7 Задачи оптимальной стабилизации при неограниченных ресурсах

7.1 Задача оптимальной стабилизации детерминированной системы

Рассмотрим уравнения в отклонениях от программного движения

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x^* \neq 0.$$

Функционал имеет вид

$$J(u) = \int_{t_0}^{T} (x^\top Gx + u^\top Nu)dt + x^\top(T)Fx(T) \longrightarrow \min,$$

где $F^\top = F \geqslant 0$, $G^\top = G \geqslant 0$, $N^\top = N > 0$.

Оптимальное управление имеет вид $u^0 = -N^{-1}B^\top Lx$, где симметричная положительно определенная матрица L является решением уравнения Риккати [ссылка на лекции]:

$$-\dot{L} = LA + A^\top L + G - LBN^{-1}B^\top L, \quad L(T) = F.$$

При этом оптимальная траектория будет удовлетворять уравнению

$$\dot{x} = (A - BN^{-1}B^\top L)x, \quad x(t_0) = x^*.$$

Теорема 7.1 (Калман, 1962)**.** *Рассмотрим стационарную систему на бесконечном времени. То есть $A, B, G, N = \text{const}$, $T = +\infty$. Пусть пара (A, B) — управляема, тогда $\exists \lim_{t\to+\infty} L(t) = L_\infty > 0$, где L_∞ — единственное решение алгебраического уравнения Риккати*

$$L_\infty A + A^\top L_\infty + G - L_\infty BN^{-1}B^\top L_\infty = 0.$$

Замечание. При $u^0 = -N^{-1}B^\top L_\infty x$ система будет экспоненциально устойчива.

Пример 7.1. *Стабилизируйте оптимальным образом систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u \end{cases}$$

при помощи обратной связи $u = k_1x_1 + k_2x_2$, где $k_1, k_2 — \text{const}$. Время управления бесконечно, измеряется полный вектор состояния. Минимизируемый функционал имеет вид

$$J = \int_0^{+\infty} (3x_1^2 + u^2)\, dt.$$

Проверьте, что корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

Решение примера. Приведем систему к виду $\dot{x} = Ax + Bu$, а подынтегральное выражение в функционале к виду $x^\top Gx + u^\top Nu$. Получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = 1.$$

Вычислим матрицу управляемости и ее ранг

$$W = (B \;\; AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} W = 2.$$

Система является вполне управляемой. Значит, оптимальное управление $u^0 = -N^{-1}B^\top Lx$, где матрица

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$LA + A^T L + G - LBN^{-1}B^\top L = 0.$$

Вычислим

$$LA = \begin{pmatrix} -l_{12} & l_{11} \\ -l_{22} & l_{12} \end{pmatrix}, \quad A^\top L = (LA)^\top = \begin{pmatrix} -l_{12} & -l_{22} \\ l_{11} & l_{12} \end{pmatrix},$$

$$LB = \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{pmatrix}, \quad B^\top L = (LB)^\top = \begin{pmatrix} l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad LBN^{-1}B^\top L = \begin{pmatrix} l_{12}^2 & l_{12}l_{22} \\ l_{12}l_{22} & l_{22}^2 \end{pmatrix},$$

Уравнение $LA + A^T L + G - LBN^{-1}B^\top L = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} -l_{12} & l_{11} \\ -l_{22} & l_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_{12} & -l_{22} \\ l_{11} & l_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_{12}^2 & l_{12}l_{22} \\ l_{12}l_{22} & l_{22}^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему из трех уравнений

$$\begin{cases} -2l_{12} + 3 - l_{12}^2 = 0, \\ l_{11} - l_{22} - l_{12}l_{22} = 0, \\ 2l_{12} - l_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $l_{12}^2 + 2l_{12} - 3 = 0$ получаем $l_{12} = 1$ или $l_{12} = -3$.

Так как из третьего уравнения $2l_{12} = l_{22}^2 \geqslant 0$, получаем, что $l_{12} = 1$. Тогда $l_{22} = \sqrt{2}$. Отрицательный корень не подходит в силу положительной определенности матрицы L. Из второго уравнения $l_{11} = l_{22} + l_{12}l_{22} = 2\sqrt{2}$. Таким образом

$$L = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad -N^{-1}B^\top L = -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Оптимальное управление примет вид $u^0 = -x_1 - \sqrt{2}x_2$. Следовательно, $k_1 = -1$, $k_2 = -\sqrt{2}$.

Проверим, что корни характеристического уравнения для системы с оптимальным управлением имеют отрицательные вещественные части. Вычислим матрицу систему с оптимальным управлением

$$A^* = A - BN^{-1}B^\top L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{tr} A^* = -\sqrt{2} < 0$ и $\det A^* = 2 > 0$, то все корни характеристического многочлена $|A^* - \lambda E| = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 2$ обладают отрицательной вещественной частью. $\boxdot$