2 Задача Больца

Задача Больца в классическом вариационном исчислении — это задача со смешанным функционалом без ограничений на краях

$$J = \int_{t_0}^{T} L(t, x, \dot{x})\, dt + l(x(t_0), x(T)) \longrightarrow \text{extr}\,, \tag{1.1}$$

где $t \in [t_0, T]$, $x(t_0) = x^*$, $x(T) = x_T$,
$L(t, x, \dot{x})$ — функция трех аргументов, непрерывная по совокупности переменных вместе со своими частными производными L_x и $L_{\dot{x}}$,
$l(x(t_0), x(T))$ — непрерывно дифференцируемая функция двух переменных x^* и x_T, при этом непосредственно сами значения x^* и x_T не известны.

Теорема 2.1 (Необходимое условие экстремума в задаче Больца)**.** *Пусть функция* $x^0(t) \in \mathbb{C}^1([t_0, T])$ *и доставляет локальный экстремум в задаче* (1.1)*. Тогда выполняется уравнение Эйлера*

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x^0, \dot{x}^0) + L_x(t, x^0, \dot{x}^0) = 0$$

и условия трансверсальности

$$L_{\dot{x}}(t_0, x^0(t_0), \dot{x}^0(t_0)) = \frac{\partial l(x^0(t_0), x^0(T))}{\partial x^*},$$
$$L_{\dot{x}}(T, x^0(T), \dot{x}^0(T)) = -\frac{\partial l(x^0(t_0), x^0(T))}{\partial x_T}.$$

Замечание. Если задано одно из двух краевых условий, например, известно начальное значение $x(t_0) = x^*$, тогда нужно исключить соответствующее условие трансверсальности. Если заданы оба краевых условия, мы получим частный случай задачи Лагранжа — простейшую задачу вариационного исчисления.

Замечание. Формулировка теоремы приведена для случая скалярной функции $x(t)$, но она очевидным образом распространяется на случай векторной функции.

Рассмотрим пример задачи Больца и приведем два решения: одно будет получено с помощью уравнения Эйлера, а второе — путем сведения к задаче оптимального управления и использования принципа максимума Понтрягина.

2.1 Примеры

Пример 2.1. *Найдите решение задачи Больца*

$$J = \int_{0}^{1} (\dot{x}^2 + x^2)\, dt - (x(1))^2 \longrightarrow \min, \quad x(0) = 1,$$

используя уравнение Эйлера.

РЕШЕНИЕ ПРИМЕРА. Введем лагранжиан $L(t,x,\dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2$ и терминант $l = -(x(1))^2$. Тогда

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x, \quad L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{\partial l}{\partial x_T} = -2x(1).$$

Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \quad \text{примет вид} \quad -2\ddot{x} + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни 1, -1. Отсюда

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \dot{x}(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Из начального условия $x(0) = 1$ получаем $C_1 + C_2 = 1$. Условие трансверсальности

$$L_{\dot{x}} = -\frac{\partial l}{\partial x_T} \quad \text{примет вид} \quad \dot{x}(1) = x(1).$$

Подставим выражения для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при $t = 1$:

$$C_1 e - C_2 e^{-1} = C_1 e + C_2 e^{-1}.$$

Откуда получаем $C_2 = 0$ и $C_1 = 1$. Таким образом, допустимой экстремалью является функция

$$x^0(t) = e^t.$$

Покажем, что данная экстремаль доставляет абсолютный минимум функционалу $J(x)$, то есть $J(x^0) \leqslant J(x^0 + \delta x)$ для любой функции $\delta x \in \mathbb{C}^1[0,1]$ такой, что $\delta x(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
&J(x^0 + \delta x) - J(x^0) = \\
&= \int_0^1 \left[(\dot{x}^0 + \delta\dot{x})^2 + (x^0 + \delta x)^2\right] dt - [x^0(1) + \delta x(1)]^2 - \int_0^1 \left[(\dot{x}^0)^2 + (x^0)^2\right] dt + [x^0(1)]^2 = \\
&= \int_0^1 [\delta\dot{x}^2 + \delta x^2]\, dt + \int_0^1 2\dot{x}^0\delta\dot{x}\, dt + \int_0^1 2x^0\delta x\, dt - (\delta x(1))^2 - 2x^0(1)\delta x(1) = \\
&= \int_0^1 [\delta\dot{x} - \delta x]^2\, dt + \int_0^1 2\delta\dot{x}\delta x\, dt + 2\dot{x}^0\delta x\Big|_0^1 - \int_0^1 2\ddot{x}^0\delta x\, dt + \int_0^1 2x^0\delta x\, dt - (\delta x(1))^2 - 2x^0(1)\delta x(1) = \\
&= \int_0^1 [\delta\dot{x} - \delta x]^2\, dt + (\delta x)^2\Big|_0^1 - 2\dot{x}^0(0)\delta x(0) + \int_0^1 2\delta x[-\ddot{x}^0 + x^0]\, dt - (\delta x(1))^2 + 2\delta x(1)[\dot{x}^0(1) - x^0(1)].
\end{aligned}$$

Первое слагаемое – интеграл от неотрицательной функции $(\delta\dot{x} - \delta x)^2$ – неотрицательное, второе слагаемое взаимно уничтожается с пятым, третье слагаемое равно нулю в силу принимаемого при $t = 0$ значения функции δx, четвертое слагаемое равно нулю в силу того, что подинтегральное выражение в скобках содержит левую частью уравнения Эйлера, выражение в скобках в шестом слагаемом равно нулю согласно условию трансверсальности. Поэтому $J(x^0 + \delta x) - J(x^0) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. ⊡

Пример 2.2. *Найдите решение задачи Больца*

$$J = \int_0^2 (\dot{x}^2 + x^2)\, dt + (x(2) - 1)^2 \longrightarrow \min, \quad x(0) = 1,$$

используя уравнение Эйлера.

Решение примера. Решим сначала задачу, используя уравнение Эйлера. Введем лагранжиан $L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2$ и терминант $l = (x(2) - 1)^2$. Тогда

$$L_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x, \quad L_{\dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{\partial l}{\partial x_T} = 2(x(2) - 1).$$

Уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0 \quad \text{примет вид} \quad -2\ddot{x} + 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - x = 0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни 1, -1. Отсюда

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \dot{x}(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}.$$

Из начального условия $x(0) = 1$ получаем $C_1 + C_2 = 1$. Условие трансверсальности

$$L_{\dot{x}} = -\frac{\partial l}{\partial x_T} \quad \text{примет вид} \quad 2\dot{x}(2) = -2(x(2) - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}(t) + x(t) - 1 = 0 \quad \text{при} \quad t = 2.$$

Подставим в последнее уравнение выражения для $x(t)$ и $\dot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) + x(t) - 1 = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1 = 2C_1 e^t - 1.$$

Откуда получаем $C_1 = \dfrac{1}{2e^2}$, $C_2 = 1 - C_1 = \dfrac{2e^2 - 1}{2e^2}$. Таким образом, допустимой экстремалью является функция

$$x^0(t) = \frac{1}{2e^2} \left(e^t + (2e^2 - 1)e^{-t} \right).$$

Покажем, что данная экстремаль доставляется абсолютный минимум функционалу $J(x)$, то есть $J(x^0) \leqslant J(x^0+\delta x)$ для любой функции $\delta x \in \mathbb{C}^1[0,2]$ такой, что $\delta x(0)=0$.

$$
\begin{aligned}
&J(x^0+\delta x)-J(x^0)= \\
&=\int_0^2 \left[(\dot{x}^0+\delta\dot{x})^2+(x^0+\delta x)^2\right]\,dt+[x^0(2)+\delta x(2)-1]^2-\int_0^2\left[(\dot{x}^0)^2+(x^0)^2\right]\,dt-[x^0(2)-1]^2= \\
&=\int_0^2[\delta\dot{x}^2+\delta x^2]\,dt+\int_0^2 2\dot{x}^0\delta\dot{x}\,dt+\int_0^2 2x^0\delta x\,dt+(\delta x(2))^2+2x^0(2)\delta x(2)-2\delta x(2)= \\
&=\int_0^2[\delta\dot{x}^2+\delta x^2]\,dt+2\dot{x}^0\delta x\Big|_0^2-\int_0^2 2\ddot{x}^0\delta x\,dt+\int_0^2 2x^0\delta x\,dt+(\delta x(2))^2+[2x^0(2)-2]\delta x(2)= \\
&=\int_0^2[\delta\dot{x}^2+\delta x^2]\,dt-2\dot{x}^0(0)\delta x(0)+\int_0^2 2\delta x[-\ddot{x}^0+x^0]\,dt+(\delta x(2))^2+2\delta x(2)[\dot{x}^0(2)+x^0(2)-1].
\end{aligned}
$$

Второе слагаемое равно нулю в силу принимаемого при $t=0$ значения функции δx, третье слагаемое равно нулю в силу того, что подинтегральное выражение в скобках содержит левую частью уравнения Эйлера, выражение в скобках в пятом слагаемом равно нулю согласно условию трансверсальности. Поэтому $J(x^0+\delta x)-J(x^0)\geqslant 0$, что и требовалось доказать. $\boxdot$

2.2 Общие наиболее распространенные ошибки

1. Приводится вывод о том, что допустимая экстремаль доставляет локальный минимум (или максимум) функционалу, хотя доказывается, что экстремаль доставляет абсолютный минимум (или максимум).

2. Небрежность: пропускаются скобки в подынтегральных выражениях, пропускается знак дифференциала dt в интеграле.

3. Не доказывается, что найденная допустимая экстремаль доставляет минимум (или максимум) функционалу.

4. Неправильно записывается интеграл с переменным верхним пределом:

$$\int_0^t f(t)\,dt, \text{ а нужно } \int_0^t f(\tau)\,d\tau.$$