3 Принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим класс управляемых систем, описываемых с помощью систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(y, u), \quad y(t_0) = y^\star, \tag{1.1}$$

где y — вектор состояния размерности n, u — скалярное управление, f — непрерывная вектор-функция по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по y.

В конечный момент времени T система должна попасть на гладкое и без особых точек многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ ($y(T) \in M$), причем это первый момент времени, когда достигается многообразие M. Многообразие M задается с помощью m равенств ($1 \leqslant m \leqslant n$):

$$M = \left\{ \varphi_i(y) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right\| = m \right\}.$$

Функции $\varphi_i(y)$ — непрерывно дифференцируемы по своим аргументам.

Ресурсы управления ограничены, то есть $u(\cdot) \in \mathbb{KC}([t_0, T])$, $u_- \leqslant u(t) \leqslant u_+$, где $-\infty \leqslant u_-$, $u_+ \leqslant \infty$ — заданные константы.

Предположим, что многообразие M достижимо, то есть существует хотя бы одно управление $u(\cdot) \in \mathbb{KC}([t_0, T])$ и конечный момент времени T такие, что $y(T) \in M$.

В качестве критерия качества управления системой (1.1) рассмотрим терминальный функционал $J(u) = \varphi_0(y(T))$.

Предположим, что существует оптимальное управление $u^0(\cdot) \in \mathbb{KC}([t_0, T])$, доставляющее локальный минимум функционалу $J(u)$:

$$J(u^0) = \min_u J(u).$$

Оптимальный процесс — тройка $\{y^0(t), u^0(t), [t_0, T^0]\}$, где $u^0(t)$ — оптимальное управление, $y^0(t)$ — соответствующая этому управлению траектория и $[t_0, T^0]$ — интервал времени, на котором это соответствие реализуется в виде тождества $\dot{y}^0(t) \equiv f(y^0(t), u^0(t))$.

Введем функцию Понтрягина

$$H(\psi, y, u) = \psi^\top f(y, u),$$

где ψ — решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right)^\top \psi, \tag{1.2}$$

сопряженных к системе уравнений в вариациях на оптимальном решении исходной системы:

$$\Delta \dot{y} = \left(\frac{\partial f(y^0(t), u^0(t))}{\partial y} \right) \Delta y. \tag{1.3}$$

Замечание. Отметим, что

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Теорема 3.1 (Принцип максимума Понтрягина)**.** *Если* $\{y^0(t), u^0(t), [t_0, T^0]\}$ *— оптимальный процесс, то существует ненулевая пара* $\{\lambda_0 \geqslant 0, \psi(t)\}$ *такая, что выполняются следующие условия:*

1. *(условие максимума)*

$$\max_{u_- \leqslant u(t) \leqslant u_+} H(\psi(t), y^0(t), u(t)) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)), \quad \forall t \in T_{\mathbb{C}} \subseteq [t_0, T^0],$$

   где $T_{\mathbb{C}}$ *— множество точек непрерывности управления* $u(t)$*.*

2. *(условие трансверсальности)*

$$\psi(T^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(T^0))}{\partial y^\top} \perp M$$

   или

$$\psi(T^0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi_0(y^0(T^0))}{\partial y^\top} = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial \varphi_i(y^0(T^0))}{\partial y^\top}.$$

3. *(условие стационарности гамильтониана)*

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t), y^0(t), u^0(t)) \equiv 0, \quad \forall t \in T_{\mathbb{C}} \subseteq [t_0, T^0].$$

Замечание. Теорема (3.1) дает только необходимые условия экстремума, но во многих случаях позволяет произвести отбор управлений, подозрительных на оптимальность.

4 Простейшая задача вариационного исчисления и принцип максимума Понтрягина

Рассмотрим решение простейшей задачи вариационного исчисления **??** с использованием принципа максимума Понтрягина.

Пример 4.1. *Найдите допустимую экстремаль в задаче*

$$J = \int_0^1 (t^2 x - \dot{x}^2)\, dt \longrightarrow \max, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Решение примера. Введем переменные

$$x_0 = t, \quad x_1 = x, \quad x_2 = \int\limits_0^t (\tau^2 x - \dot{x}^2)\, d\tau.$$

В качестве управления будем рассматривать $u = \dot{x}$. Тогда поведение введенных переменных описывается следующими дифференциальными уравнениями с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 &= 0, \\ \dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_2 &= x_0^2 x_1 - u^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0(0) &= 0, \\ x_1(0) &= 0, \\ x_2(0) &= 0. \end{cases}$$

Конечное многообразие задается двумя равенствами $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$, где $\varphi_1 = x_0 - 1$ и $\varphi_2 = x_1$. Первое равенство следует из того, что временной интервал движения задан и $x_0 = t$. Второе равенство является записанным в других обозначениях конечным условием $x(1) = 0$.

Функционал $\varphi_0(T)$ примет вид $\varphi_0(1) = -J = -x_2(1)$.

Запишем функцию Понтрягина

$$H = \psi_0 + \psi_1 u + (x_0^2 x_1 - u^2)\psi_2.$$

Система сопряженных уравнений и условие трансверсальности имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 &= -2x_0 x_1 \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= -x_0^2 \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \psi_0(1) \\ \psi_1(1) \\ \psi_2(1) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения $\dot{\psi}_2 = 0$ следует, что $\psi_2(t) = \text{const}$. Из условий трансверсальности $\psi_2(1) = \lambda_0$. А, значит, $\psi_2(t) = \lambda_0$.

Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$, тогда и $\psi_2(t) = 0\ \forall t \in [0, 1]$. Из уравнений на сопряженные переменные $\psi_0(t)$ и $\psi_1(t)$ получаем, что они являются постоянными. И из условия трансверсальности получим $\psi_0(t) = -\lambda_1$ и $\psi_1(t) = -\lambda_2$.

В этом случае Функция Понтрягина примет вид $H = -\lambda_1 - \lambda_2 u$. Если $\lambda_2 = 0$, то из условия стационарности функции Понтрягина на оптимальном процессе следует, что и $\lambda_1 = 0$. Таким образом, $\psi_0(t) = 0$ и $\psi_1(t) = 0$. То есть пара (λ_0, ψ) нулевая, что противоречит условиям принципа максимума Понтрягина.

Если $\lambda_2 \neq 0$, то из условия стационарности следует, что $u^0 = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то $x_1^0(t) = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} t + x_1(0)$ и $x_1^0(1) \neq 0$, что противоречит краевому условию. Если $\lambda_1 = 0$, то для выполнения условия стационарности необходимо, чтобы $u^0(t) = 0$, но из условия максимума следует, что $u^0(t)$ должно принимать максимально возможное значение при $\lambda_2 < 0$ или минимально возможное при $\lambda_2 > 0$. Получаем противоречие. Таким образом, исходное предположение $\lambda_0 = 0$ неверно, и $\lambda_0 > 0$.

Из условия экстремума функции Понтрягина

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi_1 - 2\psi_2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad u^0 = \frac{\psi_1}{2\psi_2}.$$

Положим $\lambda_0 = 1/2$. Тогда $\psi_2 = 1/2$ и $u^0 = \psi_1$. Так как функция Понтрягина по u является квадратичной и коэффициент при u^2, равный $-1/2$, отрицательный, то $u^0 = \psi_1$ доставляет максимум функции Понтрягина. Далее

$$\dot{\psi}_1 = -x_0\psi_2 = -\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = -\frac{t^3}{6} + C_1.$$

$$\dot{x}_1 = u^0 = \psi_1 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = -\frac{t^4}{24} + C_1 t + C_2.$$

Из начального условия $x_1(0) = 0$ получаем $C_2 = 0$. Из условия $x_1(1) = 0$ получаем $C_1 = \dfrac{1}{24}$. Следовательно

$$x_1^0(t) = \frac{t - t^4}{24}.$$

$$\dot{\psi}_0 = -x_0 x_1 = -t x_1 = \frac{t^5 - t^2}{24} \quad \Rightarrow \quad \psi_0(t) = \frac{t^6}{6 \cdot 24} - \frac{t^3}{3 \cdot 24} + C_0.$$

Проверим выполнение условия стационарности функции Понтрягина на оптимальном процессе.

$$\begin{aligned}
&H(\psi, u^0, x^0) = \psi_0(t) + \psi_1^2(t) + (t^2 x_1(t) - \psi_1^2(t))\frac{1}{2} = \psi_0(t) + \frac{1}{2}\psi_1^2(t) + \frac{1}{2}t^2 x_1(t) = \\
&= \frac{t^6}{6 \cdot 24} - \frac{t^3}{3 \cdot 24} + C_0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{t^3}{6} + \frac{1}{24}\right)^2 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{t - t^4}{24}\right) = \\
&= \frac{t^6}{6 \cdot 24} - \frac{t^3}{3 \cdot 24} + C_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{t^6}{36} - \frac{t^3}{3 \cdot 24} + \frac{1}{24^2}\right) + \frac{t^3 - t^6}{2 \cdot 24} = \\
&\qquad = \frac{t^6}{24}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{t^3}{24}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) + C_0 + \frac{1}{2 \cdot 24^2} = C_0 + \frac{1}{2 \cdot 24^2}.
\end{aligned}$$

Как видно, при $C_0 = -\dfrac{1}{2 \cdot 24^2}$ условие стационарности выполнено. $\boxdot$