Глава 2

Оптимальное управление

В этом разделе приводятся некоторые постановки классических задач вариационного исчисления. Подробнее можно прочитать в [3] и в [4].

Введем обозначения: $x = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^\top$ — вектор состояния размерности n, $\dot{x} = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t))^\top$ — вектор скоростей.

Дифференциальные связи $M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$:

$$M_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

где $M_i(t, x(t), \dot{x}(t))$ — гладкие функции от $2n + 1$ переменных.

Граничные условия вида $\psi(x(t_0), x(T)) = 0$:

$$\psi_j(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(T), \ldots, x_n(T)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

где $\psi_j(t, x(t), \dot{x}(t))$ — гладкие функции от $2n + 1$ переменных.

Если не оговорено иное, интервал времени $[t_0, T]$ считается фиксированным и конечным.

Задача Лагранжа — это задача с интегральным функционалом:

$$J = \int_{t_0}^{T} L(t, x, \dot{x})\, dt \longrightarrow \inf, \quad M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(T)) = 0,$$

$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = L(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$ — гладкая функция от $2n+1$ переменных, которая называется *интегрантом* или *Лагранжсианом.*

Задача Майера — это задача с терминальным функционалом:

$$T = l(x(t_0), x(T)) \longrightarrow \inf, \quad M(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad \psi(x(t_0), x(T)) = 0,$$

где $l(x(t_0), x(T)) = l(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), x_1(T), \ldots, x_n(T))$ — гладкая функция $2n$ переменных.

Задача Больца — это задача со смешанным функционалом

$$B = \int\limits_{t_0}^{T} L(t,x,\dot{x})\,dt + l(x(t_0),x(T)) \longrightarrow \inf, \quad M(t,x(t),\dot{x}(t)) = 0, \quad \psi(x(t_0),x(T)) = 0.$$

Функционал B называют функционалом Больца.

Задача со смешанным функционалом без ограничений

$$B = \int\limits_{t_0}^{T} L(t,x,\dot{x})\,dt + l(x(t_0),x(T)) \longrightarrow \inf$$

называется *элементарной задачей Больца.*

Простейшая задача классического вариационного исчисления. Частный случай задачи Лагранжа без дифференциальной связи:

$$J = \int\limits_{t_0}^{T} L(t,x,\dot{x})\,dt \longrightarrow \inf, \quad x(t_0) = x^*, x(T) = x_T,$$

называется *простейшей векторной задачей классического вариационного исчисления.* В случае $n = 1$, это *простейшая задача классического вариационного исчисления.*

Задача оптимального управления. В этом разделе задачу оптимального управления приведем в стиле [3]:

$$J(x,u,t_0,T) = \int\limits_{t_0}^{T} g_1(t,x,u)\,dt + g_2(t_0,x(t_0),T,x(T)) \longrightarrow \inf,$$
$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad \psi(t_0,x(t_0),T,x(T)) = 0,$$

$u = (u_1(t),u_2(t),\ldots,u_r(t))^\top$ — вектор управления размерности r,
$g_1(t,x(t),u(t)) = g_1(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),u_1(t),\ldots,u_r(t))$ — гладкая функция от $n+r+1$ переменных,
$g_2(t_0,x(t_0),T,x(T)))$ — гладкая функция от $2n+2$ переменных,
$f(t,x,u)$ — гладкая функция от $n+r+1$ переменных,
$u \in U \subset \mathbb{R}^r$ и $u(\cdot) \in \mathbb{KC}([t_0,T])$.

Далее задача оптимального управления будет приведена в понтрягинской постановке.

Задача быстродействия — это задача оптимального управления с функционалом

$$J = \int\limits_{t_0}^{T} 1\,dt \longrightarrow \inf.$$

1 Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Рассмотрим подробнее простейшую задачу вариационного исчисления:

$$J(x(t)) = \int\limits_{t_0}^{T} L(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \longrightarrow \text{extr}\,, \quad x(t_0) = x^\star, \quad x(T) = x_T. \tag{2.1}$$

Здесь отрезок $[t_0, T]$ считается фиксированным и конечным. Экстремум рассматривается среди непрерывно дифференцируемых на отрезке $[t_0, T]$ функций $x(t)$, то есть $x(t) \in \mathbb{C}^1([t_0, T])$. При этом функции, которые удовлетворяют условиям на концах или краевым условиям $x(t_0) = x^\star$, $x(T) = x_T$, называются *допустимыми*. Функция трех переменных $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ называется *интегрантом* или *Лагранжианом*.

Определение 1.1. Функция $x^0(t)$ доставляет *слабый локальный минимум* в задаче (2.1), если существует такое δ, что $J(x^0) \leqslant J(x)$ для любой допустимой функции $x(t)$, для которой $||x(t) - x^0(t)||_{\mathbb{C}^1([t_0,T])} < \delta$.

Здесь

$$||x(t)||_{\mathbb{C}^1([t_0,T])} = \max\left(||x(t)||_{\mathbb{C}([t_0,T])}, ||\dot{x}(t)||_{\mathbb{C}([t_0,T])}\right),$$
$$||x(t)||_{\mathbb{C}([t_0,T])} = \max_{t\in[t_0,T]} |x(t)|, \quad ||\dot{x}(t)||_{\mathbb{C}([t_0,T])} = \max_{t\in[t_0,T]} |\dot{x}(t)|.$$

Определение 1.2. Функция $x^0(t)$ доставляет *слабый локальный максимум* в задаче (2.1), если существует такое δ, что $J(x) \leqslant J(x^0)$ для любой допустимой функции $x(t)$, для которой $||x(t) - x^0(t)||_{\mathbb{C}^1([t_0,T])} < \delta$.

Определение 1.3. *Слабый локальный экстремум* — это слабый локальный минимум или слабый локальный максимум.

Теорема 1.1 (Уравнение Эйлера)**.** *Пусть функция $x^0(t)$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче* (2.1) *и функции L, L_x, $L_{\dot{x}}$ непрерывны в некоторой окрестности расширенного графика*

$$\Gamma_{x^0\dot{x}^0} = \{(t, x^0(t), \dot{x}^0(t)) : t \in [t_0, T]\}, \quad L_{\dot{x}} \in \mathbb{C}^1([t_0, T]).$$

Тогда выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}}(t) + L_x(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, T]. \tag{2.2}$$

Здесь

$$L_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}L(t, x(t), \dot{x}(t))\bigg|_{x=x^0(t),\ \dot{x}=\dot{x}^0(t)}, \quad L_{\dot{x}}(t) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}L(t, x(t), \dot{x}(t))\bigg|_{x=x^0(t),\ \dot{x}=\dot{x}^0(t)}.$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Эйлера, называются *экстремалями*. Функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям, называются *допутимыми*. Экстремали, удовлетворяющие заданным краевым условиям, называются *допустимыми экстремалями*.

Замечание. Иное название теоремы (1.1): необходимое условие экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления [3].

1.1 Примеры

Пример 1.1. *Найдите допустимую экстремаль в задаче*

$$J = \int_0^1 (t^2 x - \dot{x}^2)\, dt \longrightarrow \max, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Выясните, доставляет ли допустимая экстремаль локальный максимум функционалу. Вычислите соответствующее значение функционала.

Решение примера. Введем лагранжиан $L(t, x, \dot{x}) = t^2 x - \dot{x}^2$. Тогда

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = t^2, \quad L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x}.$$

Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0$$

примет вид

$$2\ddot{x} + t^2 = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} = -\frac{t^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad \dot{x}(t) = -\frac{t^3}{6} + C_1, \quad x(t) = -\frac{t^4}{24} + C_1 t + C_2.$$

Из начального условия $x(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$, а из конечного условия $x(1) = 0$ получаем $C_1 = \dfrac{1}{24}$. Таким образом допустимой экстремалью является функция

$$x^0(t) = -\frac{t^4}{24} + \frac{t}{24} = \frac{t - t^4}{24}.$$

Покажем, что данная экстремаль доставляет **абсолютный максимум** функционалу $J(x)$,

то есть $J(x^0+\delta x)\leqslant J(x^0)$ для любой функции $\delta x\in\mathbb{C}^1[0,1]$ такой, что $\delta x(0)=\delta x(1)=0$.

$$J(x^0)-J(x^0+\delta x)=\int\limits_0^1\left[t^2x^0-(\dot x^0)^2\right]\,dt-\int\limits_0^1\left[t^2(x^0+\delta x)-(\dot x^0+\delta\dot x)^2\right]\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1\delta\dot x^2\,dt+\int\limits_0^1 2\dot x^0\delta\dot x\,dt-\int\limits_0^1 t^2\delta x\,dt=\int\limits_0^1\delta\dot x^2\,dt+2\dot x^0\delta x\Big|_0^1-\int\limits_0^1 2\ddot x^0\delta x\,dt+\int\limits_0^1 t\delta x\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1\delta\dot x^2\,dt+2\dot x^0\delta x\Big|_0^1-\int\limits_0^1\underbrace{[2\ddot x^0+t^2]}_{=0,\text{ в силу уравнения Эйлера}}\delta x\,dt\geqslant 0.$$

Первое слагаемое – интеграл от неотрицательной функции $\delta\dot x^2$ – неотрицательное, второе слагаемое равно нулю в силу принимаемых на концах значениях функции δx, третье слагаемое равно нулю в силу того, что выражение в скобках под знаком интеграла является левой частью уравнения Эйлера.

Поэтому $J(x^0)-J(x^0+\delta x)\geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Вычислим значение функционала $J(x)$ на экстремали x^0.

$$J(x^0)=\int\limits_0^1\left[t^2\frac{t-t^4}{24}-\left(\frac{1-4t^3}{24}\right)^2\right]\,dt=\int\limits_0^1\left[\frac{24t^3-24t^6-1+8t^3-16t^6}{24^2}\right]\,dt=$$

$$=\frac{1}{24^2}\int\limits_0^1(-40t^6+32t^3-1)\,dt=\frac{1}{24^2}\left(-\frac{40}{7}t^7+8t^4-t\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{24^2}\left(-\frac{40}{7}+8-1\right)=\frac{9}{24^2\cdot 7}=\frac{1}{448}.$$

⊡

Приведем пример, когда допустимая экстремаль не доставляет функционалу ни минимума, ни максимума. Этот пример приведен во многих классических изданиях по вариационному исчислению [3], [4] и других.

Пример 1.2. *Найдите допустимую экстремаль в задаче*

$$J=\int\limits_0^{3\pi/2}(\dot x^2-x^2)\,dt\longrightarrow\operatorname{extr},\quad x(0)=0,\quad x(3\pi/2)=0.$$

Выясните, доставляет ли допустимая экстремаль локальный максимум или минимум функционалу.

Решение примера. Введем лагранжиан $L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$. Тогда

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = -2x, \quad L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x}.$$

Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0$$

примет вид

$$-2\ddot{x} - 2x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + x = 0, \quad \text{откуда} \quad x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Из начального условия $x(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$, а из конечного условия $x(3\pi/2) = 0$ получаем $C_1 = 0$. Таким образом, допустимой экстремалью является функция

$$x^0(t) = 0.$$

Очевидно, что значение функционала на допустимой экстремали $J(x^0(t)) = 0$.

Исследуем приращение функционала для различных вариаций δx допустимой экстремали $x^0(t) = 0$.

$$\Delta J(\delta x) = J(x^0 + \delta x) - J(x^0) = J(\delta x).$$

Наша цель — показать, что допустимая экстремаль в данной задаче не обеспечивает функционалу ни максимума, ни минимума.

1) Рассмотрим последовательность функций $\delta x_n^I(t) = \frac{1}{n}\sin\frac{2t}{3}$. Функции $\delta x_n^I(t) \in \mathbb{C}^1[0,1]$ и $\delta x_n^I(0) = \delta x_n^I(3\pi/2) = 0$. При этом $\delta x_n^I(t) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то есть последовательность функций $x^0 + \delta x_n^I$ сходится к x^0. Вычислим приращение функционала для различных вариаций $\Delta J(\delta x_n^I(t))$

$$\Delta J(\delta x_n^I(t)) = \frac{1}{n^2}\int\limits_0^{3\pi/2}\left(\frac{4}{9}\cos^2\frac{2t}{3} - \sin^2\frac{2t}{3}\right)dt = \frac{1}{n^2}\frac{3\pi}{4}\left(\frac{4}{9} - 1\right) < 0.$$

Таким образом, в любой сколь угодно малой окрестности допустимой экстремали есть допустимая функция, на которой значение функционала меньше, чем на допустимой экстремали. Покажем, что также существует допустимая функция, на которой значение функционала будет больше.

2) Рассмотрим последовательность функций $\delta x_n^{II}(t) = \frac{1}{n}\sin^4\frac{2t}{3}$. Функции $\delta x_n^{II}(t) \in \mathbb{C}^1[0,1]$ и $\delta x_n^{II}(0) = \delta x_n^{II}(3\pi/2) = 0$. При этом $\delta x_n^{II}(t) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то есть последовательность функций $x^0 + \delta x_n^{II}$ сходится к x^0 также, как и последовательность функций

$x^0 + \delta x_n^I$ из предыдущего пункта. Вычислим приращение функционала для различных вариаций $\Delta J(\delta x_n^{II}(t))$.

Воспользуемся представлением производной вариации $\delta \dot{x}_n^{II}(t)$ в виде разности синусов

$$\delta \dot{x}_n^{II}(t) = \frac{1}{n}\frac{2}{3} 4 \sin^3 \frac{2t}{3} \cos \frac{2t}{3} = \frac{1}{n}\frac{4}{3} \sin^2 \frac{2t}{3} \sin \frac{4t}{3} = \\ = \frac{1}{n}\frac{2}{3}\left(1 - \cos \frac{4t}{3}\right) \sin \frac{4t}{3} = \frac{1}{n}\frac{1}{3}\left(2 \sin \frac{4t}{3} - \sin \frac{8t}{3}\right).$$

Тогда

$$\Delta J(\delta x_n^{II}(t)) = \frac{1}{n^2} \int\limits_0^{3\pi/2} \left[\frac{1}{9}\left(4 \sin^2 \frac{4t}{3} - 4 \sin \frac{4t}{3} \sin \frac{8t}{3} + \sin^2 \frac{8t}{3}\right) - \sin^8 \frac{2t}{3}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \int\limits_0^{3\pi/2} \left[\frac{4}{9} \sin^2 \frac{4t}{3} - \frac{2}{9} \cos \frac{4t}{3} + \frac{2}{9} \cos 4t + \frac{1}{9} \sin^2 \frac{8t}{3} - \sin^8 \frac{2t}{3}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{n^2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{105}{2^8}\right] = \frac{\pi}{n^2}\left[\frac{2^8 + 2^6 - 315}{3 \cdot 2^8}\right] = \frac{\pi}{n^2}\frac{5}{3 \cdot 2^8} > 0.$$

Значит, в любой сколь угодно малой окрестности допустимой экстремали $x^0(t)$ есть допустимые функции, на которых значение функционала будет как меньше, так и больше, чем на допустимой экстремали. Следовательно, допустимая экстремаль не доставляет функционалу ни максимум, ни минимум.

Замечание. Заметим, что при выборе в качестве вариации $\delta x_n(t) = \frac{1}{n} \sin^2 \frac{2t}{3}$, получали

$$\Delta J(\delta x_n(t)) = \frac{\pi}{n^2}\left(-\frac{11}{48}\right) < 0.$$

И при выборе $\delta x_n(t) = \frac{1}{n} \sin^3 \frac{2t}{3}$, получали

$$\Delta J(\delta x_n(t)) = \frac{\pi}{n^2}\left(-\frac{3}{2^{10}}\right) < 0.$$

$\boxdot$

Рассмотрим еще один пример с таким же лагранжианом, но другими временным интервалом и граничными условиями.

Пример 1.3. *Найдите допустимую экстремаль в задаче*

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\, dt \longrightarrow \text{extr}\,, \quad x(0) = 1, \quad x(\pi/2) = 0.$$

Выясните, доставляет ли допустимая экстремаль локальный максимум или минимум функционалу.

Решение примера. В этом примере так же, как и в примере 1.2 лагранжиан $L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$, а уравнение Эйлера принимает вид

$$\ddot{x} + x = 0, \quad \text{откуда} \quad x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Из начального условия $x(0) = 1$ получаем $C_2 = 1$, а из конечного условия $x(\pi/2) = 0$ получаем $C_1 = 0$. Таким образом, допустимой экстремалью является функция

$$x^0(t) = \cos t.$$

Значение функционала на допустимой экстремали

$$J(x^0(t)) = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt = -\int_0^{\pi/2} \cos 2t\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos\tau\, d\tau = -\frac{1}{2}\sin\tau\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Осталось показать, что на допустимой экстремали достигается абсолютный минимум функционала. ⊡

1.2 Общие наиболее распространенные ошибки

Литература

Монографии

[1] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем, М.: МАКС Пресс, 2012, — 240 с., ISBN 978-5-317-03976-9.

[2] *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, — 376 с., ISBN 978-5-9221-0401-2.

[3] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление (издание 3-е исправленное и дополненное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — 408 с., ISBN 978-5-9221-0598-7.

[4] *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление (под редакцией Н. П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М.: Издательство МЦНМО, 2008, — 320 с., ISBN 978-5-94057-367-8.

[5] *Егоров А. И.* Основы теории управления, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — с. 504, ISBN 978-5-9221-0543-9.

[6] *Афанасьев В. Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими ситемами, М.: КРАСАНД, 2020, — с. 480, ISBN 978-5-396-01013-0.

Сборники задач

[7] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие (издание 3-е исправленное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, — 256 с., ISBN 978-5-9221-0992-5.

[8] *Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю., Тихомиров В. М., Черкасов О. Ю.* Механика управляемых систем. Сбоник задач, (под редакцией В. В. Александрова, Ю. В. Болотина), М.: МАКС Пресс, 2013, — 140 с., ISBN 978-5-317-04452-7.

Справочники

[9] *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов, М.: «Наука», 1986, — 192 с.