированная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot\xi_1 = 2\xi_2 + \eta_1 + u \\ \dot\xi_2 = \xi_1 + \xi_2 + \eta_1 \\ \dot\eta_1 = -2\eta_1 \end{cases}$$

Как видим, неуправляемая подсистема является устойчивой, и при наличии полной информации выбором управления $u = k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ можно стабилизировать всю систему с запасом устойчивости $\lambda_0 \le 2$.

Проведем декомпозицию системы по вектору измерений.

$$g_1^\top = h^\top = (0\,2\,1), \quad g_2^\top = g_1^\top A = (-1\,4\,1),$$
$$g_3^\top = g_2^\top A = (0\,8\,4) = 4g_1^\top.$$
$$f_1^\top = (1\,0\,0), \quad f_1^\top A = (-1\,2\,1) = g_1^\top - f_1^\top.$$

Декомпозированная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot\zeta_1 = \zeta_2 + u, \\ \dot\zeta_2 = 4\zeta_1 + 2u, \\ \dot\theta_1 = \zeta_1 - \theta_1 + u, z \quad = \zeta_1. \end{cases}$$

Уравнения ошибок оценки имеют вид

$$\begin{cases} \Delta\dot\zeta_1 = \Delta\zeta_2 - l_1\Delta\zeta_1, \\ \Delta\dot\zeta_2 = 4\Delta\zeta_1 - l_2\Delta\zeta_1, \\ \Delta\dot\theta_1 = \Delta\zeta_1 - \Delta\theta_1. \end{cases}$$

Выбором коэффициентов l_1, l_2 можно обеспечить устойчивость уравнений ошибок оценки с запасом устойчивости $\lambda_0 \leq 1$.

Сформируем управление по оценке. Тогда

$$u = k_1(\xi_1 + \Delta\xi_1) + k_2(\xi_2 + \Delta\xi_2).$$

Поскольку $\Delta\xi_i = c_{i1}\Delta\zeta_1 + c_{i2}\Delta\zeta_2 + c_{i3}\Delta\theta_1$, выбором k_1 и k_2 можно стабилизировать систему с запасом устойчивости $\lambda_0 \leq 1$.

3.1. Асимптотический алгоритм оценивания

Задача 3.1. Постройте асимптотический алгоритм оценивания вектора состояния для систем из задачи 2.3.

Задача 3.2. Постройте асимптотический алгоритм оценивания вектора состояния для систем из задачи 2.5 (пп. а)–е)).

Задача 3.3. Механическая система представляет собой математический маятник с длиной подвеса l и массой груза m, точка подвеса которого перемещается горизонтально с ускорением $w = \text{const}$.

а) Найдите стационарное движение.

б) Выпишите линеаризованные уравнения в отклонениях от стационарного движения.

в) Проверьте полную наблюдаемость системы и постройте асимптотический алгоритм оценивания отклонений для двух случаев: 1) измеряется угол отклонения от вертикали маятника; 2) измеряется угловая скорость маятника.

Задача 3.4. Для математического маятника из задачи 3.3 построить асимптотический алгоритм оценивания, если:

а) измеряется угол отклонения от вертикали маятника с постоянной, заранее не известной ошибкой измерения $\varphi_0 = \text{const}$.

б) измеряется угловая скорость маятника с постоянной, заранее не известной ошибкой измерения $\gamma_0 = \text{const}$.

Задача 3.5. Механическая система представляет собой перевернутый маятник, установленный на тележке, которая движется поступательно с ускорением $w = \text{const}$.

1) Найдите стационарное движение $\varphi = \varphi_s, \dot{\varphi} = 0$.

2) Выпишите линеаризованные уравнения в отклонениях от стационарного движения.

3) Проверьте управляемость системы уравнений в отклонениях от стационарного движения при наличии дополнительного управляющего ускорения.

4) При наличии одного измерения $z = \varphi$ или $z = \dot{\varphi}$ проверьте полную наблюдаемость и постройте асимптотический алгоритм оценивания отклонений от стационарного положения.

Проверить наблюдаемость и построить асимптотический алгоритм оценивания, если

а) измеряется угол отклонения от вертикали с постоянной, заранее не известной ошибкой измерения $\varphi_0 = \text{const}$.

б) измеряется угловая скорость маятника с постоянной, заранее не известной ошибкой измерения $\gamma_0 = \text{const}$.

Задача 3.6. Постройте асимптотический алгоритм оценивания для системы

$$\dddot{x} - \ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0,$$
$$z = 2\dot{x} + 3x.$$

Задача 3.7. Постройте алгоритм оценивания, обеспечивающий запас устойчивости для ошибки оценки переменной x и ее первых двух производных равным $\lambda_0 = 1$.

$$\dddot{x} - 3\ddot{x} - \dot{x} + 3x = 0,$$
$$z = 2\dot{x} - 2x.$$

Задача 3.8. Постройте алгоритм оценивания, для которого характеристическое уравнение системы уравнений ошибки оценки имело бы вид $(\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$.

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} - \dot{x} - 3x = 0,$$
$$z = \dot{x} + 2x.$$

3.2. Стабилизация при помощи управления в виде линейной обратной связи по состоянию

Задача 3.9. Стабилизируйте положение равновесия системы

а) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + u,\end{aligned}$ б) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u,\end{aligned}$

в) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2,\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u,\end{aligned}$ г) $\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + u,\\ \dot{x}_2 &= -x_2,\end{aligned}$

если известен вектор состояния.

Задача 3.10. Определите положения равновесия системы при $u = 0$
$$\dot{y}_1 = (1 - \sin y_1)\sin y_2,$$
$$\dot{y}_2 = (1 - \sin y_2)\sin y_1 + u.$$
Линеаризуйте систему уравнений в окрестности точек равновесия. Стабилизируйте положения равновесия, если известен вектор состояния y.

Задача 3.11. Определите положения равновесия системы при $u = 0$
$$\dot{y}_1 = (1 - \cos y_1)\cos y_2,$$
$$\dot{y}_2 = (1 - \cos y_2)\cos y_1 + u.$$
Линеаризуйте систему уравнений в окрестности точек равновесия. Стабилизируйте положения равновесия, если известен вектор состояния y.

Задача 3.12. Стабилизируйте положение равновесия системы
$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = \varepsilon x_1 - 2x_2.$$
Определите коэффициенты обратной связи $K(\varepsilon)$ в зависимости от ε.

Задача 3.13. Стабилизируйте положение равновесия системы
$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u,$$
$$\dot{x}_2 = \varepsilon x_1 - x_2 + u.$$
Определите коэффициенты обратной связи $K(\varepsilon)$ в зависимости от ε.

Задача 3.14. Стабилизируйте положение равновесия системы
$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u, \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + u, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = x_3 + u, \end{cases}$$
$$\text{в)} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u, \end{array}$$
если известен вектор состояния.

Задача 3.15. *Стабилизация движения мобильного робота по трассе.* Уравнения мобильного робота в отклонениях $\Delta V = v - V_0$, $\Delta x = x - V_0 t$ от программного движения, состоящего в движении с постоянной скоростью вдоль оси абсцисс, имеют вид (задача 1.10)
$$\begin{cases} \dot{\Delta x} = \Delta V, \\ \dot{\Delta V} = -\Delta V + u_S, \\ \dot{y} = V_0\alpha + k_0\omega, \\ \dot{\alpha} = \omega, \\ \dot{\omega} = -k_3(1 + \frac{k_2}{k_1}V_0)\omega + \frac{k_3}{k_1}u_D. \end{cases}$$

Данная система разделяется на две независимые подсистемы. Первые два уравнения описывают продольное движение робота. Вторую подсистему образуют три последних уравнения, описывающие поперечное и угловое движение, они при отсутствии управления неустойчивы.

Проверьте управляемость второй подсистемы по управлению u_D, полагая $V = \text{const}$. Постройте закон управления второй подсистемой в виде $u_D = k_\varepsilon y + k_\omega \omega$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость ее нулевого решения. Укажите области устойчивости в пространстве k_ε, k_ω.

Задача 3.16. Найдите стационарный управляемый процесс для системы $\ddot{y}+\dot{y} = w$, если задано желаемое движение $y_c = t$, $t \in [0, \infty)$, и ресурсы управления $\{0 \le w(t) \le 2\}$. Определите устойчивость этого движения при $w \equiv 0$. Проверьте управляемость системы уравнений в отклонениях от желаемого движения. При наличии одного измерительного устройства $z = y$ или $z = \dot{y}$ постройте асимптотический алгоритм оценивания отклонений $x_1 = y - t, \quad x_2 = \dot{y} - 1$.

3.3. Стабилизация при неполной информации о состоянии

Задача 3.17. Стабилизируйте систему

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 - u, \\ z = x_1. \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - u, \\ z = 4x_1 + x_2. \end{cases}$$

при помощи управления со статической обратной связью по измерению. Каким условиям должен удовлетворять коэффициент обратной связи в законе управления?

Задача 3.18. Стабилизируйте систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \\ z = x_1. \end{cases}$$

при помощи управления с обратной связью по оценке вектора состояния.

Задача 3.19. Стабилизируйте систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \\ z = x_1 + x_3. \end{cases}$$

при помощи управления с обратной связью по оценке вектора состояния.

Задача 3.20. Стабилизируйте положение равновесия системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка

$$
\text{а)}\ \begin{aligned} \ddot{x} - \dot{x} - 2x &= u, \\ z &= x, \end{aligned} \qquad \text{б)}\ \begin{aligned} \ddot{x} - \dot{x} - 2x &= u, \\ z &= x + \dot{x}, \end{aligned}
$$

$$
\text{в)}\ \begin{aligned} \ddot{x} + 2\dot{x} - x &= u, \\ z &= x - \dot{x}, \end{aligned} \qquad \text{г)}\ \begin{aligned} \ddot{x} + \dot{x} - 2x &= u, \\ z &= 2x - \dot{x}, \end{aligned}
$$

по оценке вектора состояния $(x, \dot{x})$.

Задача 3.21. Запишите уравнения движения системы, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка

$$
\dddot{x} + 6\ddot{x} + 11\dot{x} + 6x = \dot{u} + 3u, \quad z = 3x + \dot{x},
$$

в форме Коши и стабилизируйте положение равновесия. Какой запас устойчивости можно обеспечить в этой системе?

Задача 3.22. Стабилизируйте систему

$$
\text{а)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \\ \ \ z = 2x_1 + x_2 + r \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 + u, \\ \ \ z = x_1 + x_3 + r. \end{cases}
$$

$$
\text{в)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 + u, \\ \ \ z = 2x_1 - x_2 + r. \end{cases} \qquad \text{г)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2, \\ \ \ z = x_1 - x_2 + r. \end{cases}
$$

$$
\text{д)}\ \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + u, \\ \ \ z = x_1 + r. \end{cases}
$$

при помощи управления по оценке вектора состояния. Здесь $r = \mathrm{const}$ — неизвестная постоянная ошибка измерения.

Задача 3.23. Стабилизируйте положение равновесия $\dot{\alpha} = 0$, $\alpha = 0$ системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка

$$
\text{а)}\ \begin{aligned} \ddot{\alpha} - \alpha &= u, \\ z &= \alpha + \dot{\alpha} + r, \end{aligned} \qquad \text{б)}\ \begin{aligned} \ddot{\alpha} - \dot{\alpha} - 2\alpha &= u, \\ z &= \alpha + \dot{\alpha} + r. \end{aligned}
$$

Здесь r — неизвестная постоянная ошибка измерения.

Задача 3.24. В задаче 3.16 осуществите линейный синтез регулятора и постройте полную математическую модель УДС. Найдите условия стабилизируемости желаемого движения.

Задача 3.25. Проведите декомпозицию и выясните возможность стабилизации по оценке для системы

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + 5x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_2 + u \\ \ \ z = 3x_1 - 5x_2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -6x_1 + 7x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 5x_2 + u \\ \ \ z = 4x_1 - 7x_2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2 - u \\ \ \ z = 3x_1 - x_2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3x_2 - u \\ \ \ z = 4x_1 + x_2. \end{cases}$

Какую степень устойчивости можно обеспечить в данной системе?

Задача 3.26. Проведите декомпозицию и выясните возможность стабилизации по оценке для системы

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - x_2 - 3x_3 - u \\ \ \ z = 4x_2 - \dfrac{2}{5}x_3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = 4x_2 + 3x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - 3x_2 - 4x_3 - u \\ \ \ z = 7x_2 + 3x_3. \end{cases}$

Какую степень устойчивости можно обеспечить в данной системе?

Глава 4

Оптимальное оценивание в стохастических системах

Случайные величины и векторы. Их характеристики

Дискретная скалярная случайная величина X задается множеством ее возможных значений $\Omega = \{x_i\}$ и множеством вероятностей соответствующих событий $P\{X = x_i\} = \{p_i\}$ с условием нормировки $\sum p_i = 1$, где через $P\{\dots\}$ обозначена вероятность соответствующего события.

Непрерывная скалярная случайная величина X задается множеством ее возможных значений $\Omega = \mathbb{R}$ и функцией распределения вероятностей $F_x(x) = P(X \leq x)$. В дальнейшем, если невозможна путаница, случайную величину и принимаемые ей значения будем обозначать одной буквой x.

Определение 4.1. *Если функция распределения вероятностей дифференцируема, то функцией плотности вероятности называется функция*

$$p_x(x) = \frac{dF_x}{dx}.$$

Для описания свойств случайных величин используются числовые статистические характеристики, называемые моментами. В корреляционной теории рассматриваются первые два момента: математическое ожидание и ковариация.

Определение 4.2. *Математическим ожиданием или средним значением случайной величины x называется величина*

$$\mu_x = \int x p_x(x)\, dx, \qquad \mu_x = \sum x_i p_i.$$

Определение 4.3. *Центрированной случайной величиной называется случайная величина $\overset{\circ}{x} = x - \mu_x$.*

Определение 4.4. *Дисперсией скалярной случайной величины называется число*

$$D_x = M\left[\overset{\circ}{x}{}^2\right] = \int (x - \mu_x)^2 p_x(x)\, dx, \qquad D_x = \sum (x_i - \mu_x)^2 p_i.$$

Определение 4.5. *Среднеквадратичным отклонением (СКО) случайной величины от среднего значения называется* $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Если рассматриваются две случайные величины x, y, то они задаются совместной плотностью вероятности $p_{xy}(x, y)$, зависящей от двух аргументов. Характеристики x определяются по $p_{xy}(x, y)$ согласно формулам

$$p_x(x) = \int p_{xy}(x, y)\, dy, \qquad F(x) = F_{xy}(x, \infty),$$

$$\mu_x = \int\int x p_{xy}(x, y)\, dx\, dy, \qquad D_x = \int\int (x - \mu_x)^2 p_{xy}(x, y)\, dx\, dy.$$

Определение 4.6. *Е*сли $p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y)$, то случайные величины x, y называются независимыми.

Определение 4.7. *Ковариацией случайных величин* x *и* y *называется следующая величина:*

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y}] = \int\int (x - \mu_x)(y - \mu_y) p_{xy}(x, y)\, dx\, dy.$$

Определение 4.8. *Коэффициентом корреляции случайных величин* x *и* y *называется число*

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Случайные величины называются некоррелированными, если $\rho_{xy} = 0$.

Если x и y — независимые случайные величины, то они некоррелированы. Обратное, вообще говоря, неверно. Коэффициент корреляции служит мерой линейной связи, поэтому из некоррелированности x и y следует только то, что между ними отсутствует линейная связь.

Определение 4.9. *Случайным* n*-мерным вектором* $x = (x_1, \dots x_n)^T$ *называется вектор, каждая из компонент которого является случайной величиной.*

Определение 4.10. *Ковариационной матрицей* P_x *(матрицей ковариации) случайного вектором* x *называется матрица* $P_x = M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^\top]$.

Примечание. *Ковариационная матрица случайного вектора* x *с действительными компонентами является неотрицательно определенной.*

Метод наименьших квадратов

Рассмотрим переопределенную систему линейных уравнений

$$z = Hx, \tag{4.1}$$

где x — n—мерный вектор, подлежащим определению; z — известный m—мерный вектор (вектор измерения); известная матрица H имеет размерность $m \times n$. Предполагается, задача наблюдаема (невырождена), то есть что $m \geq n$, причем H имеет максимальный ранг, так что система линейных уравнений (4.1) либо однозначно разрешима, либо несовместна.

Оценка $\tilde{x}$ по методу наименьших квадратов (МНК) строится на основе минимизации квадратичного функционала

$$\|z - Hx\|^2 = (z - Hx)^\top (z - Hx) \to \min_x \tag{4.2}$$

Минимизация сводится к поиску решения системы нормальных уравнений $H^\top Hx = H^\top z$, и в предположении невырожденности представляется в виде [1], [16]:

$$\tilde{x} = (H^\top H)^{-1} H^\top z = H^+ z.$$

Матрица $H^+ = (H^\top H)^{-1} H^\top$ называется псевдообратной. Матрица $H^\top H$ невырождена, поскольку H имеет максимальный ранг. Заметим, что в случае $m = n$ псевдообратная матрица совпадает с обратной.

МНК можно придать стохастическую интерпретацию, переписав (4.1) в виде $z = Hx + r$, где x – неизвестный неслучайный вектор, а r – случайный вектор с нулевым матожиданием и известной ковариационной матрицей $R > 0$. Тогда линейная несмещенная оценка x с минимальной дисперсией и соответствующая дисперсия ошибки оценки определяются формулами [1]

$$\tilde{x} = (H^\top R^{-1} H)^{-1} H^\top R^{-1} z, \quad P_{\Delta x} = M[\Delta x \Delta x^\top] = (H^\top R^{-1} H)^{-1}$$

В частном случае $R = E$ получаем МНК. Причем в предположении нормальности распределения r критерий (4.2) совпадает с методом максимума правдоподобия (ММП). Рассмотренную постановку иногда будем называть линейным МНК.

Нелинейный МНК

Многие задачи МНК являются нелинейными. Рассмотрим измерения $z = h(x) + r$, где $h(x)$ – гладкая функция, r – погрешность измерения с единичной матрицей дисперсий $M[r r\top] = E$. Тогда в предположении нормальности r естественно рассмотреть задачу метода максимума правдоподобия

$$\|z - h(x)\| \to \min_x,$$

которую будем называть нелинейной задачей МНК. Один из способов ее решения — итерационный МНК, состоящий в следующем. Предположим, что некоторое априорное значение x известно, обозначим его $\tilde{x}^-$. Линеаризуем уравнения измерений в окрестности $\tilde{x}^-$, вводя ошибку $\Delta x = x - \tilde{x}^-$, получим уравнение

$$\Delta z = z - h(\tilde{x}^-) = H\Delta x + r + o(\Delta x)$$

Полученное уравнение можно рассматривать как новое уравнение измерений. Оно линейно по Δx, но погрешность измерений содержит дополнительный член, коррелирующий с r. Считая для простоты, что этим членом можно пренебречь (хотя можно показать, что данное допущение приводит к смещенности оценки), получим решение с помощью линейного МНК в виде

$$\widetilde{\Delta x} = (H^\top R^{-1} H)^{-1} H^\top R^{-1} \Delta z$$

Тогда уточненную оценку x можно записать в виде $\tilde{x}^+ = \tilde{x}^- + \widetilde{\Delta x}$. Нетрудно показать, что сходимость итерационного МНК столь же быстра, как и у метода Ньютона.

Приведенные ниже два примера показывают, что даже в нелинейных задачах не всегда требуются итерационные методы.

Пример 1. *Задача спутниковой навигации [?].*

В упрощенной постановке задача спутниковой навигации состоит в определении координат $x \in \mathbb{R}^3$ приемника по измерениям квадратов дальностей $\rho_s'^2$ до S спутников с координатами $r_s \in \mathbb{R}^3$, $s = 1, \dots, S$, которые запишем в виде:

$$\rho_s'^2 = \rho_s^2 + \delta\rho_s^2, \qquad \rho_s = \|r_s - x\| \tag{4.3}$$

Для простоты предполагаем, что все измерения квадрата дальности имеют одинаковую случайную погрешность $\delta\rho_s^2$ и некоррелированы. Задача нелинейна, и нуждается в уточнении понятия наблюдаемости.

Задача спутниковой навигации (4.3) *называется наблюдаемой, если по $\rho_s'^2$, $s = 1, \dots, S$ можно единственным образом (по крайней мере локально) определить x.*

Задача 4.1. Покажите, что для локальной наблюдаемости задачи необходимо и достаточно, чтобы векторы $x, r_1, \ldots, r_S$ не лежали в одной плоскости. В частности, необходимо $S \geq 3$.

Для дальнейшего запишем $\rho_s^2 = (r_s - x)^\top (r_s - x) = r_s^\top r_s + x^\top x - 2r_s^\top x$, откуда получим

$$2r_s^\top x = r_s^2 + x^2 - \rho_s^2 = r_s^2 + x^2 - \rho_s'^2 + \delta\rho_s^2$$

где введены обозначения $x^2 = x^\top x$, $r_s^2 = r_s^\top r_s$. Эти уравнения можно переписать в матричном виде

$$Hx - z - x^2 1_S = \delta z,$$

где введены обозначения

$$H = \begin{pmatrix} 2r_1^\top \\ 2r_2^\top \\ \ldots \\ 2r_S^\top \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} r_1^2 - \rho_1'^2 \\ r_2^2 - \rho_2'^2 \\ \ldots \\ r_S^2 - \rho_S'^2 \end{pmatrix}, \quad \delta z = \begin{pmatrix} \delta\rho_1^2 \\ \delta\rho_2^2 \\ \ldots \\ \delta\rho_S^2 \end{pmatrix}, \quad 1_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Из вида матрицы H следует достаточное условие невырожденности задачи МНК, или, что то же, локальной наблюдаемости задачи спутниковой навигации: векторы $r_1, \ldots, r_S$ не должны лежать на одной прямой.

Задачу оценивания x естественно поставить как нелинейную задачу МНК

$$\|Hx - z - x^2 1_S\| \to \min_x.$$

Поставленная задача МНК является нелинейной, и может быть решена итерационно. Однако приближенное решение может быть получено алгебраическими методами следующим образом. Предположим, что оценка x^2, равная $\widetilde{x^2}$, уже получена, и рассмотрим задачу определения $\tilde{x}$ при известном $\widetilde{x^2}$. Это линейная задача МНК. Система нормальных уравнений имеет вид

$$2\left[\sum_s r_s r_s^\top\right] x = \sum_s r_s (r_s^2 - {\rho_s'}^2) + \sum_s r_s \widetilde{x^2}$$

Решение линейной задачи МНК имеет вид

$$2\tilde{x} = \left[\sum_s r_s r_s^\top\right]^{-1} \sum_s r_s (r_s^2 - {\rho_s'}^2) + \left[\sum_s r_s r_s^\top\right]^{-1} \sum_s r_s x^2.$$

Теперь из условия $\widetilde{x^2} = \tilde{x}^2$, получим квадратное уравнение $a_0\widetilde{x^2}^2 + a_1\widetilde{x^2} + a_2 = 0$ относительно $\widetilde{x^2}$, где

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \sum_s r_s^\top \quad \sum_s r_s r_s^\top \quad {}^{-2} \sum_s r_s, \\
a_1 &= \sum_s (r_s^2 - {\rho'_s}^2) r_s^\top \quad \sum_s r_s r_s^\top \quad {}^{-2} \sum_s r_s - 4, \\
a_2 &= \sum_s (r_s^2 - {\rho'_s}^2) r_s^\top \quad \sum_s r_s r_s^\top \quad {}^{-2} \sum_s r_s (r_s^2 - {\rho'_s}^2).
\end{aligned}
$$

Решив это уравнение, можно затем определить и $\tilde{x}$. Отметим однако, что в общем случае полученная оценка не будет оптимальной.

Задача 4.2. Покажите, что при $S = 3$ полученная оценка оптимальна. Покажите, что при $\delta\rho_s = 0$, $s = 1, \ldots, S$, полученная оценка оптимальна. Объясните, почему она не оптимальна в общем случае.

Пример 2. *Задача оценивания по угловым измерениям [**?**].*

Пусть $x \in \mathbb{R}^3$ – координаты цели, предполагаемые постоянными во времени, а $r_s \in \mathbb{R}^3$, $s = 1, \ldots, S$ – известные координаты наблюдателя в моменты времени $t_1, \ldots, t_S$. Угловые измерения – измерения направления на цель, которые можно записать в виде измерения единичного орта e_s направления на цель

$$
e'_s = e_s + \delta e_s, \qquad e_s = \frac{x - r_s}{\|x - r_s\|}.
$$

Задачу оценивания естественно поставить как задачу МНК

$$
\sum_{s=1}^{S} \quad e'_s - \frac{x - r_s}{\|x - r_s\|} \quad {}^2 \to \min
$$

Поставленная задача оценивания x по e'_s нелинейна, но, как и выше, может быть приближенно сведена к линейному МНК. Для этого заметим, что векторное произведение $e_S \times (x - r_s) \equiv 0$, откуда $e'_s \times (x - r_s) = \delta e_s \times (x - r_s)$, $s = 1, \ldots, S$. Полученное уравнение, которое принято называть уравнением псевдоизмерений, можно переписать в виде

$$
e'_s \times x = e'_s \times r_s + \delta e_s \times (x - r_s), \qquad s = 1, \ldots, S,
$$

Уравнение псевдоизмерений сводится к $Hx = z + \delta z$, где матрица H размера $3S \times 3$ и вектор z размера $3S \times 1$ состоят из блоков

$$
H_s = \begin{pmatrix} 0 & -e'_{s_3} & e'_{s_2} \\ e'_{s_3} & 0 & -e'_{s_1} \\ -e'_{s_2} & e'_{s_1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} -e'_{s_3} r_{s_2} + e'_{s_2} r_{s_3} \\ e'_{s_3} r_{s_1} - e'_{s_1} r_{s_3} \\ -e'_{s_2} r_{s_1} + e'_{s_1} r_{s_2} \end{pmatrix},
$$

$$\delta z = \begin{pmatrix} -e'_{s_3}(x_2 - r_{s_2}) + e'_{s_2}(x_3 - r_{s_3}) \\ e'_{s_3}(x_1 - r_{s_1}) - e'_{s_1}(x_3 - r_{s_3}) \\ -e'_{s_2}(x_1 - r_{s_1}) + e'_{s_1}(x_2 - r_{s_2}) \end{pmatrix}.$$

Можно применить МНК. Необходимо отметить, однако, две проблемы. Во-первых, матрица H, вычисляемая по e'_s, известна с ошибками. Во-вторых, компоненты погрешности δz не являются некоррелированными. Все это приводит к тому, что оценка является смещенной и неоптимальной. Ее преимущество – простота. Впервые эта оценка была реализована в 1940-х годах в США для управления торпедами, когда компьютеров еще не было.

Задача 4.3. Исследуйте наблюдаемость задачи в случае прямолинейного равномерного движения наблюдателя.

Случайные процессы

Определение 4.11. *Случайным процессом $x(t)$ называется функция неслучайного параметра t (в качестве которого в дальнейшем будет рассматриваться время), которая при каждом значении t является случайной величиной.*

Если множество значений времени является счетным $t \in \{t_i\}$, то случайный процесс называется процессом в дискретном времени и обозначается x_i.

Ограничимся рассмотрением корреляционной теории простейших случайных процессов, которые описываются линейными марковскими моделями.

Определение 4.12. *Марковский процесс в дискретном времени описывается линейным уравнением*

$$x_{i+1} = \Phi_i x_i + q_i, \qquad i = 0, 1, \dots \tag{4.4}$$

где x_i — вектор состояния в момент времени t_i; q_i — дискретный белый шум со следующими свойствами: $M[q_i] = 0$, $M[q_i q_j^T] = Q_i \delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера; $Q_i \geq 0$ - ковариационная матрица шума; Φ_i — переходная матрица. Начальные условиями для процесса задаются матожиданием $\mu_{x_0} = M[x_0]$ и ковариационной матрицей $P_{x_0} = M[\mathring{x}_0 \mathring{x}_0^\top]$.

Изменение математического ожидания $\mu_i = \mu_{x_i} = M[x_i]$ со временем описывается уравнением $\mu_{i+1} = \Phi_i \mu_i$ при начальных условиях μ_0. Изменение ковариационной матрицы вектора состояния $P_{x_i} = M[\mathring{x}_i \mathring{x}_i^\top]$ описывается дисперсионным уравнением

$$P_{x_{i+1}} = \Phi_i P_{x_i} \Phi_i^\top + Q_i, \tag{4.5}$$

при начальных условиях P_{x_0}.

Определение 4.13. *Марковский процесс в непрерывном времени описывается линейным уравнением*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + q(t), \qquad t_0 \le t \le t_1 \tag{4.6}$$

где $x(t)$ — вектор состояния в момент времени t; $q(t)$ — белый шум со следующими свойствами: $M[q(t)] = 0$, $M[q(t)q^\top(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$, $Q(t)$ - интенсивность возмущения, $\delta(t)$ - дельта функция Дирака. Начальные условия для процесса задаются матожиданием $\mu_x(t_0) = M[x(t_0)]$ и ковариационной матрицей $P_x(t_0)$.

Математическое ожидание вектора состояния $\mu_x(t) = M[x(t)]$ описывается уравнением $\dot{\mu}_x(t) = A(t)\mu_x(t)$ с начальными условиями $\mu_x(t_0)$. Ковариационная матрица вектора состояния $P_x(t) = M[\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{x}^\top(t)]$ описывается дисперсионным уравнением

$$\dot{P}_x(t) = A(t)P_x(t) + P_x(t)A^\top(t) + Q(t), \tag{4.7}$$

при начальных условиях $P_x(t_0)$.

Дискретный фильтр Калмана

Рассмотрим линейную динамическую систему (4.4) с известными Q_j, Φ_j, μ_{x_0}, P_{x_0}. Пусть в моменты времени $j = 0, 1, 2, \ldots$ поступают измерения $z_0, z_1, z_2, \ldots$, уравнения которых имеют вид

$$z_j = H_j x_j + r_j.$$

Здесь погрешность измерения r_j — некоррелированный во времени случайный вектор с нулевым средним и известной ковариационной матрицей : $M[r_i] = 0, M[r_i r_j^\top] = R_j\delta_{ij}$, причем $R_j > 0$. Кроме того, предполагается, что $M[x_i r_j^\top] = 0$. Требуется в каждый момент времени t_j получить оценку $\tilde{x}_j$ по измерениям $z_0, z_1, \ldots, z_j$ (это условие называется условием причинности), удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности и оптимальности. Оптимальность понимается здесь в смысле минимума дисперсии ошибки оценки $\Delta x_j = x_j - \tilde{x}_j$.

Введем обозначения:

$\tilde{x}_j^-$ — априорная оценка вектора x_j в момент времени j, использующая измерения $z_0, \ldots, z_{j-1}$;

$\tilde{x}_j^+$ — апостериорная оценка вектора x_j в момент времени j, использующая измерения $z_0, \ldots, z_j$;

P_j^- — ковариационная матрица ошибки оценки $\Delta\tilde{x}_j^-$;

P_j^+ — ковариационная матрица ошибки оценки $\Delta\tilde{x}_j^+$;

Теорема 4.1. *Оптимальная оценка x_j дается дискретным фильтром Калмана (ДФК), описываемым следующими соотношениями.*
1) Этап инициализации

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_0^- = \mu_{x_0},\\ &P_0^- = P_{x_0}.\end{aligned}$$

2) Этап коррекции

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_j^+ = \tilde{x}_j^- + K_j(z_j - H_j\tilde{x}_j^-),\\ &K_j = P_j^- H_j^\top (H_j P_j^- H_j^\top + R_j)^{-1},\\ &P_j^+ = (E - K_j H_j)P_j^-.\end{aligned}$$

3) Этап прогноза

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_{j+1}^- = \Phi_j \tilde{x}_j^+,\\ &P_{j+1}^- = \Phi_j P_j \Phi_j^\top + Q_j.\end{aligned}$$

Теорема 4.2. *(Стационарный ДФК.) Пусть $\Phi_j = \Phi = const$, $Q_j = Q = \mathrm{const}$, $R_j = R = \mathrm{const}$, пара (Φ, H) наблюдаема, пара (Φ, Q) управляема. Тогда при $j \to \infty$ справедливо следующее.*
1) Существуют пределы матриц P_j^-, P_j^+, K_j , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned}&P_\infty^- = \Phi P_\infty^+ \Phi^\top + Q > 0,\\ &P_\infty^+ = (E - K_\infty H)P_\infty^- > 0,\\ &K_\infty = P_\infty^- H^\top (H P_\infty^- H^\top + R)^{-1}.\end{aligned}$$

2) Уравнения ошибок

$$\begin{aligned}&\Delta x_{j+1}^- = \Phi \Delta x_j^+ + q_j,\\ &\Delta x_j^+ = (E - K_\infty H)\Delta x_j^- - K_\infty r_j\end{aligned}$$

асимптотически устойчивы, в частности собственные значения матрицы $\Phi(E - K_\infty H)$ по модулю меньше единицы.

Если изменение случайного вектора $x(t)$ описывается не разностной схемой, а дифференциальным уравнением (4.6), то в формулах прогноза оценки и ковариационной матрицы ошибки оценки Φ_j есть переходная матрица для (4.6) на интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$. В этом случае формула прогноза оценки к моменту t_{j+1} представляет решение $\tilde{x}_{j+1}^- = \mu_x(t_{j+1})$ уравнений для условного математического ожидания $\dot{\mu_x} = A\mu_x$ с начальными условиями $\mu_x(t_j) = \tilde{x}_j^+$, а формула прогноза ковариационной матрицы ошибки оценки представляет решение $P_{j+1}^- = P_{\Delta x}(t_{j+1})$ дисперсионного уравнения (4.7) для условной дисперсии с начальными условиями $P_{\Delta x}(t_j) = P_j^+$. Ниже приведен пример решения такой задачи.

Пример 3. *Скалярный случайный процесс* $x(t)$ *описывается уравнениями*

$$\dot{x} = -x + q, \quad M[q] = 0, \quad M[q(t)q(s)^\top] = \delta(t-s),$$
$$\mu_x(0) = 1, \quad \sigma_x(0) = 1.$$

В момент времени $t = 1$ *найти оптимальную оценку* $\tilde{x}(1)$ *и дисперсию* $\sigma^2_{\Delta x}$ *ошибки этой оценки при наличии измерения* $z_0 = 2$, *описываемого соотношениями* $z_0 = x(0) + r$, $M[r] = 0$, $M[r^2] = 1$.

Решение. Для построения оценки используется ДФК, так как в постановке задачи присутствует дискретное измерение. Оценка $\tilde{x}(1)$ находится в два этапа. Первый этап — этап коррекции оценки, задаваемой априорной информацией в момент времени $t = 0$, по измерению z_0 в тот же момент времени. Учитывая, что $\tilde{x}_0^- = \mu_x(0) = 1$, $P_0^- = \sigma_x^2(0) = 1$, $H = 1$, $Q = 1$, $R = 1$, в соответствии с формулами этапа коррекции ДФК:

$$K_0 = P_0^- H^\top (HP_0^- H^\top + R)^{-1} = 1/2,$$
$$P_0^+ = (1 - K_0 H)P_0^- = 1/2,$$
$$\tilde{x}_0^+ = \tilde{x}_0^- + K_0(z_0 - H\tilde{x}_0^-) = 3/2.$$

Второй этап — этап прогноза оценки на момент времени $t = 1$. Для этого необходимо решить уравнение $\dot{\mu}_x = -\mu_x$ с начальными условиями $\mu_x(0) = \tilde{x}_0^+$ и получить при $t = 1$ значение $\mu_x(1) = \tilde{x}^-(1)$. Решение данного дифференциального уравнения с указанными начальными условиями имеет вид

$$\mu_x(t) = \tilde{x}_0^+ e^{-t} = \frac{3}{2}e^{-t}.$$

В момент времени $t = 1$ получаем $\tilde{x}(1) = \tilde{x}^-(1) = \dfrac{3}{2}e^{-1}$. Дисперсия ошибки оценки удовлетворяет уравнению $\dot{P}_{\Delta x} = 2P_{\Delta x} + Q$, решив которое с начальными условиями $P^+(0) = 1/2$, получим $P_{\Delta x}(t) = 1/2$. Таким образом, в момент времени $t = 1$ получаем отсюда $\sigma^2_{\Delta x} = P_{\Delta x}(1) = 1/2$.

Непрерывный фильтр Калмана

Рассмотрим динамическую систему, описываемую линейным дифференциальным уравнением (4.6). Заданы начальные условия $\mu_x(t_0)$, $P_x(t_0)$. На интервале $[t_0, t_1]$ непрерывно по времени поступают измерения:

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t),$$

где погрешность измерений $r(t)$ — случайный процесс типа белого шума:

$$M[r(t)] = 0, \qquad M[r(t)r^\top(s)] = R(t)\delta(t-s), \qquad R(t) > 0.$$

Выполнено условие некоррелированности

$$M[x(t_0)q^\top(t)] = 0, \qquad M[x(t_0)r^\top(t)] = 0, \qquad M[r(t)q^\top(s)] = 0.$$

Требуется в любой момент времени $t \ge t_0$ определить оценку $\tilde{x}(t)$, по измерениям $z(s), t_0 \le s \le t$ (это условие называется условием причинности), удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности и оптимальности по критерию величины дисперсии ошибки оценки Δx.

Теорема 4.3. *Решение задачи дается непрерывным фильтром Калмана (ФК), описываемым соотношениями:*

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + K(z - Hx), \quad \tilde{x}(t_0) = \mu_x(t_0),\\
&K = P_{\Delta x}H^\top R^{-1},\\
&\dot{P}_{\Delta x} = AP_{\Delta x} + P_{\Delta x}A^\top + Q - P_{\Delta x}H^\top R^{-1}HP_{\Delta x}, \quad P_{\Delta x}(t_0) = P_x(t_0).
\end{aligned}$$

Примечание. *Матрица $P_{\Delta x}(t) = M[\Delta x(t)\Delta x^\top(t)$ является ковариационной матрицей ошибок оценки. Дифференциальное уравнение для $P_{\Delta x}(t)$ является матричным уравнением Риккати.*

Теорема 4.4. *(Стационарный ФК). Пусть $A, H, Q, R = \mathrm{const}$, пара (A, H) — наблюдаема, пара (A, Q) — управляема. Тогда справедливы следующие утверждения.*
1) Существует единственное положительно определенное решение P_∞ алгебраического уравнения Риккати

$$AP_\infty + P_\infty A^\top + Q - P_\infty H^\top R^{-1} HP_\infty = 0.$$

2) Собственные значения матрицы уравнений ошибок $A - K_\infty H$, где $K_\infty = P_\infty H^\top R^{-1}$, лежат в левой полуплоскости. 3) При $t \to \infty$ имеем $P_{\Delta x}(t) \to P_\infty$, $K(t) \to K_\infty$.

Пример 4. *Процесс первого порядка с одним измерением. Рассмотрим стационарную динамическую систему первого порядка, подверженную случайному воздействию белого шума с постоянной интенсивностью и одним непрерывным измерением, содержащим ошибку типа белого шума с постоянной интенсивностью. Уравнения имеют вид*

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = ax + q(t),\\
&z = x + r(t),
\end{aligned}$$

где a — константа, и

$$
\begin{aligned}
&M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q(s)] = Q\delta(t-s),\\
&M[r(t)] = 0, \quad M[r(t)r(s)] = R\delta(t-s),\\
&M[x(0)] = \mu_0, \ \ M[\overset{\circ}{x}{}^2(0)] = P_0.
\end{aligned}
$$

Для поставленной задачи построить ФК с соответствующими начальными условиями. Найти стационарное решение уравнения Риккати и выражение для стационарного фильтра.

Решение. Уравнения для оценки $\tilde{x}(t)$ и дисперсии ошибки оценки $P_{\Delta x}(t)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{\tilde{x}} = a\tilde{x} + K(t)(z - \tilde{x}), \quad \tilde{x}(0) = \mu_0,\\
&\dot{P}_{\Delta x} = 2aP_{\Delta x} - P_{\Delta x}^2/R + Q, \ \ P_{\Delta x}(0) = P_0,\\
&K(t) = P_{\Delta x}/R.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим стационарные решения P_∞ уравнения Риккати, к которым стремится $P_{\Delta x}(t)$ при $t \to \infty$. Они удовлетворяют алгебраическому уравнению Риккати $0 = 2aP_\infty - P_\infty^2 R^{-1} + Q$. При $Q > 0$ существуют два решения, одно из которых отрицательно и не может быть дисперсией ошибки оценки. Второе решение положительно

$$
P_\infty = aR + \sqrt{a^2R^2 + QR}
$$

Рассматривая интервалы знакоопределенности производной от P в соответствии с уравнением для дисперсии оценки, в котором правая часть есть квадратичная функция от P, можно доказать, что это решение устойчиво. Выражение для стационарного фильтра при бесконечном времени наблюдения получается из уравнения фильтра Калмана для оценки при $K(t) = P_\infty/R$.

Задачи оптимального оценивания в инерциальной навигации

Приведенные в данном разделе задачи предназначены для более глубокого ознакомления с методом оптимального оценивания в стохастических системах и с одной из областей, где этот метод широко применяется — инерциальной навигацией.

Инерциальная навигационная система (ИНС) представляет собой прибор, устанавливаемый на борту носителя (автомобиль, самолет, корабль и т.д.), и определяющий координаты и скорости носителя, точнее некоторой его точки, которая называется чувствительной массой (ЧМ) ИНС. В состав ИНС входят датчики угловой скорости и ньютонометры, установленные на платформе ИНС

Под задачей **коррекции ИНС** понимается уточнение вычисленных параметров движения по информации, которая называется дополнительной. Эти измерения дают возможность определить ошибки ИНС и уточнить вычисленные значения навигационных параметров. Для получения дополнительной информации обычно необходимо использование дополнительных датчиков. Среди методов получения дополнительной информации есть интересный метод, при котором нет необходимости в дополнительном датчике. Это так называемый метод остановок (в англоязычной литературе он называется ZUPT — zero update technology). Если скорость ИНС близка к нулю (например, при остановке носителя), то в качестве измерения скорости можно принять эту величину («0»), а истинное (ненулевое) значение скорости принять за ошибку измерения.

Ниже приведены две задачи коррекции для простейшей модели инерциальной навигационной системы. Первая задача приведена с решением, вторая — для самостоятельного решения. В рассматриваемых задачах для коррекции ИНС используется метод остановок, в первой задаче модель погрешности ньютонометра — «белый шум», во второй — постоянная случайная величина. В приведенных задачах можно проследить зависимость уменьшения ошибки оценки координаты после коррекции от возникающей в процессе движения системы ковариационной связи координаты (уточняемого параметра) и скорости (измеряемого параметра.)

Пример 5. ***Задача коррекции ИНС.***

Рассмотрим идеализированную постановку задачи коррекции ИНС при использовании метода остановок. Пусть чувствительная масса (ЧМ) ИНС движется по экватору. Введем инерциальную систему координат с началом в центре Земли и осями $\eta_1\eta_2$, лежащими в экваториальной плоскости. Обозначим через V абсолютную скорость ЧМ, а через X длину дуги экватора от точки пересечения оси η_1 с экватором до ЧМ. Уравнения движения ЧМ в этом случае имеют вид:

$$\dot{X} = V,$$
$$\dot{V} = F,$$

где F — сила, действующая на ЧМ со стороны подвеса одноосного ньютонометра с осью чувствительности, направленной по касательной к экватору. В вычислителе ИНС интегрируются уравнения, моделирующие движение ЧМ, и имеющие вид:

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= V', \\ \dot{V}' &= F', \end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь F' — введенное в вычислитель показание ньютонометра, X', V' — модельные значения координаты и скорости. Обозначим через ΔF ошибку измерения силы: $\Delta F = F' - F$. Будем считать, что во все время движения ось чувствительности ньютонометра направлена по касательной к экватору или что отклонения ее от касательной малы и ими можно пренебречь.

Введем ошибку координаты $\Delta X = X' - X$ и скорости $\Delta V = V' - V$. Эти ошибки будут удовлетворять системе уравнений, которые в теории инерциальной навигации называют уравнениями ошибок:

$$\Delta\dot{X} = \Delta V,$$
$$\Delta\dot{V} = \Delta F,$$

Будем считать, что погрешности ньютонометра есть случайный процесс белого шума интенсивности Q.

Вектор состояния уравнений ошибок $x = (\Delta X, \Delta V)^T$ удовлетворяет уравнению: $\dot{x} = Ax + Bq$, где q — скалярное случайные возмущения типа «белого шума» с интенсивностью Q,

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}, \qquad B = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}.$$

Пусть в течение времени T носитель ИНС движется. В процессе движения ИНС, интегрируя (4.8), определяет координаты и скорости ЧМ. В момент времени T носитель останавливается и производится коррекция ИНС из условия равенства нулю скорости (ZUPT) по измерению $z = 0$ скорости. Это измерение можно записать в виде

$$z = V - V' = \Delta V + r = x_2 + r = h \cdot x + r,$$

где $h = (0, 1)$; r — ошибка выполнения условия неподвижности ИНС (вызванная, например, ветровыми колебаниями носителя), предполагаемая случайной величиной с нулевым матожиданием и дисперсией R.

Задача 4.4. Задача заключается в сравнении дисперсии ошибки определения координаты точки остановки до измерения и после него. При этом будем считать, что начальная координата и начальная скорость известны точно. Требуется решить задачу при следующих значениях параметров: $T = 1000$с, $\sqrt{Q} = 0.001$м/с$^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{R} = 0,001$м/с.

Решение.

1. Точность автономной ИНС. Обозначим ковариационную матрицу вектора x через

$$P(t) = \begin{matrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{matrix},$$

с начальным значением, в соответствии с постановкой задачи, $P(0) = 0$. Как следует из дисперсионного уравнения, элементы ковариационной матрицы удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{p}_{11} = 2p_{12}, \qquad \dot{p}_{12} = p_{22}, \qquad \dot{p}_{22} = Q.$$

При нулевом начальном значении $P(t)$ определяется формулами:

$$p_{11}(t) = \frac{1}{3}Qt^3, \qquad p_{12}(t) = \frac{1}{2}Qt^2, \qquad p_{22}(t) = Qt.$$

Таким образом, дисперсия ошибки координаты точки остановки в момент времени T равна 333 м^2, что соответствует среднеквадратической ошибке около 18м.

2. Точность оценки координаты после измерения скорости.

Ковариационная матрица P^+ ошибок оценок вектора x после измерения скорости определяется из уравнения $P^+ = P - Ph^T(hPh^T + R)^{-1}hP$, откуда

$$p_{11}^+ = p_{11}(T) - \frac{p_{12}^2(T)}{p_{22}(T) + R}.$$

По определению коэффициента корреляции $\rho_{12} = p_{12}/\sqrt{p_{11}p_{22}}$, поэтому $\rho_{12} = \sqrt{3}/2$ и

$$p_{11}^+ = p_{11}(T)(1 - \frac{\rho_{12}^2}{1 + R/p_{22}(T)}) \approx p_{11}(T)(1 - \rho_{12}^2) = \frac{1}{4}p_{11}(T).$$

При заданных параметрах получаем оценку $p_{11}^+ \approx 9^2$м^2, что соответствует среднеквадратической ошибке около 9м – ZUPT дало снижение погрешности вдвое.

Дополнительные материалы по данной главе можно найти в источниках [1, 7, 4, 19],[16] - [24].

4.1. Случайные величины

Задача 4.5. Компоненты случайных векторов $x = (x_1, x_2)^\top$ и $y = (y_1, y_2)^\top$ связаны преобразованием вращения:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha, \\ y_2 &= -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha, \end{aligned} \qquad M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}^\top] = \begin{matrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

При каком значении α компоненты вектора y будут некоррелированы?

Задача 4.6. Компоненты случайных векторов $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ и $y = (y_1, y_2)^\top$ связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3, \end{aligned} \qquad M[\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{x}{}^\top] = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определите $K_{y_1 y_2}$.

Задача 4.7. Компоненты случайных векторов $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$ и $y = (y_1, y_2)^\top$ связаны преобразованием:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 5x_2 + 2x_3, \\ y_2 &= -x_1 + x_4. \end{aligned}$$

x_j — независимы, $\mu_j = j$, $\sigma_{x_1} = 1$, $\sigma_{x_2} = 2$, $\sigma_{x_3} = 3$, $\sigma_{x_4} = 1$. Определите $K_{y_1 y_2}$ и $\varrho_{y_1 y_2}$.

Задача 4.8. Случайная величина x принимает значения $\{0; 1; -1\}$ с вероятностью соответственно $\{1/3; 1/2; 1/6\}$. Определите K_{xx^2} и ϱ_{xx^2}. Вычислите μ_x, μ_{x^2}, μ_{x^3}, μ_{x^4} и воспользуйтесь формулой $D_y = M[y^2] - \mu_y^2$.

Задача 4.9. Для векторной случайной величины x задан вектор математического ожидания μ_x и ковариационная матрица

$$K_x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты случайной векторной величины y связаны с компонентами x следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_1 - 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Определите ковариацию $K_{y_1 y_2}$ двумя способами: непосредственно в соответствии с определением и используя соотношение $K_y = AK_xA^\top$.

4.2. Метод наименьших квадратов

Задача 4.10. Уравнения трех измерений компонент вектора $x = (x_1, x_2)^\top$ и их значения определяются формулами

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 + r_1 = 2, & \mu_{r_1} = 0, \\ z_2 = x_1 - x_2 + r_2 = 0, & \mu_{r_2} = 0, \\ z_3 = x_1 + 2x_2 + r_3 = 4, & \mu_{r_3} = 0. \end{cases}$$

Измерения равноточны и погрешности измерений r_1, r_2, r_3 некоррелированы. При помощи метода наименьших квадратов определить оценку $\tilde{x}$ вектора x.

Следующие четыре задачи – определение тренда в данных. Такие задачи возникают при калибровке всевозможных инерциальных датчиков

Задача 4.11. Уравнения измерений имеют вид:

$$z(t_i) = y(t_i) + r(t_i), \qquad y(t) = a + bt, \qquad t_i = i,\ i = 0, 1, 2,$$

где постоянные a, b неизвестны, $r(t_i)$ - ошибки измерений. При помощи метода наименьших квадратов построить оценки a, b по измерениям $z(0) = 2$, $z(1) = 1$, $z(2) = 4$. Измерения являются равноточными и их ошибки некорелированны.

Задача 4.12. Скалярное измерение имеет вид:

$$z(t_i) = y(t_i) + r(t_i), \qquad y(t) = a + bt,$$

где постоянные a, b неизвестны. При помощи метода наименьших квадратов построить оценки a, b при условии: $z(0) = 1$, $z(2) = 2$, $z(3) = 3$, $z(5) = 4$. Измерения равноточны и их ошибки некоррелированы.

Задача 4.13. Уравнение измерений имеет вид:

$$z(t_i) = y(t_i) + r(t_i), \qquad y(t) = a + bt,$$

где a, b неизвестны. При помощи метода наименьших квадратов определите оценки постоянных a, b при условии: $z(1) = 0$, $z(2) = 1$, $z(4) = 2$, $z(5) = 4$. Измерения равноточны и некоррелированы.

Задача 4.14. Уравнение измерения имеет вид:

$$z(t_i) = y(t_i) + r(t_i), \quad y(t) = a + bt,$$

где a, b неизвестны. При помощи метода наименьших квадратов постройте оценки постоянных a, b при условии: $z(1) = 1$, $z(2) = 2$, $z(3) = 3$. Погрешности измерений некоррелированы и $\sigma_{r_1} = 1$, $\sigma_{r_2} = 1/2$, $\sigma_{r_3} = 1$.

4.3. Случайные процессы

Задача 4.15. Уравнение динамической системы имеет вид $\dot{x} = ax + q$, где x — скаляр, q — белый шум с постоянной интенсивностью Q, параметр a постоянен. Заданы $\mu_x(0), P_x(0)$. Найдите

$\mu_x(t), P_x(t)$ и определите вид их зависимости от времени при разных значениях a (при $a = 0$ случайный процесс x называется процессом Винера).

Задача 4.16. Уравнение динамической системы имеет вид $\ddot{x} + x = q$, где x — скаляр, q — белый шум с постоянной интенсивностью Q. Заданы $\mu_X(0), P_X(0)$, где $X = (x, \dot{x})^\top$. Найдите $\mu_X(t), P_X(t)$.

Задача 4.17. Уравнение динамической системы имеет вид $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = q(t)$, где x — скаляр, q — белый шум с постоянной интенсивностью Q. Заданы $\mu_X(0), P_X(0)$, где $X = (x, \dot{x})^\top$. Найдите матрицу $P_X(t)$ и определите вид ее зависимости от времени при разных значениях a, b.

Задача 4.18. Уравнение динамической системы имеет вид $\ddot{x}+5\dot{x}+6x = q$, где x — скаляр, q — белый шум, $M[q(t)q(s)] = \delta(t-s)$. Найдите $D_x(t), D_{\dot{x}}(t)$ при $t \to \infty$.

Задача 4.19. Скалярный случайный процесс в дискретном времени описывается уравнением

$$x_{i+1} = \alpha x_i + q_i, \quad M[q_i] = 0, \quad M[q_i q_j] = Q\delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1 \ldots .$$

Заданы μ_{x_0}, P_{x_0}. Двумя способами найдите μ_{x_k}, P_{x_k} и определите вид их зависимости от времени при разных значениях α. Первый способ — решая уравнение для математического ожидания и дисперсионное уравнение. Второй - вычислить случайные величины, являющиеся частичными суммами ряда, заданного уравнением состояния, и найти их математическое ожидание и дисперсию.

Задача 4.20. Для случайного процесса в дискретном времени найдите P_{x_i} при заданном P_{x_0}

$$\begin{aligned} &x_{1,i+1} = a x_{2,i}, \\ &x_{2,i+1} = q_i, \quad i = 0, 1 \ldots \end{aligned}$$

Задача 4.21. Найдите ковариационную матрицу P_{x_i} при $i \to \infty$ для системы при заданном P_{x_0}:

$$\begin{cases} x_{1_{k+1}} = x_{1_k} + \dfrac{1}{2} x_{2_k}, & M[q(t)] = 0, \\ x_{2_{k+1}} = -\dfrac{1}{2} x_{1_k} + q_k, & M[q(t)q(s)] = \delta(t-s). \end{cases}$$

4.4. Дискретный фильтр Калмана

Задача 4.22. Постройте стационарный дискретный фильтр Калмана для случайного процесса

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{2,i}, \\ x_{2,i+1} = x_{2,i} + q_i, \\ z_i = x_{2,i} + r_i. \end{cases} \qquad \begin{matrix} M[q(t)] = 0, \\ M[q(t)q(s)] = Q\delta(t-s). \end{matrix}$$

Задача 4.23. Постройте стационарный дискретный фильтр Калмана для случайного процесса

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{2,i}, \\ x_{2,i+1} = x_{2,i} + q_i, \\ z_i = x_{1,i} + r_i. \end{cases} \qquad \begin{matrix} M[q(t)] = 0, \\ M[q(t)q(s)] = Q\delta(t-s). \end{matrix}$$

Задача 4.24. При помощи фильтра Калмана найдите стационарную дисперсию ошибки оценки скалярного случайного процесса

$$\begin{matrix} x_{i+1} = ax_i + q_i, \\ z_i = hx_i + r_i. \end{matrix}$$

Задача 4.25. Постройте стационарный фильтр Калмана для оценки процесса

$$\begin{cases} x_{1,i+1} = x_{2,i}, \\ x_{2,i+1} = q_i, \\ z_i = x_{2,i} + r_i. \end{cases}$$

Задача 4.26. Дана динамическая система

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = q, \end{matrix} \qquad M[q(t)] = 0, \quad ,M[q(t)q(s)] = \delta(t-s),$$

с начальными условиями

$$M[x(0)] = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \ , \quad M[\overset{\circ}{x}(0)\,\overset{\circ}{x}^{\top}(0)] = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \ ,$$

где $x = (x_1, x_2)^\top$. Найдите оптимальную оценку $\tilde{x}$ и ковариационную матрицу ошибки оценки с учетом измерения $z = x_1(3) + r$ в момент времени $t = 3$, принимающего значение $z = 3$, в предположении $M[r] = 0$, $M[r^2] = 1$.

Задача 4.27. Найдите оценку постоянной случайной величины x по дискретным измерениям

$$z_i = x + r_i, \quad i = 0, 1 \ldots n, \quad M[r_i] = 0, \quad M[r_i r_j] = R\delta_{ij}$$

по методу наименьших квадратов и сравните с оценкой x_n, полученной для случайного процесса, описываемого уравнениями

$$x_{i+1} = x_i, \qquad z_i = x_i + r_i, \quad i = 0, 1 \ldots n$$

при заданных μ_{x_0}, P_{x_0}.

Задача 4.28. Найдите оптимальную по критерию минимума дисперсии ошибки оценки оценку $\tilde{x}$ скалярной случайной величины x, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x} = -x + q, \qquad M[q] = 0, \qquad M[q(t)q(s)] = \delta(t - s)$$

с начальными условиями $\mu_x(0) = 1$, $\sigma_x(0) = \sqrt{3}$. Проводится измерение z в момент времени $t = 0$, удовлетворяющее уравнению $z = x(0) + r$ и принимающего значение $z = 3$ при $M[r] = 0$, $M[r^2] = 1$. Найти $\tilde{x}(1)$, $\sigma_{\Delta x}(1)$.

Задача 4.29. * Найдите оптимальную по критерию минимума дисперсии ошибки оценки оценку $\tilde{x}$ скалярной случайной величины x, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x} = -x + q, \qquad M[q] = 0, \qquad M[q(t)q(s)] = 6\delta(t - s)$$

с начальными условиями $\mu_x(0) = 1$, $\sigma_x(0) = \sqrt{3}$. Проводится измерение z в момент времени $t = 1$, удовлетворяющее уравнению $z = x(1) + r$ и принимающего значение $z = 3$ при $M[r] = 0$, $M[r^2] = 1$. Найти $\tilde{x}(1)$, $\sigma_{\Delta x}(1)$.

Задача 4.30. Найдите оптимальную по критерию минимума дисперсии ошибки оценки оценку $\tilde{x}$ скалярной случайной величины x, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x} = q, \quad M[q] = 0, \quad M[q(t)q(s)] = 2\delta(t - s)$$

с начальными условиями $\mu_x(0) = 1$, $\sigma_x(0) = 1$. Проводится измерение в момент времени $t = 1$, удовлетворяющее уравнению $z = x(1) + r$ и принимающего значение $z = 2$ при $M[r] = 0$, $M[r^2] = 1$. Найти $\tilde{x}(1)$, $\sigma_{\Delta x}(1)$.

Задача 4.31.* Известна корреляционная функция скалярного стационарного случайного процесса x: $K_x(t-s) = e^{-|t-s|}$. Измеряются величины $z_1 = x(1)$, $z_2 = x(2)$, $z_3 = x(3)$. Постройте оптимальную по критерию минимума дисперсии оценку $x(t)$ по z_1, z_2, z_3, рассмотрев случаи $t \le 1$, $1 < t \le 2$, $2 < t \le 3$, $t > 3$.

Задача 4.32. Найдите оптимальную по критерию минимума дисперсии ошибки оценки оценку $\tilde{x}$ скалярной случайной величины

x, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x} = x + q, \quad M[q] = 0, \quad M[q(t)q(s)] = \delta(t - s)$$

с начальными условиями $\mu_x(0) = 1$, $\sigma_x(0) = 1$. Проводится измерение в момент времени $t = 0$, удовлетворяющее уравнению $z = x(0) + r$ и принимающего значение $z = 2$ при $M[r] = 0$, $M[r^2] = 1$. Найти $\tilde{x}(1)$, $\sigma_{\Delta x}(1)$.

4.5. Непрерывный фильтр Калмана

Задача 4.33. Динамическая система описывается уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами со случайным возмущением типа белого шума:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = q(t),$$

где $M[q(t)] = 0$, $M[q(t)q(s)] = Q\delta(t - s)$. Введем переменные $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$ и запишем исходное уравнение в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= -bx_1 - ax_2 + q(t). \end{aligned}$$

Заданы начальные условия: $M[x_1(0)] = 0$, $M[x_2(0)] = 0$, $M[x_1^2] = P_{11}(0)$, $M[x_2^2] = P_{22}(0)$, $M[x_1 x_2] = P_{12}(0)$. Производится измерение переменной x_2, содержащее ошибку типа белого шума:

$$z(t) = x_2(t) + r(t), \quad M[r(t)] = 0, \quad M[r(t)r(s)] = R\delta(t - s).$$

Для поставленной задачи запишите дифференциальные уравнения фильтра Калмана для оценок координат вектора состояния и элементов ковариационной матрицы ошибок оценок $P_{ij}(t)$ (уравнение Риккати). Найдите стационарное решение уравнения Риккати и выражение для стационарного фильтра при бесконечном времени наблюдения.

Задача 4.34. Скалярный случайный процесс описывается дифференциальным уравнением первого порядка и имеется скалярное измерение:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + q, \\ z &= hx + r, \end{aligned}$$

где $q(t), r(t)$ — случайные процессы типа белого шума: $M[q(t)] = 0$, $M[q(t)q(s)] = Q\delta(t - s)$, $M[r(t)] = 0$, $M[r(t)r(s)] = R\delta(t - s)$. Запишите уравнения фильтра Калмана и проведите анализ стационарного решения уравнения Риккати для ковариационной матрицы ошибок оценки при бесконечном времени наблюдения по параметрам a, h.

Задача 4.35. Динамическая система описывается системой дифференциальных уравнений 2 порядка и имеет скалярное измерение

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = q, \\ z = x_1 + r. \end{cases}$$

где $M[q(t)] = 0$, $M[r(t)] = 0$, $M[r(t)r(s)] = R\delta(t-s)$, $M[q(t)q(s)] = Q\delta(t-s)$. Постройте непрерывный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения. Убедитесь, что уравнения ошибок асимптотически устойчивы.

Задача 4.36. Уравнения динамической системы со скалярным измерением имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = q, \\ z = x_1 + r, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} M[q] = 0,\ M[q(t)q(s)] = 9/4\delta(t-s) \\ M[r] = 0,\ M[r(t)r(s)] = \delta(t-s) \end{array}$$

Постройте непрерывный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения. Убедитесь, что уравнения ошибок асимптотически устойчивы.

Задача 4.37. Задана динамическая система со скалярным измерением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + q_1, \\ \dot{x}_2 = q_2, \\ z = x_1 + x_2 + r. \end{cases} \qquad M[q(t)q^T(s)] = \begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \ \delta(t-s),$$

где $M[q] = 0, M[r] = 0, M[r(t)r(s)] = \delta(t-s)$. Постройте непрерывный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения. Убедитесь, что уравнения ошибок асимптотически устойчивы.

Задача 4.38. Динамическая система описывается системой уравнений второго порядка и имеет измерение

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = -bx_1 - ax_2 + q(t), \\ z(t) = x_2(t) + r(t), \end{cases}$$

где $M(q(t)) = 0$, $M(q(t)q(s)) = Q'\delta(t-s)$, $M[r(t)] = 0$, $M[r(t)r(s)] = R\delta(t-s)$, $M[x_1(0)] = 0$, $M[x_2(0)] = 0$, $M[x_1^2] = P_{11}(0)$, $M[x_2^2] = P_{22}$, $M[x_1x_2] = P_{12}(0)$. Постройте стационарный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения и вычислите ковариационную матрицу ошибок оценок при $R \to \infty$. Сравните эти значения с решением дисперсионного уравнения для системы без измерения.

Задача 4.39. Уравнения динамической системы со скалярным измерением имеет вид:

$$\dot{x_1} = x_2,$$
$$\dot{x_2} = ax_1 + q, z = x_2 + r,$$

где $M(q(t)) = 0$, $M(q(t)q(s)) = Q'\delta(t - s)$, $M[r(t)] = 0$, $M[r(t)r(s)] = \delta(t - s)$. Постройте стационарный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения и вычислите ковариационную матрицу ошибок при $t \to \infty$.

Задача 4.40. Дана система

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + \xi, z = x_1 + r,$$

где $M[\xi] = 0$, $M[r] = 0$, $M[\xi(t)\xi(s)] = 3\delta(t - s)$, $M[r(t)r(s)] = \delta(t - s)$. Постройте непрерывный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения. Убедитесь, что уравнения ошибок асимптотически устойчивы.

Задача 4.41.* Для системы

$$\dot{x} = y,$$
$$z = x + r,$$

где y, r — независимые случайные процессы с характеристиками $M[r(t)r(s)] = \delta(t - s)$, $M[y(t)y(s)] = \sigma^2 e^{-|t-s|}$, $\sigma^2 = 8$. Постройте фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения. Убедитесь, что один из элементов стационарной ковариационной матрицы ошибок оценок $p_{11} = 2$.

Задача 4.42.* Известна корреляционная функция скалярного стационарного случайного процесса x: $K_x(t - s) = e^{-|t-s|}$. Измеряется величина $z = x + r$, где r — белый шум: $M[r(t)r(s)] = \delta(t - s)$.

Постройте асимптотический алгоритм оценивания x. Минимизируйте дисперсию ошибки оценки $D_{\Delta x}(\infty)$ по параметру фильтра — коэффициент усиления K и сравните полученный асимптотический алгоритм оценивания с фильтром Калмана при бесконечном времени наблюдения.

Задача 4.43. *Задача коррекции ИНС.*

Решить задачу коррекции ИНС при использовании метода остановок в случае неизвестной постоянной случайной ошибке ньютонометра.

Пусть в течение времени T носитель ИНС движется. В процессе движения ИНС определяет координата и скорость ЧМ. В момент времени T носитель останавливается и производится коррекция ИНС по одному измерению $z = 0$ скорости, удовлетворяющему уравнению: $z = \Delta V + r = x_2 + r$, где r — случайная ошибка измерения с дисперсией R.

Сравнить дисперсию ошибки определения координаты точки остановки до измерения и после него и сравнении коэффициента корреляции координаты и скорости в момент измерения с этой величиной из примера 4.4. При этом будем считать, что начальная координата маршрута и начальная скорость известны точно (без ошибок) и дисперсия неизвестной постоянной ошибки ньютонометра равна $D = (10^{-3}\text{м/с}^2)^2$. Решить задачу при следующих значениях параметров: $T = 1000\text{с}$, $\sqrt{R} = 0,001\text{м/с}$.

Указание. Использовать описанную в примере 4.4 простейшую модель ИНС и ввести формирующее уравнение для постоянной ошибки ньютонометра.

Глава 5

Оптимальное управление движением

Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим класс управляемых систем, описываемых с помощью обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = f(y, u), \qquad y(t_0) = y^*, \tag{5.1}$$

где y — вектор состояния размерности n, u — скалярное управление, f — непрерывная вектор-функция по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по y.

Условием окончания процесса служит первое попадание в момент времени t_k на гладкое и без особых точек многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$, заданное с помощью m равенств $(1 \leq m \leq n)$:

$$M = \quad y(t_k) \in \mathbb{R}^n \quad \varphi_i(y) = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \operatorname{rank} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad = m \quad .$$

Предполагается, что ресурсы управления ограничены, то есть управление $u(\cdot)$ принадлежит функциональному множеству

$$U = \Big\{ u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty[t_0, t_k] \qquad u_- \leq u(t) \leq u_+ \Big\}, \tag{5.2}$$

где $-\infty \leq u$, $u_+ \leq \infty$ — заданные константы. Пусть существует хотя бы одно управление $u(\cdot) \in U$ и конечный момент времени t_k такие, что $y(t_k) \in M$. В качестве критерия качества управления системой (5.1) рассмотрим терминальный гладкий функционал $\varphi_0(y(t_k))$, где момент t_k — первый момент попадания на многообразие M.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\varphi_0(y(t_k)) \longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in U}. \tag{5.3}$$

При дополнительном ограничении на правые части

$$y^\top f(y, u) \leq \beta(1 + \|y\|)$$

для рассматриваемой постановки задачи из теоремы А.Ф. Филиппова о существовании оптимального управления [21] следует, что существует оптимальное управление $u^0(\cdot) \in U$ и момент времени t_k^0 такие, что на соответствующей оптимальной траектории $y^0(t)$ выполняется равенство

$$\varphi_0(y^0(t_k^0)) = \min_{u(\cdot)\in U} \varphi_0(y(t_k)).$$

Задача оптимального управления заключается в отыскании управления, которое переводит систему (5.1) из начального состояния на конечное многообразие, удовлетворяет ограничению (5.2) и при этом функционал (5.3) достигает своего минимума на траекториях системы (5.1).

Пара $\{y^0(t),\ u^0(t),\ t \in [t_0;\, t_k^0]\}$ называется оптимальным процессом.

Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi, y, u) = \psi^\top f(y, u),$$

где $\psi(t)$ — решение системы системы линейных дифференциальных уравнений, сопряженных уравнениям в вариациях на оптимальном решении исходной системы:

$$\dot{\psi} = - \quad \frac{\partial f(y^0(t),\, u^0(t))}{\partial y} \quad^{\top} \psi \tag{5.4}$$

Тогда верна теорема [1] о необходимых условиях оптимальности:

Теорема 5.1. *Если $\{y^0(\cdot),\ u^0(\cdot),\ [t_0;\, t_k^0]\}$ — оптимальный процесс, то существует ненулевая пара $\{\lambda_0 \geq 0,\ \psi(\cdot)\}$ такая, что выполняются следующие условия:*

1) *функция Понтрягина достигает максимума на множестве точек непрерывности T оптимального управления $t \in T \subset [t_0;\, t_k^0]$*

$$\max_{u_- \leq u(t) \leq u_+} H(\psi(t),\, y^0(t),\, u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)); \tag{5.5}$$

2) *вектор*

$$\psi(t_k^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y} \tag{5.6}$$

ортогонален к многообразию M в точке $y^0(t_k^0)$ — условие трансверсальности;

3) *условие стационарности гамильтониана почти всюду на $[t_0;\, t_k^0]$*

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t),\, y^0(t),\, u^0(t)) \equiv 0. \tag{5.7}$$

С помощью сформулированной выше теоремы поиск оптимального управления сводится к решению двухточечной краевой задачи для совокупности систем (5.1) и (5.4), где на левом конце задано n условий $y(t_0) = y^*$, а на правом — m условий $y(t_k) \in M$ для $y(t_K)$, и $n - m$ условий трансверсальности (5.6) для $\psi(t_k)$. В процессе интегрирования двухточечной задачи при каждом $t \in T$ надо решать одномерную задачу оптимизации (5.5) по $u(t)$.

Найденная таким образом траектория называется экстремалью Понтрягина. Поскольку принцип максимума дает лишь необходимые условия оптимальности, надо убедиться, что найденное решение доставляет минимум функционалу качества. Иногда это удается осуществить непосредственной проверкой, иногда — используя условия достаточности принципа максимума для отдельных классов экстремальных задач.

Например, принцип максимума Понтрягина является достаточным условием глобального минимума в задачах быстродействия для линейной управляемой системы [2]. В некоторых случаях выполнены достаточные условия регулярного синтеза по Болтянскому (оптимальное управление строится как функция координат $u^0 = u^0(y)$), формулировку которых можно найти в [1, 2].

Пример 1. *Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче:*

$$\ddot{x} = u, \qquad J(u(\cdot)) = \int_0^1 x\,dt \to \min_u, \qquad |u(t)| \le 1,$$
$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, \qquad \dot{x}(1) = 0.$$

Решение. Запишем условия задачи в стандартной форме об оптимальном переходе на многообразие в смысле терминального функционала, для чего введем дополнительные переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_0 = \int_0^t x_1\,d\tau$, $x_3 = t$. Исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = 1, \end{cases} \tag{5.8}$$

экстремальная задача — в виде $\min_u x_0(t_k)$, а терминальные условия — в виде $x(t_k) \in M$, где $M = \{x_2 = 0,\ x_3 = 1\}$.

Выпишем функцию Понтрягина $H = \psi_0 x_1 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3$ и сопряженную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot\psi_0 = 0, \\ \dot\psi_1 = -\psi_0, \\ \dot\psi_2 = -\psi_1, \\ \dot\psi_1 = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{pmatrix} \psi_0(t_k) \\ \psi_1(t_k) \\ \psi_2(t_k) \\ \psi_3(t_k) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp M, \qquad \lambda_0 \geq 0,$$

откуда следует

$$(\psi_0(t_k) + \lambda_0)\gamma_0 + \psi_1(t_k)\gamma_1 = 0,$$

где γ_1, γ_2 — произвольные постоянные. Следовательно, $\psi_0(t_k) = -\lambda_0 \leq 0$, $\psi_1(t_k) = 0$. Из первого уравнения для сопряженной системы следует, что $\psi_0(t) = \mathrm{const}$.

Допустим, что $\lambda_0 = 0$. Тогда $\psi_0 = 0$ и $\psi_1 \equiv 0$.

На оптимальной траектории гамильтониан $\mathcal{H}(t) \equiv 0$, откуда $\psi_3 = 0$. Кроме того, из $\mathcal{H}(0) = 0$ следует, что $\psi_2(0) = 0$, т.е. $\psi_2 \equiv 0$. Но тогда получаем нулевую пару (λ_0, ψ), что противоречит принципу максимума. Значит, выполнены неравенства $\lambda_0 > 0$ и $\psi_0 < 0$. Сопряженная система однородна, потому можем пронормировать решение, положив $\psi_0 = -1$. Из условия максимума функции Понтрягина получим:

$$u^0(t) = \begin{matrix} 1, & \text{при } \psi_2 > 0; \\ -1, & \text{при } \psi_2 < 0. \end{matrix}$$

Покажем, что не существует интервала $(t', t'') \in [0, 1]$ такого, что на нем $\psi_2(t) \equiv 0$. Действительно, допустим, что это так. Но тогда на рассматриваемом интервале выполнено $\dot\psi_2 \equiv 0$, откуда $\psi_1 \equiv 0$. Следовательно, $\psi_0 \equiv 0$, $\psi_3 \equiv 0$ и опять получаем нулевую пару. Таким образом, доказано, что в этой задаче могут быть только регулярные решения.

Теперь запишем решение сопряженной системы

$$\psi_1(t) = (t - t_k), \qquad \psi_2(t) = -\frac{1}{2}(t - t_k)^2 + C,$$

где C — произвольная константа. Из вида ψ_2 следует, что при любых C функция $\psi_2(t)$ может пересечь отрезок оси абсцисс $[0, t_k]$ не более, чем в одной точке $\tau \in [0,1]$ $(t_k = 1)$. При этом $\psi_2(t) < 0$ на $t \in [0,\tau)$. Случай, когда $\psi_2(t)$ не пересекает ось абсцисс, нам не подходит, поскольку тогда оптимальное управление на всем отрезке $u^0(t) = 1$, что не позволяет выполнить граничные условия.

Следовательно, структура оптимального управления такова:

$$u^0 = -1 \text{ при } t \in [0,\tau), \qquad u^0 = 1 \text{ при } t \in [\tau, 1].$$

Экстремаль Понтрягина на отрезке $t \in [0,\tau]$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{x}_2(t) = -t \\ \hat{x}_1(t) = -\dfrac{t^2}{2} \end{cases} \qquad t \in [0,\tau].$$

Продолжая решение на отрезке $t \in [\tau, 1]$, получим

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \hat{x}_2(t) = \hat{x}_2(\tau) + t - \tau = t - 2\tau, \\ \hat{x}_1(t) = \dfrac{1}{2}t^2 - 2\tau t + C \end{cases} \qquad t \in [\tau, 1].$$

Из условия $\hat{x}_2(1) = 0$ получаем $\tau = \frac{1}{2}$.

Непосредственной проверкой покажем, что единственная экстремаль $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум функционала качества. Для этого выберем кусочно-гладкую вариацию $\delta x_1(t)$ такую, что $\hat{x}_1(t) + \delta x_1(t)$ является допустимой траекторией. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия $\delta x_1(0) = \delta \dot{x}_1(0) = 0$ и $|\ddot{\hat{x}}_1 + \delta \ddot{x}_1| = |u^0 + \delta u| \le 1$.

Учитывая, что на всем рассматриваемом отрезке времени выполнено равенство $\ddot{\psi}_2 = -1$, приращение функционала запишем в виде

$$\Delta J = J(u^0 + \delta u) - J(u^0) = \int_0^1 (\hat{x}_1 + \delta x_1) dt - \int_0^1 \delta x_1 dt =$$
$$= \int_0^1 \delta x_1 dt = -\int_0^1 \ddot{\psi}_2 \delta x_1 dt = -\int_0^1 \delta x_1 d\dot{\psi}_2.$$

Проинтегрируем дважды по частям последнее выражение с учетом краевых условий $\delta x_1(0) = \delta \dot{x}_1(0) = 0$ и $\dot{\psi}_2(1) = 0$. Тогда

$$\Delta J = \int_0^1 \dot{\psi}_2 d\delta x_1 - \dot{\psi}_2 \delta x_1 \Big|_0^1 = \psi_2 \delta \dot{x}_1 \Big|_0^1 - \int_0^1 \delta \ddot{x}_1 \psi_2 dt = -\int_0^1 \delta \ddot{x}_1 \psi_2 dt.$$

Учитывая, что допустимые вариации $\delta \ddot{x}_1 \ge 0$ и $\psi_2 \le 0$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$, а $\delta \ddot{x}_1 \le 0$, $\psi_2 \ge 0$ при $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, получим неравенство $\Delta J \ge 0$.

Следовательно, единственная экстремаль $\hat{x}$ доставляет абсолютный минимум функционала J.

Пример 2. *Построить синтез оптимального управления в следующей задаче быстродействия:*

уравнения движения системы $\ddot{x} = u,$

ограничения на управление $|u(t)| \leq 1,$

начальное состояние системы $x^2(0) + \dot{x}^2(0) > 1,$

терминальное многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k)) \in M = \{x^2 + \dot{x}^2 = 1\}$

функционал $t_k \to \min\limits_u.$

Решение. Введем переменные $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ $x_3 = t$. Исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ \dot{x}_3 = 1 \end{cases} \tag{5.10}$$

В новых переменных экстремальная задача примет вид $x_3 \to \min\limits_u$. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина для задачи оптимального прихода на многообразие с терминальным функционалом. Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3,$$

а сопряженная система соответственно имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

Конечное многообразие есть $M = \{x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, откуда условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_k) \\ \psi_2(t_k) \\ \psi_3(t_k) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 2x_1(t_k) \\ 2x_2(t_k) \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует $\psi_3(t_k) = -\lambda_0 \leq 0$, $(\psi_1(t_k), \psi_2(t_k) = 2 * \lambda_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$, где $x_1(t_k) = \cos\alpha$, $x_2(t_k) = \sin\alpha$, α — угол, определяющий положение конечной точки траектории D (см. рис. 5.1) на окружности M.

Рис. 5.1. Синтез оптимального управления

Из условия максимума функции Понтрягина следует $u^0 = \operatorname{sign}(\psi_2)$. Поскольку $\mathcal{H}(t) \equiv 0$, то $\psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 \equiv 0$, но $\psi_3 \leq 0$, следовательно $(\psi_1, \psi_2)(\dot{x}_1, \dot{x}_2)^\top \geq 0$. Поскольку оптимальная траектория попадает на окружность извне, то последнее неравенство означает, что в конечной точке вектор $(\psi_1, \psi_2)^\top$ направлен внутрь окружности (см. рис. 5.1). Тогда $\lambda_1 > 0$. Случай $\lambda_1 = 0$ не подходит, т.к. в этом случае получаем нулевую пару (λ_0, ψ), что противоречит принципу максимума. Нормируем $\lambda_1 = 1/2$. Решение сопряженной системы (5.11) запишем в виде

$$\begin{cases} \psi_1(t) = -\cos\alpha \\ \psi_2(t) = \cos\alpha(t - t_k) - \sin\alpha \\ \psi_3 = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

Из линейности функции $\psi_2(t)$ следует, что на оптимальной траектории может быть не более одного переключения.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость фазового пространства. В первой четверти $0 \leq \alpha < \pi/2$ и тогда $\psi_2(t) < 0$ — переключений нет, оптимальное управление $u^0 = -1$ и оптимальные траектории

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + C, \tag{5.13}$$

где $C = \text{const}$.

Во второй четверти в окрестности конечной точки $\psi_2(t) < 0$ на отрезке времени $t^* \leq t \leq t_k$ и оптимальное управление равно $u^0 = -1$. До встречи с окружностью движение происходит по траекториям (5.13). Переключение происходит в момент $t^* = t_k + \operatorname{tg}\alpha$. Координаты точек P кривой переключения $\mathcal{L}$ следующие:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha(\sin\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha) \\ x_2^* &= \sin\alpha - \operatorname{tg}\alpha \end{aligned} \tag{5.14}$$

Заметим, что кривая $\mathcal{L}$ переключения (5.14) не является траекторией системы. При $\alpha \to \pi/2$ она асимптотически приближается к траектории $A_2\,D_2$, описываемой уравнением $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}$ (рис. 5.1). Для точек нижней половины окружности M картина синтеза в симметрична.

В области фазовой плоскости, расположенной ниже левой ветки кривой переключения $\mathcal{L}$ оптимальное управление $u^0 = 1$. Выше кривой $\mathcal{L}$ до линии $A_2 D_2$ оно переключается на $u^0 = -1$. В области, ограниченной кривыми $A_2\,D_2$, $A_1\,D_1$ управление $u^0 = -1$ и переключений нет.

В этой задаче выполнены условия регулярного синтеза по Болтянскому. Терминальное множество $\mathcal{M}$ здесь окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Нуль-мерные клетки отсутствуют. Ветви парабол $A_1 D_1$ и $A_4 D_4$ представляют одномерные клетки первого типа, поскольку являются экстремалями Понтрягина управляемой системы. Ветви кривой переключения $\mathcal{L}$ представляют одномерные клетки второго типа. Одномерные клетки разбивают фазовую плоскость вне круга $x_1^2 + x_2^2 = 1$ yf конечное число двумерных клеток, где оптимальное управление постоянно $u^0 = \pm 1$. таким образом оптимальная траектория, начинающаяся в произвольной точке фазовой плоскости вне терминального множества и заканчивающаяся на терминальной окружности, состоит из конечного числа гладких кусков, проходящих через двумерные клетки и одномерные клетки первого типа.

Неособые и особые оптимальные управления и варианты их сопряжения

Рассмотрим частный случай системы (5.1) вида:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y,u,v) = f^0(y) + f^1(y)u \\ u(\cdot) \in U. \end{cases} \tag{5.15}$$

Оптимальное управление в задаче (5.3), (5.15) в общем случае может складываться из участков регулярного (неособого) и сингулярного (особого) управлений, сопряжение которых осуществляется кусочно-непрерывно или посредством режима с учащающимися переключениями.

Предположим, что управление $u_0(t)$ однозначно определяется из условия максимума функции H по u (уравнение (5.5)). В этом случае оптимальное управление называется регулярным, а соответствующая ему дуга оптимальной траектории задачи (5.3), (5.15) — регулярной дугой. Например, в случае задачи оптимального быстродействия для системы (5.15) вида

$$\dot{y} = Ay + Bu,$$

где A и B — постоянные матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(n \times 1)$ соответственно, оптимальное управление является регулярным, если пара $(A,\, B)$ управляема $(\det(B,\, AB,\, ...A^{n-1}) \neq 0)$.

В ряде других частных случаев системы (5.15) также можно доказать, что оптимальные управления являются регулярными.

В результате применения принципа максимума к задаче оптимального управления (5.3), (5.15) получаем следующее регулярное управление:

$$u_0(t) = \begin{cases} u_+, & \text{если } \psi^\top f^1(y) > 0, \\ u_-, & \text{если } \psi^\top f^1(y) < 0, \end{cases} \tag{5.16}$$

т.е. регулярное управление принимает предельные допустимые значения для управляющей функции.

Предположим теперь, что управление $u_0(t)$ не может быть однозначно определено из условия максимума функции H по u. Пусть существует отрезок времени τ, $\tau \subset [t_0,\, t_k^0]$ такой, что для любого $t \in \tau$ выполнено соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

что для задачи (5.3), (5.15) приводит к равенству

$$\psi^\top f^1(y) \equiv 0, \quad t \in \tau \subset [t_0;\, t_k].$$

Управление, для которого выполнены указанные условия, называется особым или сингулярным управлением, а соответствующая ему дуга траектории системы (5.15) — сингулярной дугой.

Большинство задач оптимального управления механическими системами, в которых может иметь место особое управление, представляются в виде задачи (5.3), (5.15). Задачи, в которых оптимальное управление содержит режим особого управления, иногда называют вырожденными задачами.

Для задач с особыми управлениями невозможно определить оптимальное управление на особом участке траектории непосредственно из принципа максимума Понтрягина.

Пусть на отрезке τ имеет место соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi^\top f^1(y) \equiv 0, \quad t \in \tau \subset [t_0;\, t_k].$$

Последовательное дифференцирование выражения $\partial H/\partial u$ по времени приводит к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} \quad \dfrac{d^s}{dt^s} \quad \dfrac{\partial H}{\partial u} \qquad \equiv 0, \quad s = 1, ..., 2q-1, \\ \dfrac{d^{2q}}{dt^{2q}} \quad \dfrac{\partial H}{\partial u} \quad = a(\psi,\, y) + u \cdot b(\psi,\, y), \quad b(\psi(t),\, y(t)) \neq 0, \end{cases}$$

причем управление u явным образом может войти только в четную производную. Число q называют порядком особого управления, или порядком вырожденности (сингулярности) оптимального управления.

Если $b(\psi(t),\, y(t)) \neq 0$ при всех $t \in \tau \subset [t_0;\, t_k]$, то особое управление вычисляется по формуле

$$u^{oc}(t) = -\frac{a(\psi(t),\, y(t))}{b(\psi(t),\, y(t))}, \quad t \in \tau.$$

Необходимое условие оптимальности особого управления (Дж. Келли [8])

Теорема 5.2. *Для минимума функционала качества на особом участке в задаче (5.3), (5.15) должно выполняться следующее необходимое условие*

$$(-1)^q b(\psi,\, y) = (-1)^q \frac{\partial}{\partial u} \quad \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \quad \frac{\partial H}{\partial u} \qquad \leq 0.$$

Пример 3. *Найти решение экстремальной задачи:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \qquad -1 \leq u(t) \leq 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &J = \int_0^{t_k} (x_1 - x_2)^2\, dt \to \min, \\ &x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \\ &x_1(t_k) = 0, \quad x_2(t_k) = 0 \end{aligned}$$

Решение. Введем дополнительную переменную: $x_0(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (x_1 - x_2)^2\, dt$.

В новых переменных задача запишется так:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_0 = (x_1 - x_2)^2,\\
&\dot{x}_1 = x_2,\\
&\dot{x}_2 = u, \qquad -1 \le u \le 1\\
&J = x_0(t_k) \to \min_u
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Терминальное многообразие $M = \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$. Из условий трансверсальности

$$\begin{pmatrix}\psi_0(t_k)\\ \psi_1(t_k)\\ \psi_2(t_k)\end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \perp M, \qquad \lambda_0 \ge 0$$

следует

$$\psi_0(t_1) + \lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 \ge 0.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases}
\dot{\psi}_0 = 0,\\
\dot{\psi}_1 = -2\psi_0(x_1 - x_2),\\
\dot{\psi}_2 = -\psi_1 + 2\psi_0(x_1 - x_2)
\end{cases} \tag{5.18}$$

Из условий трансверсальности следует $\psi_0(t_k) + \lambda_0 = 0$, а из первого уравнения сопряженной системы $\psi_0 \equiv \text{const} < 0$. Нормируем $\psi_0 = -\frac{1}{2}$.

Функция Понтрягина имеет вид $H = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Оптимальное управление

$$u^o = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi_2 > 0\\ -1 & \text{при } \psi_2 < 0\end{cases}$$

В этой задаче могут существовать особые участки $[\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}]$, где $H_1 = \psi_2 \equiv 0$. На особом участке $\dot{\psi}_2 = 0$, откуда следует $\psi_1 = -(x_1 - x_2)$. На оптимальном участке особой траектории гамильтониан $\mathcal{H} \equiv 0$, откуда

$$-\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)x_2 \equiv 0, \Rightarrow x_1 = x_2, \quad x_1 = -x_2.$$

Оптимальное особое управление находим из условия

$$\frac{d^2 H_1}{dt^2} \equiv 0 \Rightarrow -(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \dot{\psi}_1 = -x_1 + u \equiv 0.$$

Условие Келли оптимальности особого управления выполнено, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial u}\ \frac{d^2}{dt^2}H_1 \ \geq 0 \Rightarrow 1 > 0.$$

На особых траектория должно выполняться условие $|u| \leq 1 \Rightarrow |x_1| \leq 1$. Следовательно особые участки — два отрезка прямых $x_1 = x_2$ и $x_1 = -x_2$. На прямой $x_1(t) = x_2(t)$ движение происходит от начала координат, а на прямой $x_1(t) = -x_2(t)$ — к началу координат. На этом участке особое управление равно $u^* = x_1$, тогда $x_2(t) = z^* e^{t-t^*}$, где $z* = x_2(t^*)$ — вторая координата точки переключения, где t^* — момент переключения на особый участок. Заметим, что движение по особой прямой в начало координат происходит за бесконечное время. При этом значение функционала равно

$$J^1 = \frac{1}{2}\int_{t^*}^{\infty}(x_1 - x_2)^2 dt = -\frac{1}{2}\int_{z^*}^{0}\frac{(-x_2 - x_2)^2}{x_2}dx_2 = (z^*)^2.$$

Регулярные участки оптимальной траектории находим следующим образом:

а) $u = -1$. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -1 \ \Rightarrow\ \frac{dx_1}{dx_2} = -x_2 \ \Rightarrow\ x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + C.$$

Через начало координат проходит участок параболы $x_1 = -\frac{x_2^2}{2}$.

б) $u = 1$. Тогда

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 1 \ \Rightarrow\ \frac{dx_1}{dx_2} = x_2 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + C.$$

Через начало координат проходит участок параболы $x_1 = \frac{x_2^2}{2}$.

Построим синтез экстремалей Понтрягина.

Исследуем сначала наиболее интересный случай, когда переключение происходит с регулярных траекторий, соответствующих управлению $u = -1$. Допустим, что переключение на особый участок произошло в момент времени t^* в точке D с координатами $(-z, z)$, где $0 \leq z \leq 1$. Рассмотрим движение по оптимальной кривой в обратном времени, начиная из точки D. В точке D выполнены равенства $\psi_2(t^*) = 0$, $\psi_1(t^*) = -(x_1 - x_2) = 2z$.

Обозначив обратное время $\tau = t^* - t$, из сопряженной системы получим

$$\begin{array}{l}\dot{\psi}_1 = x_1 - x_2\\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 - x_1 + x_2\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\dfrac{d}{d\tau}\psi_1 = x_2 - x_1\\ \dfrac{d}{d\tau}\psi_2 = \psi_1 + x_1 - x_2\end{array} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{d}{dx_2}\psi_1 = x_2 - x_1\\ \dfrac{d}{dx_2}\psi_2 = \psi_1 + x_1 - x_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{d}{dx_2}\psi_1 = x_2 + \dfrac{x_2^2}{2} + z - \dfrac{z^2}{2}\\ \dfrac{d}{dx_2}\psi_2 = \psi_1 - x_2 - \dfrac{x_2^2}{2} - z + \dfrac{z^2}{2}\end{cases} \tag{5.19}$$

Проинтегрировав (5.19), получим

$$\psi_2(x_2, z) = \frac{1}{24}\left(x_2 - z\right)^2\left(x_2^2 + 2zx_2 - 3(z-2)^2\right).$$

Уравнение $\psi_2(x_2, z) = 0$ имеет четыре корня: двойной корень $x_2 = z$, один отрицательный корень $-z - 2\sqrt{z^2 - 3z + 3}$ и корень $x_2^* = -z + 2\sqrt{z^2 - 3z + 3}$. Зависимости $\psi_2(x_2, z)$ при некоторых значениях z показаны на рис. 5.2.

Движение по параболе с $u = -1$ возможно только при $\psi_2 < 0$, следовательно только на интервале $[z, x_2^*]$.

Точка $P(-\frac{x_2^{*2}}{2} + \frac{z^2}{2} - z, y*)$ будет второй точкой переключения — с траектории, где $u = 1$ на траекторию с $u = -1$.

Таким образом, на оптимальной траектории будут либо две точки переключения, либо одна. Кривая переключения в верхней полуплоскости состоит из трех участков: кривая $\mathcal{L}_1$ — кусок параболы

Рис. 5.2. Поведение сопряженной переменной ψ_2

Рис. 5.3. Синтез экстремалей Понтрягина

$x_1 = -\frac{x_2^2}{2}$ до точки $B = (-6, \sqrt{12})$ (рис. 4). Второй кусок — кривая $\mathcal{L}_2 = \quad -\frac{x_2^{*2}}{2} - z + \frac{z^2}{2}, y^*$ от точки B до точки A не совпадает ни с какой траекторией системы. Третий кусок $\mathcal{L}$ — участок особой траектории — прямая $x_1 = -x_2$ от точки A до начала координат O (рис. 5.2).

В нижней полуплоскости картина синтеза симметрична.

Задача Годдарда

Рассмотрим задачу о строго вертикальном полете метеорологической ракеты. Уравнения, описывающие движение центра масс, можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ m\dot{v} = -mg - Q + P, \\ \dot{m} = -u, \qquad 0 \le u \le \mu, \end{cases}$$

где m — масса ракеты с топливом, v — скорость движения, g — ускорение свободного падения, $P = \gamma u$ — реактивная тяга ракеты, $\gamma = \text{const}$ — относительная скорость истечения частиц топлива, $Q = \frac{\varrho v^2}{2} S c_x^0 = kv^2$ — сопротивление воздуха.

Обозначим $y_1 = h$, $y_2 = v$, $y_3 = m$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = -g - \dfrac{Q}{y_3} + \dfrac{\gamma u}{y_3}, & y_2(0) = 0, \\ \dot{y}_3 = -u, & y_3(0) = m_0. \end{cases}$$

Ограничения на управление следующие: $0 \le u \le \mu = \text{const} > 0$.

Рассмотрим задачу подъема на максимальную высоту в момент выгорания всего топлива. Пусть m_1 — масса собственно ракеты. Тогда терминальное многообразие имеет вид $y(t_k) \in M = \{y_3 = m_1 < m_0\}$, а экстремальная задача — вид

$$y_1(t_k) \to \max_{0 \le u \le \mu}, \qquad \varphi_0 = -y_1(t_k).$$

Выпишем функцию Понтрягина

$$H = \psi_1 y_2 + \psi_2 \;\; -g - \frac{Q}{y_3} + \frac{\gamma u}{y_3} \;\; + \psi_3(-u),$$

и сопряженную систему:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \dfrac{1}{y_3}\dfrac{\partial Q}{\partial y_2}\psi_2 \\ \dot{\psi}_3 = \psi_2 \;\; -\dfrac{Q}{y_3^2} + \dfrac{\gamma u}{y_3^2} \end{cases}$$

Касательную плоскость к многообразию M можно представить в виде $\{\gamma_1, \gamma_2, 0\}$, где γ_1, γ_2 — произвольные числа.

Из условий трансверсальности следует

$$(\psi_1(t_k^0) - \lambda_0)\gamma_1 + \psi_2(t_k^0)\gamma_2 = 0,$$

откуда $\psi_1 = \lambda_0 = \text{const} \ge 0$, а $\psi_2(t_k^0) = 0$.

Докажем, что $\lambda_0 \ne 0$. Допустим противное, т.е. $\lambda_0 = 0$. Тогда $\psi_1(t_k^0) = \psi_2(t_k^0) = 0$. Из условия равенства нулю гамильтониана следует $H(t_k^0) = \psi_3(t_k^0)u^0(t_k^0) = 0$. Представим функцию Понтрягина в виде

$$H = y_2 - \psi_2 \;\; g + \frac{Q(y_2)}{y_3} \;\; + \;\; \frac{\psi_2\gamma}{y_3} - \psi_3 \;\; u = H_0 + H_1 u.$$

Допустим, что есть интервал $\Delta = (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}) \subset [t_0, t_k]$, где $H_1(t) \equiv 0$ и реализуется режим особого управления. Из условия максимума функции Понтрягина следует вид оптимального управления

$$u^0(t) = \begin{cases} \mu & \text{при } H_1(\psi, y) > 0 \\ 0 & \text{при } H_1(\psi, y) < 0 \end{cases}, \qquad t \notin (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}).$$

Поскольку условие остановки определяет первый момент, когда достигается $y_3(t_k) = m_1$, то в левой окрестности t_k^0 функция $y_3(t)$ должна убывать. Если в левой окрестности t_k^0 реализуется особый режим, то особое управление удовлетворяет условиям $0 < u^{\text{ос}} < \mu$ и это условие выполнено. В регулярном случае в силу линейной зависимости функции Потрягина от управления оптимальные значения управления принимаются на концах отрезка $[0, \mu]$ и в этом случае должно выполняться условие $u^0(t) = \mu > 0$. Следовательно во всех случаях выполнено неравенство $u^0(t_k^0) > 0$. Но тогда $\psi_3(t_k^0) = 0$, и (λ_0, ψ) составляют нулевую пару, что противоречит ПМП. Поэтому $\lambda_0 \neq 0$, и нормируя ψ, получим $\psi_1 \equiv 1$.

Поскольку стартуем с нулевой скоростью, то из физических соображений (тяга больше веса) следует неравенство $\gamma\mu > gm_0$.

Сопряженная система (при $\psi_1 \equiv 1$) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2 = -1 + \dfrac{\psi_2}{y_3} \dfrac{\partial Q}{\partial y_2}, \qquad \psi_2(t_k^0) = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \dfrac{\psi_2}{y_3^2} \;\; \gamma u - Q \end{cases}$$

На особом участке $t \in (\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}})$ определить оптимальное управление из ПМП нельзя. Найдем производную в силу системы

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{\dot{\psi}_2 \gamma}{y_3} - \frac{\dot{y}_3 \psi_2 \gamma}{y_3^2} - \dot{\psi}_3 =$$

$$= \;\; -1 + \frac{\psi_2}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2} \;\; \frac{\gamma}{y_3} + \frac{u \psi_2 \gamma}{y_3^2} + \psi_2 \;\; \frac{Q - \gamma u}{y_3^2} \;\; = \frac{\gamma}{y_3} \;\; \frac{\partial Q}{\partial y_2} \frac{\psi_2}{y_3} - 1 \;\; + \frac{Q \psi_2}{y_3^2} =$$

$$= y_3^{-2} \;\; \gamma \;\; \frac{\partial Q}{\partial y_2} \psi_2 - y_3 \;\; + Q \psi_2 \;\; \equiv 0 \tag{5.20}$$

Поскольку $y_3(t) > 0$ на особом участке, то квадратная скобка в последнем выражении равна нулю. Найдем теперь вторую производную в силу системы, учитывая тождество (5.20):

$$\frac{d^2 H_1}{dt^2} = -\frac{2}{y_3^3} \underbrace{[\ \dots\ ]}_{=0} + \frac{1}{y_3^2} \;\; Q \;\; -1 + \frac{\psi_2}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2} \;\; + \gamma \;\; u + \frac{\partial Q}{\partial y_2} \;\; -1 + \frac{\psi_2}{y_3} \frac{\partial Q}{\partial y_2} \;\; +$$

$$+\psi_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2}\dot{y}_2 \quad = \frac{1}{y_3^2}\ \gamma u + \ Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2} \quad -1 + \frac{\partial Q}{\partial y_2}\frac{\psi_2}{y_3}\ +$$

$$+\ \psi_2\ \frac{\gamma u}{y_3} - \frac{Q}{y_3} - g \quad \frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2} \quad = \frac{\gamma}{y_3^2}\ 1 + \frac{\psi_2}{y_3}\ \frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2} \quad u +$$
$$+\ \frac{1}{y_3^2}\quad Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2} \quad -1 + \frac{\partial Q}{\partial y_2}\frac{\psi_2}{y_3}\ -$$
$$-\ \psi_2\ \frac{Q}{y_3} + g \ \cdot\ \frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2} \quad \equiv 0. \qquad (5.21)$$

Из уравнения (5.21) можно определить особое управления.

Для его оптимальности необходимо выполнение условия Келли

$$\frac{\partial}{\partial u}\quad \frac{d^2}{dt^2}H_1(t) \quad \geq 0, \qquad (5.22)$$

откуда следует необходимость выполнения неравенства

$$\frac{\gamma}{y_3^2}\ 1 + \frac{\psi_2}{y_3}\ \frac{\partial Q}{\partial y_2} + \gamma\frac{\partial^2 Q}{\partial y_2^2} \quad \geq 0. \qquad (5.23)$$

Покажем, что оно выполнено. Для этого надо выяснить знак ψ_2, так как в нашем случае $Q = ky_2^2$, где $k > 0$ и, следовательно, круглая скобка в левой части неравенства положительна.

На оптимальной траектории гамильтониан $\mathcal{H}(t) \equiv 0$, откуда на особом участке выполняется тождество $H_0(t) \equiv 0$ (так как $H_1(t) \equiv 0$). Но тогда $y_2 \equiv \psi_2\ \frac{Q}{y_3} + g$, откуда следует неравенство

$$\psi_2 = \frac{y_2}{\frac{Q}{y_3} + g} > 0.$$

Из условия (5.20) следует $\gamma y_3 \equiv \psi_2\ Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2}$, откуда получим

$$\gamma y_3\ \frac{Q}{y_3} + g \ = y_2\ Q + \gamma\frac{\partial Q}{\partial y_2} \qquad (5.24)$$

уравнение особой поверхности.

Подставляя в (5.24) выражение $Q = ky_2^2$, получим уравнение особого участка

$$gy_3 = \frac{k}{\gamma}(y_2^3 + \gamma y_2^2). \qquad (5.25)$$

В свою очередь (5.21) можно переписать в виде

$$\gamma\ gy_3 + 3ky_2^2 + 2k\gamma y_2\ u - ky_2\ ky_2^3 + gy_3(3y_2 + 4\gamma)\ \equiv 0. \qquad (5.26)$$

Рис. 5.4. Особая поверхность

Поскольку $y_2 \geq 0$, то в (5.26) квадратная скобка при u больше нуля, откуда следуют строгое неравенство Келли и оптимальность полученной особой траектории.

Из уравнения (5.26) вычислим особое управление

$$u^{oc} = \frac{1}{\gamma} \frac{ky_2 \;\; ky_2^3 + gy_3(3y_2 + 4\gamma)}{gy_3 + 3ky_2^2 + 2k\gamma y_2}. \tag{5.27}$$

В исходных переменных уравнение особого участка (5.25) имеет вид

$$m = k\frac{v^3 + \gamma v^2}{\gamma g}.$$

Соотношение (5.27) в исходных переменных можно переписать в виде

$$u^{oc} = \frac{1}{\gamma} \;\; kv^2 + mg - \frac{mgv(v + 2\gamma)}{v^2 + 4\gamma v + 2\gamma^2} \;\; =$$

$$= \frac{kv^2(v + 2\gamma)(3v + 2\gamma)}{\gamma(v^2 + 4\gamma v + 2\gamma^2)} \geq 0. \tag{5.28}$$

На рис.5.4 изображена проекция особой поверхности на плоскость (v, m).

В зависимости от начальных условий оптимальная траектория либо достигнет особой поверхности, либо нет. Если двигаемся по особому участку, то $u^0 = u^{oc}$. При этом нужно проверить:

а) сохранились ли ограничения на управление;

б) как склеивается регулярное и особое управление.

На рис.5.4 изображена кривая A, заданная уравнением $kv^2 + mg = \gamma\mu$, на которой $dv/dt = 0$ при максимальной тяге двигателя $u = \mu$. Эту кривую траектории системы пересекают с вертикальной касательной.

При движении по особой траектории $dv/dt < 0$. Для всех точек особого участка в области ниже кривой A (в этой области физически реализуется движение при старте с нулевой скоростью) выполнено неравенство $kv^2 + mg < \gamma\mu$. Тогда из формулы (5.28) следует

Рис. 5.5. Оптимальное управление ракетой

$$u^{oc} = \frac{1}{\gamma}\ \ kv^2 + mg - \frac{mgv(v+2\gamma)}{v^2+4\gamma v+2\gamma^2}\ \ \le \frac{1}{\gamma}(kv^2+mg) < \mu,$$

т.е. особое управление является допустимым. Зависимость оптимального управления u^0 от времени показана на рис.5.5.

В области выше особой поверхности выполнено неравенство $mg > k\frac{v^3+\gamma v^2}{\gamma}$ и тогда в точках переключения управления $H_1(\tau) = 0$ выполнено неравенство $\dot{H}_1(\tau) < 0$. Это означает, что в указанной области переключение оптимального управления может произойти только с большей величины на меньшую. Следовательно здесь $u^0(t) = \mu$ по крайней мере до достижения особой поверхности. Если оптимальная траектория пересекает особую поверхность, она попадает область ниже особой поверхности, где выполнено неравенство $\dot{H}_1(\tau) > 0$, следовательно оптимальное значение $u^0(t) = \mu$ должно сохраняться и невозможно оптимальным образом переключиться на значение $u^0(t) = 0$ при выгорании топлива.

Итак, в рассматриваемой области необходимые условия оптимальности определяют оптимальную траекторию единственным образом. Она состоит либо из дуги максимальной тяги (в случае, когда запас топлива недостаточен для достижения особой поверхности), ибо из дуги максимальной тяги и промежуточной (особой) тяги.

Задача о брахистохроне в сопротивляющейся среде

Рассмотрим задачу о быстрейшем спуске материальной точки, движущейся по кривой, расположенной в вертикальной плоскости.

При движении вдоль кривой на точку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости движения. Левый конец кривой находится в начале координат, а правый конец — на фиксированном расстоянии от начала координат (см. рис. 5.6). Требуется выбрать такую форму кривой, чтобы время спуска было наименьшим.

Уравнения движения точки в проекциях на оси скоростной системы координат следующие:

$$\begin{cases} M\dfrac{dV}{dT} = S(V) - Mg\sin\theta \\ MV\dfrac{d\theta}{dT} = -Mg\cos\theta + R \\ \dfrac{dH}{dT} = V\sin\theta \\ \dfrac{dL}{dT} = V\cos\theta \end{cases} \tag{5.29}$$

где M — масса точки, V — величина скорости, $P = -Mg$ — сила тяжести, $S(V) = -c_x V^2$ — сила сопротивления движению, $c_x = \mathrm{const}$ — известный коэффициент сопротивления движению, R — сила реакции связи.

Начальные условия заданы:

$$H(0) = 0, \quad L(0) = 0, \quad V(0) = V_0, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Форму кривой будем выбирать за счет выбора оптимальной зависимости силы реакции связи R, которую будем считать любой кусочно-непрерывной функцией $R(T)$, подчиняющейся ограничению $|R(T)| \leq R_m$, где R_m — заданная константа.

Рис. 5.6. Брахистохрона с трением

Краевые условия на правом конце траектории следующие: $\mathcal{M} = \{H(T_k) = L_k\}$, где T_k — момент прихода на многообразие $\mathcal{M}$. Решается задача быстродействия

$$T_k \to \min_{|R| \leq R_m}.$$

Проведем нормализацию и обезразмеривание системы (5.29), для чего введем характерную скорость движения V^* и характерное время движения, связанные соотношением $V^* = gT^*$. Пусть характерные величины горизонтальной и вертикальной координат следующие: $L^* = V^*T^*$ и $H^* = V^*T^*$. Введем безразмерные переменные t, v, x, y, m, u, где $T = tT^*$, $V = vV^*$, $H = yH^*$, $L = xL^*$, $M = mM^*$, $R = uR^*$. Баланс сил (при $c_x^* \approx 1$кг/м) приводит к соотношениям $M^*g = c_x^* V{*}^2 = R^*$.

В безразмерных переменных система (5.29) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{v} = -k_1 v^2 - \sin\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{ku - \cos\theta}{v} \end{cases} \tag{5.30}$$

где коэффициенты $k = 1/m$, $k_1 = c_x/(kc_x^*)$, а управление $|u| \le \mu = R_m/gM^*$. Выберем в качестве характерного значения $V^* = V_0 > 0$.

Начальные условия для системы (5.30) следующие: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $v(0) = 1$, $\theta(0) = \theta_0$. Краевое условие на правом конце: $x(t_k) = l_k > 0$.

Обозначим $z = t$ и формально добавим к системе (5.30) уравнение $\dot{z} = 1$. Тогда в расширенной системе функционал качества управления примет вид

$$\varphi_0 = z(t_k) \to \min_u .$$

Применим ПМП. Функция Понтрягина имеет вид

$$H = (\psi_1\cos\theta + \psi_2\sin\theta)v + \psi_3(-k_1v^2 - \sin\theta) + \frac{\psi_4}{v}(ku - \cos\theta) + \psi_5$$

Из физических соображений в задаче быстродействия на интервале $(0, t_k)$ выполнено условие $v > 0$. Условия трансверсальности приводят к условиям на правом конце траектории

$$\psi(t_k) + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp M$$

откуда $\psi_2(t_k) = 0$, $\psi_3(t_k) = 0$, $\psi_4(t_k) = 0$, $\psi_5(t_k) = -\lambda_0 \ge 0$.

Сопряженные переменные подчиняются уравнениям

$$\begin{cases} \dot\psi_1 = 0 \\ \dot\psi_2 = 0 \\ \dot\psi_3 = \psi_1\cos\theta - \psi_2\sin\theta + 2k_1 v\psi_3 + \dfrac{\psi_4}{v^2}(ku - \cos\theta) \\ \dot\psi_4 = v(\psi_1\sin\theta - \psi_2\cos\theta) + \psi_3\cos\theta - \dfrac{\psi_4\sin\theta}{v} \\ \dot\psi_5 = 0 \end{cases} \tag{5.31}$$

Из условий трансверсальности следует $\psi_2 = 0$. Нормируем $\psi_1 = 1$. Из условия $\mathcal{H}(t_k) = 0$ следует $\cos\theta(t_k)v(t_k) = \lambda_0$.

На оптимальной траектории гамильтониан

$$\mathcal{H} = \cos\theta v + \psi_3(-k_1 v^2 - \sin\theta) + \frac{\psi_4}{v}(ku - \cos\theta) - \lambda_0 = H_0 + H_1 u \equiv 0.$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u^0 = \begin{cases} \mu \text{ при } H_1 > 0 \\ -\mu \text{ при } H_1 < 0 \\ u^{\text{ос}} \text{ при } H_1 \equiv 0 \end{cases} \tag{5.32}$$

где $H_1 = \frac{k\psi_4}{v}$. Поскольку $k, v > 0$, все зависит от поведения ψ_4.

Найдем особое управление. На особом участке $H_1 \equiv 0$, откуда $\psi_4(t) \equiv 0$ при $t \in [t't"]$. На особом участке также $\dot H_1 \equiv 0$, откуда следует $\dot\psi_4 \equiv 0$ и $\psi_3\cos\theta + v\sin\theta \equiv 0$, откуда $\psi_3 = -v\,\mathrm{tg}\,\theta$.

Временно предположим, что ограничений на управление нет: $\mu = \infty$, тогда на всей оптимальной траектории будет особый режим. На правом конце выполнено $\psi_3(t_k) = 0$, потому $\mathrm{tg}(\theta_k) = 0$, откуда следует $\theta_k = 0$ (при $|\theta| \le \frac{\pi}{2}$).

Из условия $H(t') = 0$ получим соотношение

$$\lambda_0 = v'\cos\theta' + k_1 v'^3\tan\theta' + v'\sin\theta'\tan\theta' = v_k\cos\theta_k = v_k,$$

где v', θ' — скорость и угол наклона в момент прихода на особую траекторию. При отсутствии ограничений на реакцию связи это соотношение связывает конечную скорость колечка с начальным углом θ_0 ($v_0 = 1$).

На особой траектории выполнено $\ddot H_1 \equiv 0$, откуда

$$\frac{k}{v}\ \sin\theta\dot v + v\cos\theta\dot\theta + \dot\psi_3\cos\theta - \psi_3\sin\theta\dot\theta\ = a(\psi, \overline{x})u + b(\psi, \overline{x}) \equiv 0,$$

где введены обозначения

$$\overline{x} = (v, \theta), \quad a(\psi, x) = k(\cos\theta - \psi_3 \frac{\sin\theta}{v}) = k(\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}) = \frac{k}{\cos\theta}.$$

Следовательно, условие оптимальности Келли выполнено при $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$.

Преобразуем

$$b(\psi, \overline{x}) = -\sin^2\theta - k_1 v^3 \sin\theta - \cos^2\theta - \cos^2\theta - 2k_1 v^2 \sin\theta - \sin^2\theta =$$
$$= -2 - 3k_1 v^2 \sin\theta.$$

Особое управление примет вид

$$u^{\text{ос}} = \frac{(2 + 3k_1 \sin\theta v^2)\cos\theta}{k}.$$

Подставив это решение в систему уравнений (5.30) и выпишем уравнения, которым подчиняются особые кривые на плоскости параметров (θ, v):

$$\begin{cases} \dot{v} = -k_1 v^2 - \sin\theta \\ \dot{\theta} = \dfrac{(1 + 3k_1 v^2 \sin\theta)\cos\theta}{v} \end{cases} \tag{5.33}$$

Система интегрируется на отрезке времени $[0, t_k^0]$, который определяется из краевых условий (при $\mu = \infty$ $v' = v_0$) для этой системы:

$$v(t_k^0) = v_k = \cos\theta' + \tan\theta'(1 + \sin\theta')$$

При этом выполнены условия

$$l_k = \int_0^{t_k^0} v(t)\cos\theta(t)dt, \qquad v_k - 1 = -\int_0^{t_k^0} (k_1 v^2 + \sin\theta)dt$$

Следовательно, при заданном l_k оптимальная траектория мгновенно перескакивает из положения $(\theta_0, 1)$ в точку $(\theta', 1)$, что соответствует оптимальному регулярному движению, а далее движение до конечного момента осуществляется по особой кривой.

Система (5.33) при $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ имеет 2 особых точки (θ_c, v_c)

$$A = \quad -\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}k_1}}\Bigg) \qquad B = \quad -\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{1}{k_1}}\Bigg)$$

Точка A представляет собой особую точку типа седла, а точка B — узел.

Рис. 5.7. Фазовый портрет

Рассмотрим движение в окрестности точки А. При $k_1 = 1$ линеаризованные уравнения в отклонениях имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta\dot{v} = -\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}\Delta v - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\Delta\theta \\ \Delta\dot{\theta} = -2\sqrt{2}\Delta v + \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}\Delta\theta \end{cases} \tag{5.34}$$

Собственному значению $\lambda_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$ соответствует собственный вектор $(\frac{3^{3/4}(1+\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}, 1)$, а значению $\lambda_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$ — вектор $(-\frac{3^{3/4}(-1+\sqrt{2})}{3\sqrt{2}}, 1)$.

На рис. 5.7 представлена картина фазовых кривых на плоскости (θ, v) при $k_1 = 1$. Жирным линиям соответствуют сепаратрисы особых экстремалей.

Оптимальная траектория состоит из куска регулярной кривой ($u = \pm\mu$ при $t \in [0, t']$), где θ меняется от θ_0 до θ', а v — от 1 до v' и куска особой кривой — от точки (θ', v') до $(0, v_k)$.

На рис. 5.8 а) показаны зависимости скорости, угла наклона траектории, а также оптимального управления от времени, соответствующие случаю $\theta_0 = 0$, $l_k = 0,45$, $k = k1 = 1$, $\mu = 2$.

При заданном θ_0 численный поиск значения θ' и t' при больших l_k затруднен, поскольку решение очень чувствительно к изменению этих параметров.

График зависимости $l_k(t')$ от момента переключения на особый участок t' и соответствующее этому движению оптимальное время а) б)

Рис. 5.8.

t_k для различны значений начального угла θ_0 показан на рис. 5.8 б).

Учащающиеся переключения

Вопрос о сопряжении регулярного и особого участков оптимальной траектории остается недостаточно изученным. Большинство результатов относится к случаю кусочно-непрерывных или даже кусочно-аналитических управлений в окрестности точки сопряжения. Первый пример задачи, в которой сопряжение регулярного и особого участков происходит с бесконечным числом переключений на конечном отрезке времени принадлежит А.Т.Фуллеру. При этом точки переключения накапливаются к точке сопряжения регулярного участка с особым, возникает так называемый четеринг-режим оптимального управления.

При $q = 1$ сопряжение участков особого и неособого управления осуществляется с помощью конечного числа переключений неособого оптимального управления.

При четном q оптимальное управление на неособом участке не может быть кусочно–непрерывным. Разрывы управления (точки переключения) сгущаются к точке сопряжения с особым участком и оптимальное управление оказывается измеримой по Лебегу функцией со счетным множеством точек разрыва. Известны примеры сопряжения с бесконечным числом переключений и для особого участка нечетного порядка, большего единицы [13].

Задачи 5.61 - 5.62 являются примерами задач оптимального управления, в которых сопряжение регулярных и особых участков может происходить с помощью четеринг-режимов [13], хотя исследование таких режимов выходит за рамки этого сборника.

Оптимальная стабилизация при неограниченных ресурсах

Рассмотрим движение линейной управляемой на фиксированном отрезке времени $t \in [t_0, t_k]$, $t_0 < t_k \leq \infty$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(t_0) = a \neq 0$$

при функционале качества

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} (x^\top Gx + u^\top Nu)dt + x(t_k)^\top Fx(t_k) \to \min_{u(\cdot)}$$

Здесь $G = G^\top \geq 0$, $N = N^\top > 0$, $F = F^\top \geq 0$ — известные симметричные матрицы, т.е. поставлена задача минимизации отклонений и ресурсов управления.

Можно показать [1], что оптимальное решение этой задачи имеет вид линейной обратной связи $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}x$, где симметричная и неотрицательная матрица $\mathcal{L}$ является решением матричного уравнения Риккати

$$\dot{\mathcal{L}} + \mathcal{L}A + A^\top \mathcal{L} + G - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L} = 0, \qquad \mathcal{L}(t_k) = F. \qquad (5.35)$$

Заметим, что краевое условие этого уравнения задано на правом конце $t = t_k$.

Таким образом, осуществлен оптимальный синтез системы стабилизации, так как функционал качества является строго выпуклым и управляемая система линейна.

Рассмотрим случай, когда система стационарна, а время управления бесконечно, т.е. $t_0 = 0$, $t_k = \infty$, $A, B, G, N = \mathrm{const}$. В этом случае, вообще говоря, может быть $J(u) \to \infty$.

Добавим условие управляемости пары матриц (A, B)

$$\mathrm{rank}\ [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n, \qquad A, B = \mathrm{const}.$$

Тогда управляемая система стабилизируема, следовательно, существуют управления $u = Kx$ такие, что $|x(t)| \leq Ce^{-\lambda t}$ и функционал $J(u)$ конечен. Следовательно, поставленная задача имеет смысл и верна следующая теорема [12]:

Теорема 1 *Если система управляема и наблюдаема пара матриц (A, C), где матрица C — квадратный корень из матрицы $G = CC^\top$, то существует симметричная матрица $\mathcal{L}_0 \geq 0$ такая, что*

а) решение уравнения Риккати для конечных t_k $\lim\limits_{t_k \to \infty} \mathcal{L}(0) = \mathcal{L}_0 \geq 0$ при любых $F \geq 0$;

б) матрица $\mathcal{L}_0$ является единственным решением алгебраического уравнения Риккати

$$\mathcal{L}_0 A + A^\top \mathcal{L}_0 + G - \mathcal{L}_0 B N^{-1} B^\top \mathcal{L}_0 = 0; \tag{5.36}$$

в) матрица $A - BN^{-1}B^\top \mathcal{L}_0$ гурвицева;

в) управление $u^0 = -N^{-1}B^\top \mathcal{L}_0 x$ является оптимальным, а оптимальное значение функционала равно $J(u^0) = x(0)^\top \mathcal{L}_0 x(0)$.

Совместная задача оценивания и управления стохастической системой

Рассмотрим теперь случай, когда нет полной информации о состоянии стохастической системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + q, \\ z &= Hx + r. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Здесь q — белый шум с интенсивностью $M[q(t)q^T(\tau)] = Q\delta(t-\tau)$, r — белый шум с интенсивностью $M[r(t)r^T(\tau)] = R\delta(t-\tau)$, $M[x(0)r^T(s)] = 0$, $M[q(t)r^T(s)] = 0$, $M[x(0)q^T(s)] = 0$.

В рассматриваемом случае управление надо формировать по оценке $u = K\tilde{x}$, где коэффициенты обратной связи выбираются таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = M \quad \int_{t_0}^{t_k} (x^\top G x + u^\top N u) dt + x(t_k)^\top F x(t_K) \quad \to \min_{u(\cdot)} \tag{5.38}$$

Оценка и управление в рассматриваемой задаче связаны. Управление влияет на оценку и наоборот. Тот факт, что эти задачи можно разделить, составляет содержание теоремы разделения.

Пусть $\tilde{x}$ — оптимальная оценка координат x, доставляемая линейным оценивателем вида

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + \tilde{K}(z - H\tilde{x}), \\ \tilde{K} &= PH^\top R^{-1}, \\ \dot{P} &= AP + PA^\top + Q - \tilde{K}R\tilde{K}^\top, \qquad P(0) = P^0. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Здесь $P = M[\Delta x(t) \Delta x(t)^\top]$, $\Delta x = x - \tilde{x}$ — ошибка оценки. Как следует из сформулированной ниже теоремы разделения [12], задачу выбора коэффициентов обратной связи регулятора и оценивателя можно решать раздельно.

Теорема 2 *Для задачи о стохастическом регуляторе с неполными наблюдениями оптимальным является управление $u^0 = -N^{-1}B^T\mathcal{L}\tilde{x}$, где $\mathcal{L}$ — решение уравнения Риккати (5.35), а $\tilde{x}$ — линейная оценка по измерению $z(\tau)$, $\tau \in [0,t]$ с минимальной среднеквадратичной ошибкой, определяемая фильтром Калмана (5.39).*

Рассмотрим теперь случай стационарной системы при бесконечном времени стабилизации. В этом случае, вообще говоря, оптимальное значение функционала (5.38) бесконечно, т.е. $J(u) \to \infty$ при $t_k \to \infty$. Поэтому в данной задаче будем минимизировать среднюю цену за единицу времени, т.е

$$J(u) \quad = \quad \lim_{t_k\to\infty} \frac{1}{t_k} M[\int_0^{t_k} (x^\top Gx \; + \; u^\top Nu)dt] \quad \to \quad \min_{u(\cdot)}. \qquad (5.40)$$

Эквивалентный критерий имеет вид

$$J(u) \quad = \quad \lim_{t_k\to\infty} M \;\; x^\top Gx \;\; + \;\; u^\top Nu \quad \to \quad \min_{u(\cdot)}. \qquad (5.41)$$

Дополнительные материалы по данной главе можно найти в источниках [1, 2, 7, 15, 13, 8, 4, 12, 10].

5.1. Задачи быстродействия

Задача 5.1. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию управляемой системы $\dot{x} = u$, $|u(t)| \leq A$ в задаче быстрейшего перехода из состояния $x(0) = a$ в состояние $x(t_k) = b$.

Задача 5.2. Перевести управляемую систему $\dot{x} - x = u$, $|u(t)| \leq 1$ из состояния $x(0) \neq 0$ в состояние $x(t_k) = 0$ за минимальное время t_k. Выписать оптимальную траекторию.

Задача 5.3. Построить синтез оптимального управления (т.е. найти его в виде функции текущего состояния) для системы $\ddot{x} = u$ в задаче перехода из начального состояния $x^2(0) + \dot{x}^2(0) \neq 0$ в начало координат за минимальное время t_k при следующих вариантах ограничений на управляющую функцию:

а) $|u(t)| \leq 1$ б) $0 \leq u(t) \leq 1$.

Задача 5.4. Построить синтез экстремалей Понтрягина в задаче быстрейшего перехода из произвольного начального состояния на терминальное многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k))^\top \in \mathcal{M}$, заданное уравнениями

а) $\mathcal{M} = \{x = 0\}$; б) $\mathcal{M} = \{\dot{x} = 0\}$.

Движение управляемой системы подчиняется условиям $\ddot{x} = u$, $|u(t)| \le 1$.

Задача 5.5. Осуществить оптимальный по быстродействию синтез для системы $\ddot{x} = u$, $|u(t)| \le 1$ в задаче перехода из начального состояния $x^2(0) + \dot{x}^2(0) > R^2$ $(R > 1)$ на терминальное многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k))^\top \in \mathcal{M} = \{x^2 + \dot{x}^2 = R^2\}$. Укажите те точки терминальной окружности, которые достигаются оптимальными траекториями. Проверьте условия регулярного синтеза по Болтянскому.

Задача 5.6. Осуществить синтез управления в задаче оптимального по времени перехода из начального состояния $x^2(0) + R^2\dot{x}^2(0) > R^2$ $(R \le 1)$ на многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k))^\top \in \mathcal{M} = \{x^2 + R^2\dot{x}^2 = R^2\}$ для управляемой системы $\ddot{x} = u$, $|u(t)| \le 1$. Укажите точки терминального множества, которые достигаются оптимальными траекториями. Проверьте условия регулярного синтеза по Болтянскому. Рассмотрите предельное решение задачи при $R \to \infty$.

Задача 5.7. Осуществить оптимальный по быстродействию синтез в задаче перехода в начало координат для следующих управляемых систем:

а) $\ddot{x} + x = u$ б) $\ddot{x} - x = u$

в) $\ddot{x} + \dot{x} = u$ г) $\ddot{x} - \dot{x} = u$.

Ограничения на управляющую функцию $|u(t)| \le 1$. Определите начальные точки на фазовой плоскости, для которых существует решение задачи.

Задача 5.8. Построить синтез экстремалей Понтрягина управления в задаче быстрейшего перевода системы $\ddot{x} + x = u$, $|u(t)| \le 1$ на терминальное многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k))^\top \in \mathcal{M} = \{x^2 + \dot{x}^2 = R^2\}$.

Проверить условия регулярного синтеза по Болтянскому.

Задача 5.9. Построить синтез оптимального управления в задаче быстрейшего перевода системы $\ddot{x} - x = u$ из состояния $x^2(0) + \dot{x}^2(0) > R^2$ $(R < 1)$ на многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k))^\top \in \mathcal{M} = \{x^2 + \dot{x}^2 = R^2\}$ при следующих ограничениях на управление

а) $|u(t)| \le 1$ б) $0 \le u(t) \le 1$.

Задача 5.10. Построить синтез оптимального по быстродействию управления для системы $\ddot{x} = u$, $|u(t)| \le 1$ в задаче прихода из произвольного начального состояния на терминальное многообразие $(x(t_k), \dot{x}(t_k))^\top \in \mathcal{M}$, где

а) $\mathcal{M} = \{x - \dot{x} = 0\}$ б) $\mathcal{M} = \{x = \dot{x}^2\}$.

Задача 5.11. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче: перевести систему $\ddot{x} + ux = 0$, где $1 \leq u(t) \leq 4$, из положения $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ в положение $\dot{x}(t_k) = 0$ за минимальное время t_k.

Задача 5.12. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче быстрейшего перехода системы $\ddot{x} + ux = 0$, $1 \leq u(t) \leq 4$ из положения $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ в положение $\dot{x}(t_k) = 0$ за минимальное время t_k.

Задача 5.13. Переведите систему $\ddot{x} + ux = 0$, где $1 \leq u(t) \leq 4$, из положения $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ в положение $\dot{x}(t_k) = 0$ за максимальное время t_k.

5.2. Задачи оптимизации с подвижным правым концом траектории

Задача 5.14. Решить задачу о максимальном отклонении на «полупериоде» колебательной системы $\ddot{x} + ux = 0$, $0 < u_{\min} \le u \le u_{\max}$, где $u_{\min}$, $u_{\max}$ — заданные константы. Начальные условия $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, а условие на правом конце имеет вид $\dot{x}(t_k) = 0$. Минимизируемый функционал характеризует максимально возможную амплитуду колебаний в системе: $J = x(t_k) \to \min_{u(\cdot)}$. Определить оптимальное управление и оптимальную траекторию.

Задача 5.15.

Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче: $J = \dot{x}(t_k) \to \min_{u(\cdot)}$ для системы $\ddot{x} + ux = 0$ при ограничениях $0 < u_{\min} \le u \le u_{\max}$ и при условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $x(t_k) = 0$.

Задача 5.16.

Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче

$$J = -\frac{1}{2}(x(t_k)^2 + \dot{x}(t_k)^2) \to \min_{u(\cdot)}$$

для управляемой системы $\ddot{x} + x = u$ при ограничениях $|u| \le 1$ с начальными условиями $x(0) = 3$, $\dot{x}(0) = 0$ и условиями на правом конце траектории:

а) $\dot{x}(t_k) = 0$, б) $t_k = \pi$.

Задача 5.17. Для управляемой системы $\dot{x} = u$, $|u| \le 1$, $x(0) \ne 0$ минимизировать функционал качества управления

а) $J = \int\limits_0^T \frac{x^2}{2}\, dt$, б) $J = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x^2 + u^2)\, dt$

при фиксированном T.

Задача 5.18. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче

$$J = -\frac{1}{2}(x(t_k)^2 + \dot{x}(t_k)^2) \to \min_{u(\cdot)}$$

для системы $\dot{x} = u$, $|u| \le 1$ с начальным состоянием $x(0) = 0$ и конечным состоянием $x(1) = 1$.

Задача 5.19. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче $J = x(t_k) \to \min_{u(\cdot)}$ для системы $\ddot{x} = u$, $|u| \le 1$ с начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ и терминальным условием $\dot{x}(1) = 0$.

Задача 5.20. Найти оптимальное управление, оптимальную траекторию в задаче перехода системы $\ddot{x} + x = u$ из состояния

$x(0) = \dot{x}(0) = 0$ в состояние $x(\frac{\pi}{2}) = a$ по критерию минимума функционала

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} u^2 dt.$$

Задача 5.21. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t_k} u^2 dt \to \min_u$$

для управляемой системы $\ddot{x} = u$ с нулевыми начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ и конечным состоянием

а) $x(t_k) = 1$, $\dot{x}(t_k) = 1$, б) $x(t_k) = 1$, $\dot{x}(t_k) = 2$,

в) $x(t_k) = 6$, $\dot{x}(t_k) = 3$, г) $x(t_k) = 6$, $\dot{x}(t_k) = 3$.

Задача 5.22. Задана линейная динамическая система $\dot{x} = Ax + Bu$. Найти на заданном интервале $[t_0, t_k]$ управление $u^0(t)$, переводящее систему из нулевого состояния $x(t_0) = 0$ в состояние $x(t_k) = \xi$ с минимальными энергетическими затратами

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)u(t)\,dt \to \min_u.$$

Задача 5.23. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче:

$$J = \int\limits_0^2 (x + \dot{x})\,dt \to \min_{u(\cdot)}, \qquad |u| \le 1.$$

Управляемая система задана уравнением $\ddot{x} = u$ с начальными условиями $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ и условием на правом конце $\dot{x}(2) = 0$.

Задача 5.24. Найти оптимальное управление и оптимальную траекторию в задаче: $J = -x(t_k) \to \min_{u(\cdot)}$ для управляемой системы $\ddot{x} + x = u$, $|u| \le 1$ со следующими начальными и конечными условиями:

а) $x(0) = -2$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(t_k) = 0$;

б) $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(t_k) = 0$;

в) $x(0) = -2$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{x}(\pi) = 0$;

Задача 5.25. Постройте синтез оптимального управления в задаче

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \le 1, \qquad J = \int_0^{t_1} \quad 1 + \frac{3}{4}|u| \quad dt \to \min_u,$$

$$\dot{x}^2(0) + x^2(0) \ne 0, \qquad \dot{x}(t_k) = x(t_k) = 0.$$

Задача 5.26. Постройте синтез оптимального управления в задаче

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \le 1, \qquad J = \int_0^{t_k} \quad 1 + \frac{1}{2}u^2 \quad dt \to \min_u,$$

$$\dot{x}^2(0) + x^2(0) \ne 0, \qquad \dot{x}(t_k) = x(t_k) = 0.$$

Задача 5.27. Найти решение задач вариационного исчисления, используя уравнения Эйлера:

а) $\int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)\, dx - x^2(1) \to \min. \qquad x(0) = 1.$

б) $\int\limits_0^1 x^2 \dot{x}^2\, dx + x^2(1) \to \min. \qquad x(0) = 1.$

в) $\int\limits_0^T (\dot{x}^2 - +x)\, dx \to \min. \qquad x(0) = 0, \quad x(T) = 2.$

г) $\int\limits_0^1 (t^2 x - \dot{x}^2)\, dx \to \max. \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$

Задача 5.28. Решить задачи вариационного исчисления, используя необходимые условия оптимальности в лагранжевой и гамильтоновой формах. Провести сравнение.

а) $\int\limits_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x)\, dx \to \min. \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2)\, dx \to \max, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = 1.$

в) $\int\limits_0^T (\ddot{x}^2 + \dot{x}^2)\, dx \to \min, \; x(0) = 0, \; \dot{x}(0) = 0, \; x(T) = 2, \; \dot{x}(T) = 1.$

Задача 5.29. *Подъем ракеты в безвоздушном пространстве.* Рассмотрим задачу о вертикальном подъеме ракеты с ограниченным количеством топлива на максимальную высоту в предположении, что силой сопротивления среды можно пренебречь. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \dfrac{P}{m} - g, \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}. \end{cases}$$

Начальные и конечные условия заданы в виде $v(0) = v_0$, $h(0) = h_0$, $m(0) = m_0$, $v(t_k) = 0$, $m(t_k) = m_T$. Обозначения имеют тот же смысл, что и в задаче 1.7. В качестве управления рассматривается сила тяги двигателя $P(t)$, на которую наложены ограничения вида $0 \le P(t) \le \bar{P}$. Целью управления является минимизация функционала $G = -h(t_k)$, где t_k — время окончания процесса, определяемое из условия $v(t_k) = 0$.

Для данной задачи запишите функцию Понтрягина, уравнения для сопряженных переменных и условия трансверсальности. Определите управление из условия максимума функции Понтрягина. Покажите, что оптимальная траектория не содержит особых участков, постройте синтез оптимального управления.

Задача 5.30. *Задача мягкой посадки в безвоздушном пространстве.* Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = -\dfrac{P}{m} + g, \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}. \end{cases}$$

Обозначения и ограничения на управление те же, что в задаче 5.29, ось h направлена вертикально вниз. Граничные условия имеют вид $v(0) = v_0$, $h(0) = h_0$, $m(0) = m_0$, $v(t_k) = 0$, $h(t_k) = 0$.

Целью управления является минимизация функционала $G = -m(t_k)$, где t_k — время окончания процесса, определяемое из условия $h(t_k) = 0$.

Для данной задачи запишите функцию Понтрягина, уравнения для сопряженных переменных и условия трансверсальности. Определите управление из условия максимума функции Понтрягина. Покажите, что оптимальная траектория не содержит особых участков, постройте синтез оптимального управления.

Задача 5.31. *Оптимальное программирование направления вектора тяги при пренебрежимо малых внешних силах.* Предположим, что ракета, рассматриваемая как материальная точка постоянной массы m, движется в вертикальной плоскости (x, y) под действием силы тяги $F = ma(t)$. Пусть в процессе движения масса ракеты меняется незначительно и ускорение силы тяжести пренебрежимо мало по сравнению с силой тяги. Реактивное ускорение $a(t)$ считается известной функцией времени, в простейшем случае — постоянной.

Движение ракеты описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v_x} = a\cos u, \\ \dot{v_y} = a\sin u, \end{cases}$$

где v_x, v_y — соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие скорости ракеты, $u = \theta(t)$ — угол между силой тяги и осью x, рассматриваемый в качестве управления. Целью управления является минимизация функционала, зависящего только от конечных условий или минимизация времени.

Выпишите функцию Понтрягина, уравнения относительно сопряженных переменных и условия трансверсальности. Из условия максимума функции Понтрягина по управлению получите, что оптимальное направление силы тяги выражается формулой

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Psi_4}{\Psi_3} = \frac{-c_2 t + c_4}{-c_1 t + c_3},$$

называемой законом дробно-линейного тангенса.

Задача 5.32. *Максимизация скорости ракеты в конце участка ее выведения на прямолинейную траекторию.* Рассмотрим математическую модель задачи 5.31. Задача состоит в том, чтобы за заданное время T перевести ракету на траекторию, параллельную оси Ox и отстоящую от нее на расстояние h так, чтобы в момент окончания процесса горизонтальная компонента скорости была максимальна. Краевые условия и минимизируемый функционал имеют вид

$$\begin{aligned} &v_x(0) = 0,\ v_y(0) = 0,\ x(0) = 0, \\ &y(0) = 0,\ y(T) = h,\ v_y(T) = 0, \\ &J = -v_x(T). \end{aligned}$$

а) Покажите, что с учетом краевых условий, полученный в задаче 5.31 закон дробно-линейного тангенса становится законом линейного тангенса и переписывается в виде $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 - ct$, где величины θ_0 и c определяются из двух граничных условий.

б) Полагая ускорение $a(t) = a = \text{const}$, проинтегрируйте дифференциальные уравнения движения при управлении по закону линейного тангенса, используя вместо независимой переменной t угол θ.

Задача 5.33. *Выведение на орбиту за минимальное время.* Рассмотрим математическую модель задачи 5.31. Требуется перевести точку на прямолинейную траекторию, параллельную оси x и отстоящую от нее на расстояние h. Время перехода должно быть минимальным, скорость точки в конце выведения должна равняться заданной величине U и быть параллельной оси абсцисс. Значение дальности в конце выведения свободно. Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned}&v_x(0) = 0,\ v_y(0) = 0,\ x(0) = 0,\\ &y(0) = 0,\ y(T) = h,\ v_y(T) = 0,\\ &v_x(T) = U.\end{aligned}$$

Покажите, что оптимальным законом управления является закон линейного тангенса.

Задача 5.34. *Минимальное время перехвата неманеврирующей цели.* В рамках математической модели задачи 5.31 рассмотрите задачу перевода точки из начального состояния $v_x(0) = v_{x0}, v_y(0) = v_{y0}, x(0) = x_0, y(0) = y_0$ в начало координат за минимальное время, полагая ускорение $a(t) = a = const$. В качестве управления рассмотрите угол θ. Краевые условия соответствуют задаче перехвата неманеврирующей цели, так как конечная скорость не задана.

Задача 5.35. *Минимальное время встречи с неманеврирующей целью.* В рамках задачи 5.31 рассмотрите задачу перевода точки из начального состояния $v_x(0) = v_{x0}, v_y(0) = v_{y0}, x(0) = x_0, y(0) = y_0$ в начало координат за минимальное время с дополнительными конечными условиями $v_x(T) = 0, v_y(T) = 0$, соответствующими задаче о встрече.

Задача 5.36. *Программирование направления тяги в постоянном гравитационном поле.* Рассмотрите задачу 5.31, заменив в системе уравнений движения четвертое уравнение на $\dot{v_y} = a\sin u - g$, где g — постоянное ускорение силы тяжести.

Примените к поставленной задаче принцип максимума Понтрягина. Покажите, что оптимальным законом изменения угла θ является закон дробно-линейного тангенса.

Задача 5.37. *Задача о полете на максимальную дальность в вертикальной плоскости.* Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases}\dot{x} = v\cos\theta,\\ \dot{y} = v\sin\theta,\\ \dot{v} = -g\sin\theta,\end{cases}$$

где обозначения соответствуют задаче 1.9, а угол наклона траектории θ рассматривается в качестве управляющей переменной.

Начальные условия имеют вид $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ v(0) = v_0$, правый конец свободен. Ставится задача максимизации горизонтальной дальности за заданное время, или минимизация функционала $J = -x(T)$.

а) Для поставленной задачи выпишите функцию Понтрягина, уравнения для сопряженных переменных, условия трансверсальности. Из условия максимума функции Понтрягина по управлению и уравнений для сопряженных переменных получите дифференциальное уравнение для управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности и сведите исходную задачу оптимального управления к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{g\cos\theta}{v}, \\ \dot{v} = -g\sin\theta, \end{cases}$$

$v(0) = v_0$, $\theta(T) = 0$. Постройте эскиз фазового портрета последней системы, сделайте выводы о качественном характере оптимальных траекторий.
б) Проинтегрируйте полученную систему для переменных v, θ, а затем и для переменных x, y.

Задача 5.38. *Задача о полете на максимальную дальность в вертикальной плоскости при наличии сопротивления среды.* Рассмотрим задачу 5.37 в предположении, что на точку дополнительно действует сила сопротивления среды, пропорциональная квадрату скорости. Запишем уравнения движения в безразмерном виде

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = -v^2 - \sin\theta. \end{cases}$$

Краевые условия и функционал соответствуют задаче 5.37.

Проведите анализ поставленной задачи по схеме, предложенной в пункте а) задачи 5.37, сведите исходную задачу оптимального управления к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\cos\theta}{v}(1 + 3v^2\sin\theta), \\ \dot{v} = -v\sin\theta, \end{cases}$$

$v(0) = v_0$, $\theta(T) = 0$. Найдите стационарные решения этой системы, запишите уравнения в отклонениях от стационарного решения, проанализируйте их устойчивость. Постройте эскиз фазового портрета, сделайте выводы о качественном характере оптимальных траекторий.

Задача 5.39. *Навигационная задача Цермело. Траектории минимального времени прохождения области, в которой вектор скорости зависит от координат.* Корабль движется в горизонтальной плоскости в области, где имеются течения. Величина и направление скорости течения задаются как функции фазовых переменных $U(x, y)$, $V(x, y)$, где x и y декартовы координаты, а U и V — компоненты вектора скорости течения в направлении осей x и y соответственно. Величина скорости корабля относительно воды постоянна и равна v. Требуется минимизировать время, необходимое для достижения заданной конечной точки посредством выбора угла между направлением скорости точки и осью абсцисс. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v\cos\theta + U(x, y),\\ \dot{y} &= v\sin\theta + V(x, y),\end{aligned}$$

где x и y — координаты корабля, θ — управление, угол курса, или угол между осью корабля и осью абсцисс.

Для задачи Цермело запишите соотношения принципа максимума Понтрягина. Из условия максимума функции Понтрягина по управлению получите соотношение $\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{\Psi_y}{\Psi_x}$, где Ψ_x и Ψ_y — сопряженные переменные, соответствующие исходным переменным x и y. Продифференцируйте данное соотношение по времени в силу исходной и сопряженной систем и исключите в результирующем выражении сопряженные переменные. Получите дифференциальное уравнение для управления, удовлетворяющего принципу максимума:

$$\dot{\theta} = U'_x \sin^2\theta + (U'_x - V'_y)\sin\theta\cos\theta - U'_y\cos^2\theta.$$

Рассмотрите случай постоянных скоростей течения и покажите, что тогда $\theta(t) = \mathrm{const}$, т.е. траектория движения с минимальным временем является прямолинейной.

Задача 5.40. *Траектории минимального времени прохождения области, в которой величина скорости зависит от фазовых координат.* Рассмотрим движение материальной точки в горизонтальной плоскости в области, в которой ее мгновенная скорость зависит от фазовых координат. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v(x, y)\cos\theta,\\ \dot{y} &= v(x, y)\sin\theta,\end{aligned}$$

где x и y — координаты точки, $v(x, y)$ — скорость точки, θ — управление, угол курса, или угол между вектором скорости точки и осью абсцисс. Целью управления является минимизация времени перевода точки из начального состояния $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ в конечное состояние $x(T) = y(T) = 0$.

Примените принцип максимума Понтрягина. Покажите, что вдоль оптимальной траектории угол $\theta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\theta} = V_x' \sin\theta - V_y' \cos\theta,$$

а в случае $V = \text{const}$ траекториями являются прямые линии.

Задача 5.41. *Траектории полета самолета в горизонтальной плоскости, ограничивающие максимальную площадь при наличии ветра (задача Чаплыгина).* Рассмотрим движение самолета в горизонтальной плоскости Oxy с постоянной скоростью v. На самолет действует ветер, постоянный по величине и направленный по оси абсцисс. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta - V, \\ \dot{y} &= v\sin\theta, \end{aligned}$$

где x и y — координаты самолета, v — скорость самолета, V — скорость ветра, θ — управление, угол между вектором скорости самолета и осью абсцисс. Найти такое управление, при котором самолет, начав движение из некоторой начальной точки, облетит за заданное время фигуру максимальной площади и вернется в эту же точку: $x(0) = x(T) = x_0$, $y(0) = y(T) = y_0$. Площадь, облетаемая самолетом, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\,dt,$$

поэтому минимизируемый функционал примем в виде

$$J = -S = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T (xv\sin\theta - y(v\cos\theta - V))\,dt.$$

Запишите необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Покажите, что в случае $V < v$ оптимальной траекторией движения является эллипс.

Задача 5.42.* *Задача оптимального уклонения от преследователя, наводящегося методом пропорциональной навигации.* Предположим, что преследователь и цель можно считать материальными точками, движущимися в плоскости; скорости точек постоянны по модулю, преследователь идеально реализует метод пропорционального наведения. В этих предположениях уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\alpha - b\cos\beta, \\ \dot{\beta} = \dfrac{-\sin\alpha + b\sin\beta}{rc}. \end{cases}$$

Здесь r — нормированное расстояние между преследователем и целью, β — угол между вектором скорости преследователя и линией визирования, α — угол между вектором скорости цели и линией визирования, рассматриваемый в качестве управления, b — константа, отношение скоростей преследователя и цели, $b > 1$, $c < 0$ — постоянная закона пропорционального наведения. Граничные условия заданы в виде:

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad r(T) = r_T, \quad r_T < r_0.$$

Целью управления является минимизация функционала $J = -T$ или максимизация времени перевода системы с начального расстояния на конечное, меньшее начального. Поставленную задачу будем называть задачей уклонения.

а) Для задачи оптимального уклонения выпишите функцию Понтрягина, уравнения относительно сопряженных переменных, условия трансверсальности и условие максимума функции Понтрягина по управлению. Далее, продифференцируйте уравнение, полученное из этого условия максимума по времени, в силу исходной и сопряженной систем, и, исключив сопряженные переменные, получите дифференциальное уравнение для управления $\alpha(t)$, решение которого удовлетворяет принципу максимума. В результате исходная задача оптимального управления сводится к следующей краевой задаче для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{r} = \cos\alpha - b\cos\beta, \\ \dot{\beta} = \dfrac{-\sin\alpha + b\sin\beta}{rc}, \\ \dot{\alpha} = \dfrac{-\sin\alpha + b\sin\beta}{r} - \dfrac{b(1-c)}{rc}\cos\alpha\sin(\alpha - \beta), \end{cases}$$

с граничными условиями $r(0) = r_0$, $\beta(0) = \beta_0$, $\alpha(T) = 0$, $r(T) = r_T, r_T < r_0$.

б) Для исследования полученной краевой задачи введите новую переменную $\varrho = \ln r$ и новое время $\tau = te^{-\varrho}$. Уравнение для ϱ отщепляется от системы уравнений для углов α, β. Найдите стационарные решения этой системы, проанализируйте их устойчивость. Постройте эскиз фазового портрета системы и сделайте заключение о качественном поведении оптимальных траекторий.

Задача 5.43.* *Задача оптимального отрыва от преследователя, наводящегося методом пропорциональной навигации.* Рассмотрим задание 5.42 в случае, когда скорость преследователя меньше скорости цели, $b < 1$. Тогда возможна постановка задачи оптимального отрыва, или минимизации времени перевода системы с начального расстояние на конечное, большее начального. Краевые условия и функционал имеют вид

$$r(0) = r_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad r(T) = r_T, \quad r_T > r_0.$$

Проведите исследование задачи оптимального отрыва по схеме, предложенной для задачи 5.42.

Задача 5.44. *Минимизация энергетических затрат при сближении спутника с орбитальной станцией при фиксированном законе изменения дальности.* Процесс относительного управляемого движения спутника и орбитальной станции может быть описан в простейшем случае следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} &\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = a_\rho, \\ &\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = a_\varphi. \end{aligned}$$

Краевые условия имеют вид $\rho(0) = \rho_0$, $\dot{\rho}(0) = k\rho_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\omega(0) = \omega_0$, $\rho(T) = \rho_T$. Пусть закон изменения дальности фиксирован (задача 1.6) и имеет вид $\dot{\rho} = k\rho$. Тогда ускорение, направленное по линии визирования, определяется следующим образом: $a_\rho = \rho(k^2 - \dot{\varphi}^2)$. Допустим, имеется также возможность управлять ускорением в направлении, ортогональном линии визирования. Тогда $a_\varphi = \rho u$, где u — управление, кусочно-непрерывная функция времени. Целью управления является минимизация функционала

$$J = \int\limits_0^T (a_\rho^2 + a_\varphi^2)dt = \int\limits_0^T \rho^2(u^2 + (k^2 - \dot{\varphi}^2)^2)dt.$$

а) Для поставленной задачи запишите соотношения принципа максимума. Примените принцип максимума Понтрягина и сведите задачу оптимального управления к краевой задаче для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} = 2\omega(\omega^2 - k^2), \\ \dot{\omega} = -2k\omega + u, \\ \dot{\rho} = k\rho \end{cases}$$

с краевыми условиями $\rho(0) = \rho_0, \omega(0) = \omega_0, \rho(T) = \rho_T, u(T) = 0$.
б) Покажите, что первые два уравнения системы эквивалентны уравнению типа Дуффинга (задача 1.3). Найдите стационарные решения системы, постройте эскиз фазового портрета, сделайте выводы о качественном поведении оптимальных траекторий.

Задача 5.45. *Оптимизация метода пропорционального наведения.* Рассмотрим процесс относительного движения спутника в окрестности орбитальной станции, описываемый уравнениями задачи 5.44. Предположим, что спутник использует пропорциональное наведение, т.е. управляющие воздействия заданы в виде $a_\rho = 0, a_\varphi = k\dot{\varphi}$, где k — управление, кусочно-непрерывная функция времени, удовлетворяющая условию $|k(t)| \le \bar{k}$, $\bar{k} = \text{const} > 0$. Краевые условия имеют вид $\rho(0) = \rho_0$, $\dot{\rho} = \dot{\rho_0}$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\omega(0) = \omega_0$, $\rho(T) = \rho_T$. Целью управления является минимизация времени перевода системы с начального расстояния на конечное.

Для поставленной задачи выпишите условия принципа максимума. Покажите, что оптимальная программа изменения $k(t)$ не может содержать участков особого управления.

5.3. * Оптимальное управление с особыми участками

Задача 5.46. В задаче

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u, \quad x_1(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad T = [0, 1], \\ \dot{x_2} &= x_1^2, \\ J(u) &= x_2(1) \to \min \end{aligned}$$

вычислите особое управление и проверьте для него выполнение условия Келли.

Задача 5.47. В задаче

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| \le 1, \quad T = [0, 1], \\ \dot{x_2} &= -x_1^2, \\ J(u) &= x_2(1) \to \min \end{aligned}$$

вычислите особое управление и проверьте для него выполнение условия Келли.

Задача 5.48. В задаче

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad |u| < 1, \quad T = [0, 1], \\ \dot{x_2} &= -ux_1, \\ J(u) &= x_2(1) =\to \min \end{aligned}$$

установите, что особое управление может принимать любые значения из отрезка $[-1; 1]$.

Задача 5.49. *Задача о сплаве плота.* Рассмотрим задачу о сплаве плота по прямолинейной реке ширины 2 с параболическим профилем распределения скорости течения, считая, что скорость течения у берега равна нулю, а в середине реки — максимальна. Управлением является скорость u, развиваемая плотом в направлении, перпендикулярном течению. Целью управления является максимизация дальности сплава за заданное время при известных краевых условиях. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{x} = 1 - y^2,$$
$$\dot{y} = u,$$

где x — координата плота по дальности, y — координата, характеризующая расстояние от середины реки до плота, u — управление, $|u| \leq 1$. Краевые условия имеют вид $x(0) = x_0$, $y(0) = -1$, $y(T) = 1$.

Запишите условия принципа максимума Понтрягина, определите регулярные управления, найдите поверхность особого управления и формулу для вычисления особого управления. Проверьте выполнение необходимого условия Келли оптимальности особого управления. Постройте синтез оптимального управления.

Задача 5.50. Рассмотрим задачу (время T фиксировано)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad |u| \leq 1, \quad J = \varphi(x(T)) \to \min,$$

Докажите, что если пара матриц (A, B) управляема, то в данной задаче особые управления отсутствуют.

Задача 5.51. *Подъем ракеты в среде с постоянной плотностью.* В отличие от задачи 5.29, в которой рассматривался подъем ракеты в безвоздушном пространстве, предположим, что движение ракеты происходит в среде с постоянной плотностью. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \dfrac{P - kv^2}{m} - g, \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}. \end{cases}$$

Обозначения имеют тот же смысл, что и в задачах 1.7, 5.29, ограничения на управление, краевые условия и функционал те же, что в задаче 5.29.

Отметим, что в рассматриваемой задаче оптимальная программа расхода топлива может содержать участок особого управления, или режим промежуточной тяги. Возникновение особого режима вызвано наличием среды, поскольку из-за наличия силы сопротивления становится невыгодным (в смысле введенного функционала) разгоняться до слишком высокой скорости.

Для данной задачи запишите функцию Понтрягина, уравнения для сопряженных переменных и условия трансверсальности. Определите управление из условия максимума функции Понтрягина. Рассмотрите возможность возникновения особого управления, предположив, что функция переключения тождественно равна нулю на некотором отрезке времени. Дифференцируя это тождество по времени в силу системы исходных и сопряженных переменных, получите поверхность особого управления и формулу для вычисления особого управления, определите порядок особой экстремали. Постройте синтез оптимального управления.

Задача 5.52. *Задача мягкой посадки в среде с сопротивлением.* Рассмотрим задачу 5.30 о мягкой посадке на поверхность планеты, дополнительно предположив, что на спускаемый аппарат действует сила сопротивления среды. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{h} = v, \\ \dot{v} = \dfrac{-P - kv^2}{m} + g, \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}. \end{cases}$$

Обозначения, краевые условия, функционал и ограничения на управление те же, что в задаче 5.30.

Запишите условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Определите управления, доставляющие максимум функции Понтрягина. Найдите формулу для вычисления особого управления и уравнение для поверхности особого управления. Покажите, что поверхность особого управления расположена в той части фазового пространства, где принятая математическая модель движения некорректна. Постройте синтез оптимального управления, состоящего из участков регулярного управления. Сравните полученные результаты с результатами задачи 5.30.

Задача 5.53. *Задача о горизонтальном полете на максимальную дальность.*

Предположим, что подъемная сила удерживает летательный аппарат на постоянной высоте, т.е. зависит не только от скорости летательного аппарата, но и от его массы. Тогда и сила сопротивления $Q = Q(m, v)$ оказывается функцией от аргументов v и m. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = \dfrac{P - Q(m,v)}{m}, \\ \dot{m} = -\dfrac{P}{c}. \end{cases}$$

Граничные условия примем в виде $v(0) = v_0$, $x(0) = x_0$, $m(0) = m_0$, $m(T) = m_T$. Целью управления является максимизация дальности полета в момент выполнения конечного условия по массе.

Запишите соотношения принципа максимума. Найдите поверхность особого управления и формулу для вычисления особого управления как функции фазовых координат.

Задача 5.54. *Задача оптимального преследования объекта, убегающего по линии визирования.* В рамках математической модели 1.11 рассмотрим задачу оптимального преследования цели, стратегия которой заключается в убегании по линии визирования. При значениях $0 < b < 1$, когда скорость цели больше скорости преследователя, задачей управления является максимизация времени достижения расстояния ρ_T, $\rho_T > \rho_0$ за наибольшее время (задача преследования-сопровождения), а при $b > 1$ — минимизация времени достижения ρ_T, $\rho_T < \rho_0$ (задача преследования-перехвата).

а) Для задачи преследования-сопровождения выпишите функцию Понтрягина, уравнения относительно сопряженных переменных и условия трансверсальности. Запишите условие максимума функции Понтрягина по управлению. Рассмотрите возможности возникновения особого управления, найдите поверхность особого управления и формулу для вычисления особого управления. Проверьте выполнение необходимого условия Келли оптимальности особого управления для найденных особых режимов. Проанализировав поведение траекторий динамической системы с управлениями $u(t) = -\bar{u}$, $u(t) = \bar{u}$, $u(t) = u_{oc}$ на плоскости, убедитесь, что оптимальный синтез определяется формулой:

$$u^o = \begin{cases} -\bar{u}, \beta > 0, \\ 0, \beta = 0, \\ \bar{u}, \beta < 0. \end{cases}$$

б) Проведите исследование, аналогичное пункту а) для задачи преследования-перехвата.

Задача 5.55. *Задача оптимального уклонения от преследователя, наводящегося методом погони.* Рассмотрим задачу оптимального уклонения от преследователя, стратегией которого является метод погони. При реализации метода погони вектор скорости преследователя в каждый момент времени направлен на цель. Преследователь и цель считаются материальными точками, движущимися в плоскости с постоянными по модулю скоростями. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \cos\alpha - b, \\ \dot{\alpha} = -\dfrac{\sin\alpha}{\rho} + u, \end{cases}$$

где α — угол между вектором скорости цели и линией визирования. Формулировка задачи оптимизации зависит от величины b. При $b > 1$ краевые условия имеют вид $r(0) = r_0, \alpha(0) = \alpha_0, r(T) = r_T, r_0 > r_T$, и целью управления является максимизация времени перевода системы из начального положения в конечное за наибольшее время (задача уклонения). Функционал имеет вид $J = -T$.

Для задачи уклонения запишите соотношения принципа максимума. Определите управления, доставляющие максимум функции Понтрягина. Найдите поверхность особого управления и получите формулу для вычисления особого управления. Проверьте выполнение необходимого условия Келли оптимальности особого управления. Постройте синтез оптимального управления.

Задача 5.56. *Задача оптимального отрыва от преследователя, наводящегося методом погони.* Рассмотрим задачу 5.55 в случае $b < 1$ для краевых условий $r(0) = r_0$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $r(T) = r_T$, $r_0 < r_T$ и функционала $J = T$ — задачу оптимального отрыва. Проведите для задачи отрыва исследование по схеме, предложенной в задаче 5.55.

Задача 5.57. Рассмотрим модельную задачу управления материальной точкой в горизонтальной плоскости в кинематической постановке. Приведенная ниже математическая модель может быть использована при начальном анализе задач оптимизации движения летательного аппарата в горизонтальной плоскости, выбора маршрутов мобильных роботов и т.д. (задачи 5.31, 5.32, 5.33, 5.42).
Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = v\cos\alpha, \\ \dot{y_2} = v\sin\alpha, \\ \dot{\alpha} = \omega, \end{cases}$$

где y_1 и y_2 — координаты центра масс робота, α — угол между вектором скорости и осью абсцисс (угол наклона траектории), в качестве управлений рассматриваются ω — скорость поворота вектора скорости и v — модуль скорости. Ограничения на управление примем в виде $0 \leq v(t) \leq \bar{v}$, $|\omega(t)| \leq \bar{\omega}$. Краевые условия имеют следующий вид:

$$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ \alpha(0) = 0,\ y_1(T) = a,\ y_2(T) = b.$$

Целью управления является минимизация времени перевода системы из начального состояния в конечное состояние, функционал имеет вид $J = T$.

а) Выпишите функцию Понтрягина, уравнения для сопряженных переменных, условия трансверсальности и условие максимума функции Понтрягина по управлениям v, ω. Докажите, что одновременно особого управления по управлениям v, ω не возникает.
б) Найдите особое управление по ω. Докажите, что особое управление по v не возникает.
в) Покажите, что оптимальная траектория движения в общем случае может быть составлена из следующих дуг:

1) Разворот робота на месте $v(t) = 0$, $|\omega(t)| = \bar{\omega}$,

2) Разворот с одновременным движением вперед $v(t) = \bar{v}$, $|\omega(t)| = \bar{\omega}$,

3) Движение по прямой линии с максимальной скоростью $v(t) = \bar{v}$, $|\omega(t)| = 0$.

Задача 5.58. *Задача оптимального по быстродействию управления мобильным роботом.* Рассмотрим математическую модель мобильного робота, введенную в задаче 1.10. Задачу оптимизации будем решать в кинематической постановке, допуская безынерционное изменение продольной и угловой скорости робота, а также пренебрегая переходными процессами в цепях исполнительных устройств — двигателях колес. Уравнения движения запишем в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\alpha - k_0\omega\sin\alpha, \\ \dot{y} = v\sin\alpha + k_0\omega\cos\alpha, \\ \dot{\alpha} = \omega, \end{cases}$$

Управлениями в этой динамической системе являются продольная и угловая скорости движения мобильного робота, кусочно-непрерывные функции времени, удовлетворяющие следующим условиям:

$$0 \leq v(t) \leq \bar{v}, \quad |\omega(t)| \leq \bar{\omega}.$$

Требуется построить управление $v(t), \omega(t)$, минимизирующее время перевода системы из заданного начального положения состояния $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\alpha(0) = 0$ в заданное конечное положение

$x(T) = x_T$, $y(T) = y_T$, полагая, что ориентация робота в конечный момент не фиксирована.
а) Выпишите функцию Понтрягина, уравнения для сопряженных переменных, условия трансверсальности и условие максимума функции Понтрягина по управлениям v, ω. Докажите, что одновременно особого управления по управлениям v, ω не возникает.
б) Найдите порядок особого управления и особое управление по ω. Докажите, что особое управление по v не возникает.
в) Покажите, что оптимальная траектория движения в общем случае может быть составлена из следующих дуг:
4)Разворот робота на месте $v(t) = 0, |\omega(t)| = \bar{\omega}$,
5) Разворот с одновременным движением вперед (движение по окружности) $v(t) = \bar{v}, |\omega(t)| = \bar{\omega}$,
6) Движение по прямой линии с максимальной скоростью $v(t) = \bar{v}, |\omega(t)| = 0$.

Задача 5.59. В задаче оптимального управления

$$J = \int\limits_0^{t_k} (x^2 + 2\dot{x}^2)dt \to \min_{u(\cdot)}, \qquad |u| \le 1$$

для перехода системы $\ddot{x} - x = u$ из состояния $x^2(0) + \dot{x}^2(0) > 0$ в начало координат $x(t_k) = \dot{x}(t_k) = 0$:
а) Выпишите краевую задачу для определения оптимального решения.
б) Проверьте наличие особых участков. Если особые участки существуют, определите порядок особой траектории.
в) Проверьте необходимые условия оптимальности особого управления.

Задача 5.60. Быстрейшее приведение перевернутого маятника на тележке в вертикальное положение при ограничениях на перемещение основания. Для учета перемещения тележки в функционал задачи быстродействия добавим штраф в виде интеграла от квадрата смещения тележки относительно начала координат.

Уравнения движения, краевые условия, ограничения на управление и функционал имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \omega, \\ \dot{\omega} = \alpha + u, \\ \dot{x} = v, \quad \dot{v} = u, \end{cases}$$

$\alpha(0) = \alpha_0$, $\omega(0) = \omega_0$, $x(0) = 0$, $v(0) = 0$,
$\alpha(T) = 0$, $\omega(T) = 0$, $x(T) = 0$, $v(T) = 0$,

$|u| \le u^*$,

$$J = T + k\int_0^T x^2 dt$$

Здесь α — угол отклонения маятника от вертикали, ω — угловая скорость маятника, u - ускорение тележки, являющееся управляющим воздействием, $u^* = \mathrm{const}$ задано, x — перемещение тележки, v — скорость тележки, T — время окончания процесса, k — коэффициент.

Для поставленной задачи а) запишите соотношения принципа максимума Понтрягина; б) Установите порядок особого управления; в) проверьте необходимое условие оптимальности особого управления; г) найдите формулу для вычисления особого управления, как функции исходных фазовых координат и закон движения тележки при особом управлении.

Задача 5.61. В задаче оптимального управления

$$J = \int\limits_0^{t_k} x^2 dt \to \min_{u(\cdot)}, \qquad |u| \le 1$$

для перехода системы $\ddot{x} = u$ из состояния $x^2(0) + \dot{x}^2(0) > 0$ в начало координат $x(t_k) = \dot{x}(t_k) = 0$:

а) Выпишите краевую задачу для определения оптимального решения.

б) Проверьте наличие особых участков. Если особые участки существуют, определите порядок особой траектории.

в) Проверьте необходимые условия оптимальности особого управления.

Задача 5.62. Переведите систему $\ddot{x} = u$, где $|u| \le 1$, из состояния $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = -2$ на многообразие $x(t_k) = 2$, $\dot{x}(t_k) = 2$, где $t_k = 8$, оптимальным образом в смысле функционала:

$$\varphi_0 = \int\limits_0^{t_k} x^2 dt \to \min_{u(\cdot)}.$$

а) Выпишите краевую задачу для определения оптимального решения.

б) Проверьте наличие особых участков. Если особые участки существуют, определите порядок особой траектории.

в) Проверьте необходимые условия оптимальности особого управления.

5.4. Оптимальная стабилизация

Задача 5.63. Решите задачу оптимальной стабилизации системы, описываемой скалярным уравнением $\dot{x}-x=u$, $x(t_0)=x_0$. Необходимо минимизировать функционал

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty (x^2+2u^2)dt.$$

Задача 5.64. Построить оптимальный регулятор для системы, описываемой уравнениями:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1=x_2, \qquad x_1(t_0)=x_{1_0},\\ &\dot{x}_2=u, \qquad x_2(t_0)=x_{2_0}. \end{aligned}$$

Необходимо минимизировать функционал

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2dt+\frac{1}{2}(x_1^2(1)+x_2^2(1)).$$

Задача 5.65. Дана управляемая система $\dot{x}-x=u$, где u — любое. Начальное и конечные состояния, а также время заданы: $x(0)=0$ и $x(1)=1$. Найти оптимальное управление и траекторию в задаче:

$$J=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (3x^2+u^2)dt\to\min_{u(\cdot)}.$$

Задача 5.66. Решите задачу оптимальной стабилизации системы, описываемой уравнениями $\ddot{x}-x=u$. Необходимо минимизировать функционал

а) $J=\int\limits_0^\infty (x^2+\dot{x}^2+u^2)dt$; б) $J=\int\limits_0^\infty (x_2^2+u^2)dt$.

Задача 5.67. Стабилизировать систему $\ddot{x}-\dot{x}=u$ при помощи обратной связи оптимальным образом. Функционал качества следующий:

а) $J=\int\limits_0^\infty (x^2+\dot{x}^2+u^2)\,dt$; б) $J=\int\limits_0^\infty (\dot{x}^2+u^2)\,dt$.

Задача 5.68. Стабилизировать систему оптимальным образом

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-x_1+u \end{cases}$$

при помощи обратной связи. Время управления бесконечно, измеряется полный вектор состояния. Минимизируемый функционал имеет вид

а) $J = \int\limits_0^\infty (3x_1^2 + u^2)\, dt$; б) $J = \int\limits_0^\infty (x_2^2 + u^2)\, dt$.

Задача 5.69. Дана стохастическая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 + u + q(t), \end{cases}$$
$$z = x_2 + r(t),$$

где $q(t)$, $r(t)$ — некоррелированные белые шумы интенсивности $M[q(t)q(\tau)] = 2\delta(t-\tau)$, $M[r(t)r(\tau)] = \delta(t-\tau)$. Провести оптимальный синтез регулятора по неполным данным для критерия

$$J = \lim_{t\to\infty} M \;\; x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t) \;\; .$$

Задача 5.70. Дана стохастическая система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u + q(t), \end{cases}$$
$$z = x_2 + r(t),$$

где $q(t)$, $r(t)$ — некоррелированые белые шумы интенсивности $M[q(t)q(\tau) = 4\delta(t-\tau)$, $M[r(t)r(\tau) = 1\delta(t-\tau)$. Провести оптимальный синтез регулятора для критерия

$$J = \lim_{t\to\infty} M \;\; x_2^2(t) + u^2(t)) \;\; .$$

Литература

[1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. Москва: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2005. 376 с.

[2] Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. Москва: Изд-во МАКСПресс, 2012, 240 с.

[3] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. «Наука», М., 1967.

[4] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. Москва: Изд-во «Высшая школа», 2003. 614 с.

[5] Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел.Изд-е 3-е, испр. и доп., М: Изд-во ЛКИ, 2009.

[6] В.Н.Белотелов, А.А.Голован, А.А.Гришин, Д.Н.Жихарев, А.В.Ленский, В.Б.Пахомов. Математические модели и алгоритмы управления движением мобильного робота// Препринт № 63-2001, Институт механики МГУ,Москва, 2001.

[7] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Изд-во «Мир», 1972.

[8] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. Москва: Изд-во «Наука», 1973.

[9] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[10] Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Москва: Изд-во «Наука», 1984.

[11] Григорьев И.С. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. М.: Изд-во ЦПИ при мех-мат. ф-т. МГУ, 2005.

[12] Дэвис М.Х.А. Линейное оценивание и стохастичское управление. Москва: Изд-во «Наука», 1984, 208 с.

[13] Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений. Итоги науки и техники. Т. 90. ВИНИТИ, 2002. С. 5-186.

[14] Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. Москва: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2010. 208 с.

[15] Летов А.М. Динамика полета и управление. Москва: Изд-во

«Наука», 1969.

[16] Лоуссон Ч., Хенсен Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. Пер. с англ. Москва: Изд - во «Наука», 1986. 232 с.

[17] Меркин Д.,Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Изд - во «Наука», 1987. 304 с.

[18] Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. Москва: Изд-во «Наука», 1978.

[19] Сейдж Э. П., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в связи с управлением. Пер. с англ. Серия «Статистическая теория связи», выпуск 6. Москва: Изд-во «Связь», 1976. 496 с.

[20] Сейдж Э. П., Уайт Ч. С., III. Оптимальное управление системами. Пер. с англ. Москва: Изд-во «Радио и связь», 1982. 392 с.

[21] Филлипов А.Ф. О некоторых вопросах теолрии оптимального регулирования// Вестник МГУ, сер. матем. мех., № 2, 1959.

[22] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. Москва: Изд-во «Наука», 1978. 352 с.

[23] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. Москва: Изд - во «Наука», 1984. 320 с.

[24] Maybeck P.S. Stochastic models, Estimation and Control. New York: Academic Press, 1979.

[25] Cherkasov O., Yakushev A., Singular Arcs in the Optimal Evasion Against Proportional Navigation Vehicle, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.113, N 2, 211-226, May 2002.