8.1 Задача оптимальной стабилизации стохастической системы

8.1.1 Управление на конечном интервале при наличии точной информации

Рассмотрим уравнение с постоянно действующими возмущениями в виде случайного процесса

$$\dot{x} = Ax + Bu + q, \quad M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^\top(s)] = Q(t)\delta(t-s).$$

Функционал имеет вид

$$J(u) = M[x\top(T)Fx(T) + \int_{t_0}^{T} (x^\top Gx + u^\top Nu)\, dt] \longrightarrow \min,$$

где $F = F^\top \geqslant 0$, $G = G^\top \geqslant 0$, $N = N^\top > 0$.

Оптимальное управление имеет вид $u^0 = -N^{-1}B^\top Lx$, где симметричная положительно определенная матрица L является решением уравнения Риккати [ссылка на лекции]:

$$-\dot{L} = LA + A^\top L + G - LBN^{-1}B^\top L, \quad L(T) = F.$$

8.1.2 Управление на конечном интервале при отсутствии точной информации

Рассмотрим непрерывную линейную динамическую систему, поведение которой описывается вектором состояния:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u + q(t),$$

где $q(t)$ — нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^\top(s)] = Q(t)\delta(t-s), \quad Q(t) \geq 0.$$

Также известны

$$\tilde{x}(t_0) = M[x_0(t)], \quad P(t_0) = M[(x(t_0) - \tilde{x}(t_0))(x(t_0) - \tilde{x}(t_0))^\top] \geq 0.$$

Полная информация о векторе состояния $x(t)$ отсутствует, и на интервале $[t_0, t]$ непрерывно поступает информация:

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t),$$

где погрешность измерений $r(t)$ — нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[r(t)] = 0, \quad M[r(t)r^\top(s)] = R(t)\delta(t-s), \quad R(t) > 0.$$

Кроме того $\forall t \geqslant t_0$

$$M[x(t_0)q^\top(t)] = 0, \quad M[x(t_0)r^\top(t)] = 0$$

и $\forall t, s$

$$M[r(t)q^T(s)] = 0.$$

Требуется найти управление $u(t)$, которое минимизирует функционал

$$J(u) = M[x\top(T)Fx(T) + \int_{t_0}^{T} (x^\top Gx + u^\top Nu)\, dt],$$

где $F^\top = F > 0$, $G^\top = G > 0$, $N^\top = N > 0$.

Теорема 8.1 (Теорема разделения)**.** *В задаче о стохастическом регуляторе с неполной информацией о векторе состояния оптимальным управлением является* $u^0 = -N^{-1}B^\top L\tilde{x}$, *где симметричная положительно определенная матрица* L *является решением уравнения Риккати:*

$$-\dot{L} = LA + A^\top L + G - LBN^{-1}B^\top L, \quad L(T) = F,$$

а $\tilde{x}$ *— линейная оценка вектора состояния по измерению* $z(\tau)$ *(*$\tau \in [t_0, t]$*) с минимальной среднеквадратичной ошибкой, определяемая фильтром Калмана:*

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + K(z - Hx), \quad \tilde{x}\,(t_0) = \tilde{x}_0,$$
$$K = P_x H^T R^{-1}$$
$$\dot{P}_x = AP_x + P_x A^T + Q - P_x H^T R^{-1} H P_x, \quad P_x\,(t_0) = P_0.$$

Теорема разделения содержит два утверждения:

1. Оптимальное управление можно строить как функцию оптимальной оценки $\tilde{x}$. То есть задачи оценивания и управления можно разделить. Это следует из линейности динамической системы и гауссовости распределений x и $\tilde{x}$.

2. Оптимальные коэффициенты обратной связи в управлении по неполным данным о векторе состояния совпадают с коэффициентами в управлении при наличии полной информации для этой же системы, то есть $u^0 = -N^{-1}B^\top L\tilde{x}$. Как будто $\tilde{x}$ есть точное значение x. Это так называемый принцип стохастической эквивалентности. Это есть следствие квадратичности функционала качества. Для линейных систем с функционалом, отличном от квадратичного, принцип разделения может выполняться, а принцип стохастической эквивалентности — нет, то есть оптимальное управление будет отличаться от решения по полной информации.

8.1.3 Управление на бесконечном интервале при отсутствии точной информации

Рассмотрим стационарную систему на бесконечном времени, то есть A, B, G, N, Q, R — const , $T = \infty$. Функционал имеет вид

$$J(u) = M[x^\top Gx + u^\top Nu] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} M[\int_{t_0}^{T} (x^\top Gx + u^\top Nu)\, dt] \longrightarrow \min$$

Заметим, что функционал из задачи на конечном интервале неограниченно возрастает при $T \longrightarrow +\infty$.

Применяя теорему разделения, получаем $u^0 = -N^{-1}B^\top L\tilde{x}$, где L — решение алгебраического уравнения

$$LA + A^\top L + G - LBN^{-1}B^\top L = 0,$$

а оценка $\tilde{x}$ определяется фильтром Калмана с матрицей P — решением алгебраического уравнения

$$AP + PA^\top + Q - PH^\top R^{-1}HP = 0.$$

Пример 8.1. *Дана стохастическая система*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u + q, \\ z = x_2 + r, \end{cases}$$

где $q(t)$, $r(t)$ — некоррелированные белые шумы единичной интенсивности. Постройте оптимальное управление на бесконечном времени, минимизировав функционал

$$J(u) = M[x_2^2 + u^2].$$

Решение примера. Приведем систему к виду $\dot{x} = Ax + Bu + q^*$, $z = Hx + r$, а выражение в функционале к виду $x^\top Gx + u^\top Nu$. Получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = 1.$$

$$q^* = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad M[q^*q^{*\top}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M[qq^*] \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицы управляемости W и наблюдаемости N_z, а также их ранги

$$W = (B \;\; AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} W = 2, \quad N_z = \begin{pmatrix} H \\ HA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} N_z = 2.$$

Система является вполне управляемой и вполне наблюдаемой. Значит, **оптимальное управление** имеет вид $u^0 = -N^{-1}B^\top L\tilde{x}$, где матрица

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$LA + A^\top L + G - LBN^{-1}B^\top L = 0.$$

Вычислим

$$LA = \begin{pmatrix} -l_{12} & l_{11} \\ -l_{22} & l_{12} \end{pmatrix}, \quad A^\top L = (LA)^\top = \begin{pmatrix} -l_{12} & -l_{22} \\ l_{11} & l_{12} \end{pmatrix},$$

$$LB = \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{pmatrix}, \quad B^\top L = (LB)^\top = \begin{pmatrix} l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}, \quad LBN^{-1}B^\top L = \begin{pmatrix} l_{12}^2 & l_{12}l_{22} \\ l_{12}l_{22} & l_{22}^2 \end{pmatrix},$$

Уравнение $LA + A^T L + G - LBN^{-1}B^\top L = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} -l_{12} & l_{11} \\ -l_{22} & l_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_{12} & -l_{22} \\ l_{11} & l_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_{12}^2 & l_{12}l_{22} \\ l_{12}l_{22} & l_{22}^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему из трех уравнений

$$\begin{cases} -2l_{12} - l_{12}^2 = 0, \\ l_{11} - l_{22} - l_{12}l_{22} = 0, \\ 2l_{12} + 1 - l_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $l_{12}^2 + 2l_{12} = 0$ получаем $l_{12} = 0$ или $l_{12} = -2$.

Так как из третьего уравнения $2l_{12} + 1 = l_{22}^2 \geqslant 0$, получаем, что $l_{12} = 0$. Тогда $l_{22} = 1$. Отрицательный корень не подходит в силу положительной определенности матрицы L. Из второго уравнения $l_{11} = l_{22} + l_{12}l_{22} = 1$. Таким образом

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -N^{-1}B^\top L = -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Оптимальное управление примет вид $u^0 = -\tilde{x}_2$.

Проверим, что корни характеристического уравнения для системы с оптимальным управлением имеют отрицательные вещественные части. Вычислим матрицу систему с оптимальным управлением

$$A^* = A - BN^{-1}B^\top L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{tr} A^* = -1 < 0$ и $\det A^* = 1 > 0$, то все корни характеристического многочлена $|A^* - \lambda E| = \lambda^2 + \lambda + 1$ обладают отрицательной вещественной частью.

Оценка $\tilde{x}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K(z - H\tilde{x}), \\ K = PH^\top R^{-1}, \end{cases}$$

где матрица ковариаций ошибок оценок

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению

$$AP + PA^\top + Q - PH^\top R^{-1} HP = 0.$$

Вычислим

$$AP = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} \end{pmatrix}, \quad PA^\top = (AP)^\top = \begin{pmatrix} p_{12} & -p_{11} \\ p_{22} & -p_{12} \end{pmatrix},$$

$$PH^\top = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}, \quad HP = (PH^\top)^\top = \begin{pmatrix} p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad PH^\top R^{-1} HP = \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix},$$

Уравнение $AP + PA^\top + Q - PH^\top R^{-1} HP = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} p_{12} & p_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{12} & -p_{11} \\ p_{22} & -p_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Получаем систему из трех уравнений

$$\begin{cases} 2p_{12} - p_{12}^2 = 0, \\ p_{22} - p_{11} - p_{12}p_{22} = 0, \\ -2p_{12} + 1 - p_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения $p_{12}^2 - 2p_{12} = 0$ получаем $p_{12} = 0$ или $p_{12} = 2$.

Так как из третьего уравнения $-2p_{12} + 1 = p_{22}^2 \geqslant 0$, получаем, что $p_{12} = 0$. Тогда $p_{22} = 1$. Отрицательный корень не подходит в силу положительной определенности матрицы P. Из второго уравнения $p_{11} = p_{22} - p_{12}p_{22} = 1$.

Таким образом

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = PH^\top R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрица $A_z^* = A - KH = A - PH^\top R^{-1} H$ является гурвицевой.

$$A_z^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{tr} A_z^* = -1 < 0$ и $\det A_z^* = 1 > 0$, то матрица A_z^* — гурвицева, и все корни характеристического многочлена $|A_z^* - \lambda E| = \lambda^2 + \lambda + 1$ обладают отрицательной вещественной частью. $\boxdot$