# 6 Синтез оптимальных траекторий

## 6.1 Оптимальное быстродействие в задаче $\ddot{x} = u$ при симметричных ограничениях на управление

Рассмотрим следующую задачу.

**Пример 6.1.** *Переведите систему*

$$\ddot{x} = u,$$

*где* $|u| \leqslant 1$*, из состояния* $x^2(0)+\dot{x}^2(0) > 0$ *на многообразие* $x^2(T)+\dot{x}^2(T) = 0$ *за минимальное время* $T$*. Постройте синтез оптимальных траекторий.*

Решение примера.

Введем переменные $x_0 = t$, $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0(0) = 0, \\ x_1(0) = x_{1_0}, \\ x_2(0) = x_{2_0}, \end{cases} \qquad \text{функционал примет вид } \varphi_0 = x_0(T) \to \min.$$

Конечное многообразие задается функциями $\varphi_i(T) = 0\,(i = 1, 2)$, где

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2.$$

При этом $T$ — первый момент времени, когда достигается многообразие. Функция Понтрягина имеет вид $H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$. Запишем уравнения для сопряженных переменных $\psi_i, i = 0, 1, 2$ и условие трансверсальности

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \psi_0(T) \\ \psi_1(T) \\ \psi_2(T) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений на сопряженные переменные и условий трансверсальности получаем

$$\psi_0(t) = -\lambda_0, \quad \psi_1(t) = -\lambda_1, \quad \psi_2(t) = \lambda_1(t - T) - \lambda_2.$$

Допустим, что существует такой отрезок $[t_1, t_2] \subseteq [t_0, T]$, что $\forall t \in [t_1, t_2]\ \psi_2(t) = 0$. В этом случае функция Понтрягина на отрезке $[t_1, t_2]$ не будет зависеть от $u$, и условие максимума из принципа максимума Понтрягина не даст возможности проанализировать управление.

Итак, если на отрезке $[t_1, t_2]$ $\psi_2(t) = 0$, то и $\dot{\psi}_2(t) = 0$. В силу уравнений на сопряженные переменные тогда и $\psi_1(t) = 0$. Тогда из условия стационарности следует, что и $\psi_0(t) = 0$. Следовательно, и $\lambda_0 = 0$. Мы получили нулевую пару $\lambda_0, \psi$, что противоречит условиям принципа максимума Понтрягина. Значит отрезка, на котором $\psi_2(t)$ обращается в ноль, не существует.

Тогда, из условия максимума функции Понтрягина получаем, что подозрительное на оптимальность управление $u^0$ имеет вид:

$$u^0 = \begin{cases} -1, & \text{при } \psi_2 < 0, \\ 1, & \text{при } \psi_2 > 0. \end{cases}$$

То есть управление является кусочно-постоянной функцией, принимая граничные значения, в зависимости от знака функции $\psi_2(\cdot)$. Точки, где функция $\psi_2(\cdot)$ обращается ноль, являются точками разрыва функции управления $u^0(\cdot)$. Говорят, что в этих точках происходит переключение управления. Сами точки называют *точками переключения*.

Одним из этапов решения задач на оптимальное управление является исследование возможного количества точек переключения и их взаимосвязи. Для этого требуется исследовать функцию, отвечающую за переключения управления. В данной задаче эта функция $\psi_2(t)$.

Как видно из уравнений на сопряженные переменные $\psi_2(t) = \lambda_1(t-T) - \lambda_2$. Таким образом, функция $\psi_2(\cdot)$ либо имеет постоянный знак («+» или «−»), либо меняет знак один раз. Случай, когда функция $\psi_2(\cdot)$ тождественна равна нулю на каком-то отрезке, ранее исключен.

Рассмотрим фазовый портрет в плоскости переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ при граничных значениях управления.

**1) Случай** $u^0(t) = 1$. Динамическая система на $x_1(t)$, $x_2(t)$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx_1}{dx_2} = x_2, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\,x_2^2 + C_1, \quad C_1 = \text{const}\,.$$

Как видим, на фазовой плоскости $(x_1(t), x_2(t))$ траектории являются семейством парабол, отличающихся друг от друга сдвигом по оси $x_1$. При этом движение в верхней полуплоскости $(x_2 > 0)$ происходит по возрастанию $x_1$, то есть слева направо. А в нижней полуплоскости $(x_2 < 0)$ — по убыванию $x_1$, то есть справа налево.

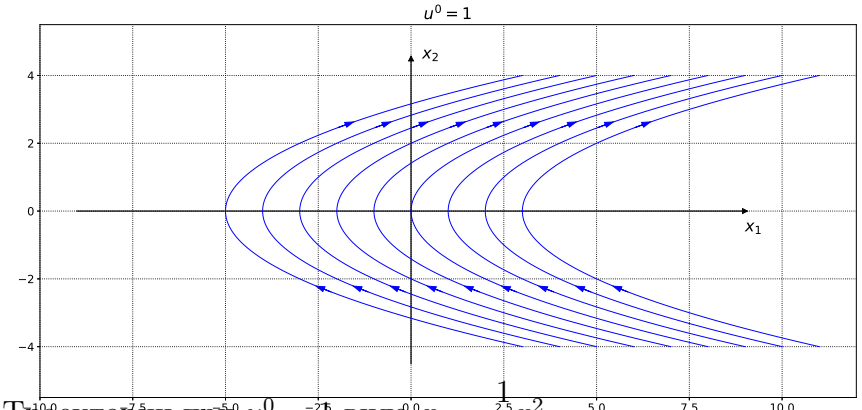



Рис. 1.1: Траектории при $u^0 = 1$ вида $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2$

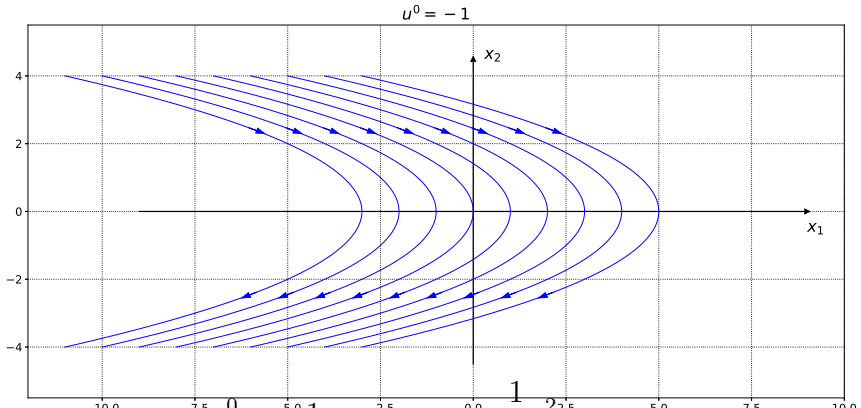



Рис. 1.2: Траектории при $u^0 = -1$ вида $x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2^2$

**2) Случай** $u^0(t) = -1$. Динамическая система на $x_1(t)$, $x_2(t)$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx_1}{dx_2} = -x_2, \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}\,x_2^2 + C_2, \quad C_2 = \text{const}\,.$$

В этом случае траектории также являются семейством парабол. При $x_2 > 0$ движение происходит по возрастанию $x_1$, а при $x_2 < 0$ переменная $x_1$ убывает.

**3) Синтез оптимальных траекторий**

Найдем траектории, движение по которым приводит на конечное многообразие без переключений. При $u^0 = 1$ это траектория $x_1 = \dfrac{1}{2}x_2^2$. При $u^0 = -1$ это траектория $x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2^2$. Если начальные условия $(x_{1_0}, x_{2_0})$ таковы, что начало траектории расположено ниже линии, образованной двумя этими траекториями, то движение по траектории при $u^0 = -1$ отдаляет от конечного многообразия. А движение при $u^0 = 1$ приводит на траекторию $x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2^2$. В этот момент происходит переключение с $u^0 = 1$ на $u^0 = -1$, и движение продолжается по траектории $x_1 = -\dfrac{1}{2}x_2^2$. Смотри рисунок **??**

Соответственно, если траектория начинается выше ранее упомянутой линии, то движение начинается при $u^0 = -1$ до тех пор, пока траектория не приведет на траектория $x_1 = \dfrac{1}{2}x_2^2$. В этот момент происходит переключение с $u^0 = -1$ на $u^0 = 1$, и движение продолжается по траектории $x_1 = \dfrac{1}{2}x_2^2$. Смотри рисунок **??**

Итоговый фазовый портрет синтеза оптимальных траекторий выглядит следующим образом:

$\boxdot$

*Замечание.* Подумаете, почему нельзя записать граничные условия на многообразии в виде одного уравнения $x_1^2(T) + x_2^2(T) = 0$?

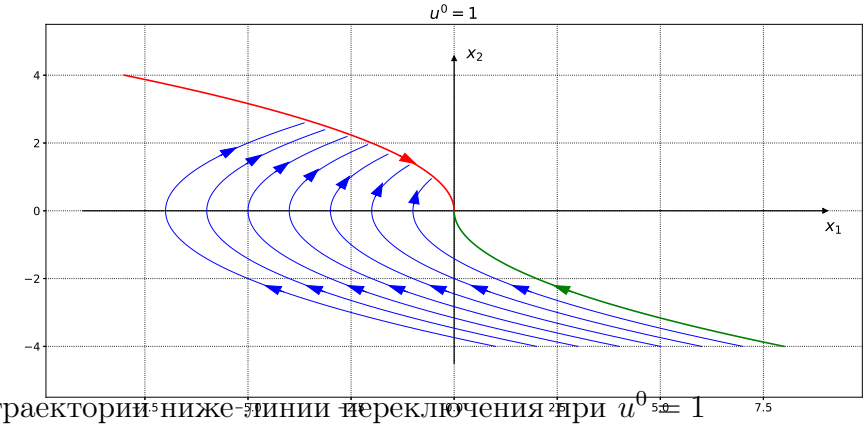



Рис. 1.3: Фазовые траектории ниже линии переключения при $u^0 = 1$

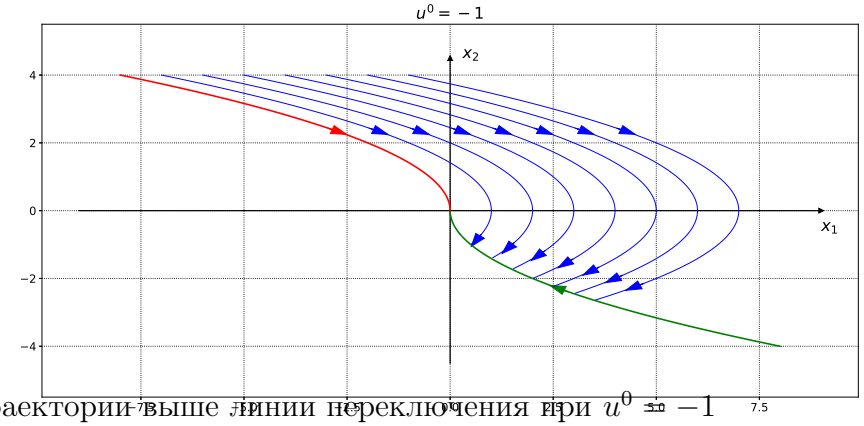



Рис. 1.4: Фазовые траектории выше линии переключения при $u^0 = -1$

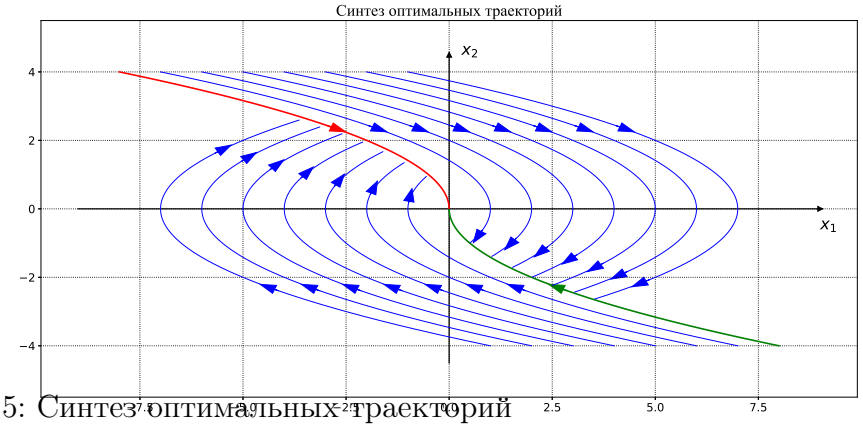



Рис. 1.5: Синтез оптимальных траекторий