5 Задача с закрепленными концами

Рассмотрим следующую задачу.

Пример 5.1. *Найдите оптимальную траекторию* $(x_1(t), x_2(t))$, *портрет в фазовой плоскости* $\{x_1, x_2\}$ *и оптимальное управление для перевода системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad \textit{из положения} \begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \quad \textit{в положение} \begin{cases} x_1(1) = 1, \\ x_2(1) = 1. \end{cases}$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2\,dt.$$

Решение примера.

Введем переменные $x_0 = t$ и интеграл с переменным верхним пределом $x_3 = \frac{1}{2}\int\limits_0^t u^2 d\tau$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{2}u^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0(0) = 0, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 0, \end{cases} \quad \text{функционал } \varphi_0 = J \text{ примет вид } x_3(t).$$

Конечное многообразие задается функциями $\varphi_i(1) = 0\,(i = 1, 2, 3)$, где

$$\varphi_1 = x_0 - 1, \quad \varphi_2 = x_1 - 1, \quad \varphi_3 = x_2 - 1.$$

Функция Понтрягина имеет вид $H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \frac{1}{2}\psi_3 u^2$. Запишем уравнения для сопряженных переменных $\psi_i, i = 0, 1, 2, 3$ и условие трансверсальности

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \psi_0(1) \\ \psi_1(1) \\ \psi_2(1) \\ \psi_3(1) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений на сопряженные переменные и условий трансверсальности получаем

$$\psi_0(t) = -\lambda_1, \quad \psi_1(t) = -\lambda_2, \quad \psi_2(t) = \lambda_2 t - (\lambda_2 + \lambda_3), \quad \psi_3(t) = -\lambda_0.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda_0 = 0$. Из условия трансверсальности следует, что $\psi_3(1) = 0$. Так как $\dot{\psi}_3 = 0$, функция ψ_3 — константа. Значит, $\psi_3(t) = 0$. Тогда, из необходимого условия оптимальности

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{получаем} \quad \psi_2(t) + u(t)\psi_3(t) = \psi_2(t) = 0.$$

Из третьего уравнения на сопряженные переменные $\dot{\psi}_2 = -\psi_1$ следует, что $\psi_1(t)$. В силу того, что $\psi_1(t) = 0$, $\psi_2(t) = 0$ и $\psi_3(t) = 0$, из условия стационарности $H = 0$ следует, что $\psi_0(t) = 0$. Таким образом, получаем нулевую пару (λ_0, ψ), что противоречит условиям принципа максимума Понтрягина. Значит, $\lambda_0 \neq 0$ и можно, считать, что $\lambda_0 = 1$.

Тогда из необходимого условия оптимальности получим, что подозрительное на оптимальность управление

$$u^0 = -\frac{\psi_2}{\psi_3} = \psi_2 = \lambda_2 t - (\lambda_2 + \lambda_3).$$

Тогда для оптимальной траектории имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 t - (\lambda_2 + \lambda_3), \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{6}\lambda_2 t^3 - \dfrac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)t^2 + c_2 t + c_1, \\ \\ x_2(t) = \dfrac{1}{2}\lambda_2 t^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)t + c_2. \end{cases}$$

Из начальных и конечным условий получим

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(1) = 1, \\ x_2(1) = 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{6}\lambda_2 - \dfrac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) = 1, \\ \\ \dfrac{1}{2}\lambda_2 - (\lambda_2 + \lambda_3) = 1. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений относительно λ_2 и λ_3, получим $\lambda_2 = -6$ и $\lambda_3 = 2$. Таким образом, оптимальные управление и траектория задаются выражениями

$$u^0 = -6t + 4, \quad x_1(t) = -t^3 + 2t^2, \quad x_2(t) = -3t^2 + 4t.$$

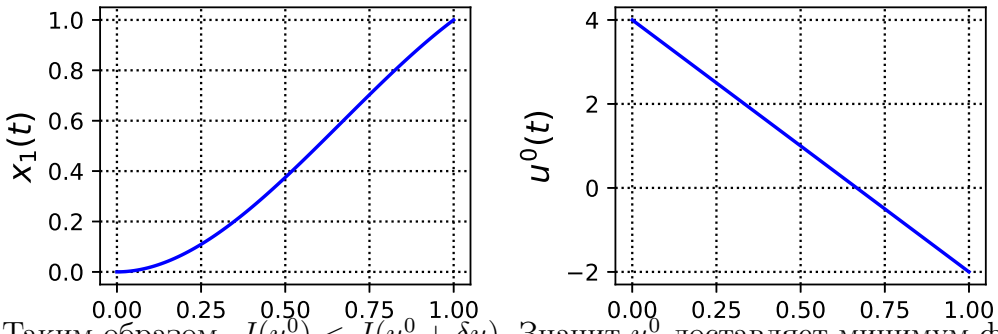
Добавить иллюстрацию.

Оптимальность подозрительного управления. Покажем в явном виде, что подозрительное управление является оптимальным. Рассмотрим вариацию управления δu, которая приводит к вариации δx функции x_1. Для сохранения начальных и конечных условий для x_1 и x_2 необходимо, чтобы $\delta x(0) = 0$, $\delta x(1) = 0$, $\delta \dot{x}(0) = 0$ и $\delta \dot{x}(1) = 0$. Рассмотрим вариацию функционала

$$J(u^0 + \delta u) - J(u^0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[((\ddot{x}_1^0)^2 + \delta \ddot{x}) - (\ddot{x}_1^0)^2\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[2\ddot{x}_1^0 \delta\ddot{x} + \delta\ddot{x}^2\right] dt =$$

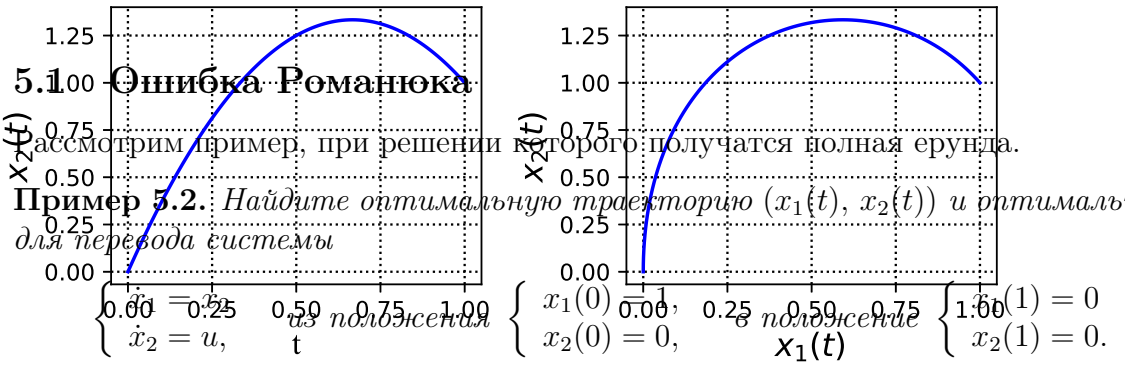
$$= \int_0^1 \ddot{x}_1^0 \delta\ddot{x}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \delta\ddot{x}^2\, dt = \ddot{x}_1^0 \delta\dot{x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \dddot{x}_1^0 \delta\dot{x}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \delta\ddot{x}^2\, dt = -\int_0^1 \dot{u}^0 \delta\dot{x}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \delta\ddot{x}^2\, dt =$$

$$= 6\int_0^1 \delta\dot{x}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \delta\ddot{x}^2\, dt = 6\delta x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \delta\ddot{x}^2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \delta\ddot{x}^2\, dt > 0.$$



Таким образом, $J(u^0) < J(u^0 + \delta u)$. Значит u^0 доставляет минимум функционалу.

□



5.1 Ошибка Романюка

Рассмотрим пример, при решении которого получатся полная ерунда.

Пример 5.2. *Найдите оптимальную траекторию $(x_1(t), x_2(t))$ и оптимальное управление для перевода системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad \text{из положения} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \quad \text{в положение} \quad \begin{cases} x_1(1) = 0 \\ x_2(1) = 0. \end{cases}$$

При этом необходимо минимизировать функционал

$$J = \int_0^1 u^2\,dt.$$

Решение примера.

1) Вариант «укороченный». Так как при решении прошлого примера, переменную x_0 мы фактически не использовали, ограничимся введением переменной $x_3 = \int_0^t u^2 d\tau$. Тогда система

примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ \dot{x}_3 = u^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 0, \end{cases} \quad \text{функционал } \varphi_0 = J \text{ примет вид } x_3(t).$$

Конечное многообразие задается функциями $\varphi_i(1) = 0\,(i = 1, 2)$, где

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2.$$

Функция Понтрягина имеет вид $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2$. Запишем уравнения для сопряженных переменных $\psi_i, i = 1, 2, 3$ и условие трансверсальности

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \\ \dot{\psi}_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \psi_1(1) \\ \psi_2(1) \\ \psi_3(1) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений на сопряженные переменные и условий трансверсальности получаем

$$\psi_1(t) = -\lambda_1, \quad \psi_2(t) = \lambda_1 t - (\lambda_1 + \lambda_2), \quad \psi_3(t) = -\lambda_0.$$

Также, как в решении прошлой задачи, можно показать, что $\lambda_0 \neq 0$. Положим $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$.

Тогда из необходимого условия оптимальности получим, что подозрительное на оптимальность управление

$$u^0 = -\frac{\psi_2}{2\psi_3} = \psi_2 = \lambda_1 t - (\lambda_1 + \lambda_2).$$

Тогда для оптимальной траектории имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 t - (\lambda_1 + \lambda_2), \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{6}\lambda_1 t^3 - \dfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)t^2 + c_2 t + c_1, \\ \\ x_2(t) = \dfrac{1}{2}\lambda_1 t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + c_2. \end{cases}$$

Из начальных и конечным условий получим

$$\begin{cases} x_1(0) = 1, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(1) = 0, \\ x_2(1) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{6}\lambda_1 - \dfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + 1 = 0, \\ \\ \dfrac{1}{2}\lambda_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений относительно λ_1 и λ_2, получим $\lambda_1 = 12$ и $\lambda_2 = -6$. Таким образом, оптимальные управление и траектория задаются выражениями

$$u^0 = 12t - 6, \quad x_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad x_2(t) = 6t^2 - 6t.$$

2) Вариант с использованием условия стационарности из принципа максимума Понтрягина.

Учитывая, что $x_2(0) = 0$, $u^0 = \psi_2$ и $\psi_3 = -\frac{1}{2}$, получим

$$H(0) = \psi_1(0)x_2^0(0) + \psi_2(0)u^0(0) + \psi_3(0)(u^0(0))^2 = \frac{1}{2}\psi_2^2(0) = 0.$$

Значит $\psi_2(0) = 0$. Учитывая, что $x_2(1) = 0$, получаем

$$H(1) = \frac{1}{2}\psi_2^2(1) = 0.$$

Откуда $\psi_2(1) = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а также и $u^0(t) = 0$.

Во-первых, полученное таким образом u^0 отличается от решения при первом подходе. Во-вторых, при таком u^0 переменная $x_2(t)$ будет сохранять свое первоначальное нулевое значение. Но тогда и переменная $x_1(t)$ будет оставаться равной 1. Таким образом, $x_1(t)$ не достигнет значения 0 при $t = 1$. То есть решение, полученное из условия стационарности, противоречит конечным условиям.

Причина этого в том, отбрасывание переменной $x_0 = t$ привело к тому, что функция Понтрягина стала неверной — пропало слагаемое ψ_0, которое является константой. То есть правильная функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u + \psi_3 u^2.$$

И при такой функции Понтрягина рассуждения, основанные на стационарности функции Понтрягина, остановились бы на том, что

$$H(0) = \psi_0 + \frac{1}{2}\psi_2^2(0) = 0 \quad \text{и} \quad H(1) = \psi_0 + \frac{1}{2}\psi_2^2(1) = 0.$$

$\boxdot$