1 Устойчивость

Управляемые динамические системы (УДС), как правило, описываются при помощи систем нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = f(y, u, t)$$

где y — вектор состояния размерности n, u – вектор управления размерности r, t — время, f — вектор-функция, принадлежащая определенному классу. В дальнейшем, если не оговорено иного, функцию f будем считать дифференцируемой функцией своих аргументов. Если правые части системы явным образом не зависят от времени, она называется автономной, в противном случае неавтономной. В случае, когда управление выбрано как функция времени и (или) фазовых координат, анализ движения УДС может производиться методами анализа систем дифференциальных уравнений.

Предположим, что исходя из некоторых соображений, например, простоты реализации или минимизации какой-то целевой функции, выбрано управление u^*, которое в дальнейшем будем называть желаемым, или программным управлением, а соответствующее ему движение УДС желаемым, или программным, движением. В этом случае естественна постановка задачи анализа устойчивости желаемого движения. На первом этапе эта задача традиционно сводится к анализу устойчивости тривиального решения уравнения в отклонениях.

Рассмотрим разность между желаемым движением и реальным, сохранив индекс * для переменных, отвечающих желаемому движению: $x(t) = y(t) - y^*(t)$, где через $x(t)$ обозначено отклонение от желаемого движения. Отклонение управлений от желаемых обозначим через $w(t), w(t) = u(t) - u^*(t)$. Запишем дифференциальное уравнение в отклонениях:

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y}^*(t) = f(y, u, t) - f\left(y^*, u^*, t\right).$$

Полагая отклонения управлений и фазовых траекторий малыми, разложим правую часть уравнения в ряд Тейлора, и, удерживая члена первого порядка малости, получим уравнение в отклонениях в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. В большинстве задач данного сборника матрицы полагаются независимыми от времени.

В приложениях часто рассматривается задача линейного синтеза, или построения управления w в виде линейной обратной связи по отклонению $x : w = Kx$, где K - матрица, элементы которой подлежат выбору с целью обеспечения устойчивости тривиального решения уравнения в отклонениях.

Важным частным случаем программного движения является стационарное программное движение, при котором производные от фазовых координат, не являющихся циклическими, равны нулю, а от циклических — константам.

Напомним определения, связанные с понятием устойчивости.

Определение 1.1. Тривиальное решение системы $\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x(t_0) \neq 0$ называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из выполнения условия $|x(t_0)| \leq \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon \forall t > t_0$

Определение 1.2. Тривиальное решение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует открытая окрестность нуля X^0 такая, что $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \forall x(t_0) \in X^0$.

Множество X^0 начальных условий, для которых выполнено условие асимптотической устойчивости, называют областью притяжения тривиального решения. Если это множество совпадает с пространством состояний, то решение $x(t) \equiv 0$ называют асимптотически устойчивым в целом, или глобально асимптотически устойчивым.

Для систем уравнений в отклонениях вида $\dot{x} = Ax$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Тривиальное решение системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа λ_i матрицы A имеют отрицательные действительные части.*

Теорема 1.2. *(Критерий Рауса — Гурвица). Действительные части всех корней уравнения*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0$$

с действительными коэффициентами будут отрицательны, в том и только в том случае, если все главные миноры определителя Гурвица

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

положительны.

Пример 1.1. *Исследуйте на асимптотическую устойчивость нулевое решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2x + y^2 + y, \\ \dot{y} = 2x^2 + x - 2y. \end{cases}$$

Решение примера. Проверим, что $x = 0$, $y = 0$ является решением системы. В силу того, что правые части системы являются полиномами от x, y, проверка выполняется легко. После линеаризации матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathrm{tr}(A) = -4 < 0$ и $\det(A) = 3 > 0$, нулевое решение линеаризованной системы и нулевое решение исходной системы асимптотически устойчивы. $\boxdot$

Пример 1.2. *Исследуйте на устойчивость нулевое решение системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^{y}. \end{cases}$$

Решение примера. Легко убедиться, что $x = 0, y = 0$ являются решением системы. Обозначим $f_1(x,y) = e^{x+2y} - \cos 3x$, $f_2(x,y) = \sqrt{4+8x} - 2e^{y}$ правые части системы. После линеаризации матрицей системы будет являться матрица Якоби

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + 3\sin 3x & 2e^{x+2y} \\ \dfrac{8}{2\sqrt{4+8x}} & -2e^{y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det(A) = -6 < 0$, нулевое решение линеаризованной системы и нулевое решение исходной системы не являются асимптотически устойчивыми. ⊡

Пример 1.3. *Найдите все положения равновесия в* $\mathbf{R}$ *системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = 5 - x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 1 + y^2 - x, \end{cases}$$

и исследуйте их на асимптотическую устойчивость.

Решение примера. Найдем положения равновесия системы из условия $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$.

$$\begin{cases} 0 = 5 - x^2 - y^2, \\ 0 = 1 + y^2 - x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + y^2 - x, \\ 0 = x^2 + x - 6, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Обозначим $f_1(x,y) = 5 - x^2 - y^2$, $f_2(x,y) = 1 + y^2 - x$ правые части системы. Вычислим якобиан

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -1 & 2y \end{pmatrix}.$$

1) При $(x_0, y_0) = (2,1)$ имеем $A(2,1) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $\det(A) = -10 < 0$, тривиальное решение линеаризованной системы и положение равновесия $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ не являются асимптотически устойчивыми.

2) При $(x_0, y_0) = (2,-1)$ имеем $A(2,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Так как $\operatorname{tr}(A) = -6 < 0$ и $\det(A) = 10 > 0$, тривиальное решение линеаризованной системы и положение равновесия $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ асимптотически устойчивы. ⊡

Пример 1.4. *На плоскости параметров (k_1, k_2) найдите и изобразите область асимптотической устойчивости и область устойчивости с запасом 1 тривиального решения системы уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 + k_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

Решение примера. Матрица A системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим характеристический многочлен $|A - \lambda E|$, где E — единичная матрица соответствующей размерности.

$$|A - \lambda E| = (k_1 - \lambda)(-\lambda) - k_2 = \lambda^2 - k_1\lambda - k_2.$$

Тривиальное решение асимптотически устойчиво при $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$.

Для анализа запаса устойчивости рассмотрим систему с матрицей A_y

$$A_y = \begin{pmatrix} k_1 + 1 & k_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим характеристический многочлен $|A_y - \lambda E|$.

$$|A_y - \lambda E| = (k_1 + 1 - \lambda)(1 - \lambda) - k_2 = \lambda^2 - (k_1 + 2)\lambda + (k_1 + 1 - k_2).$$

Тривиальное решение асимптотически устойчиво с запасом 1 при $k_1 < -2$ и $k_2 < k_1 + 1$. ⊡

Пример 1.5. *В плоскости параметров k_1, k_2 построить область асимптотической устойчивости. Построить область с запасом (степенью) устойчивости, равным* 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + k_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 + k_1 x_1. \end{cases}$$

Решение примера.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 + k_2 \\ -3 + k_1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 + k_2 \\ -3 + k_1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) + (k_2 + 2)(3 - k_1) - 2 = \lambda^2 + \lambda + (k_2 + 2)(3 - k_1) - 2.$$

Асимптотическая устойчивость $\Leftrightarrow (k_2 + 2)(k_1 - 3) < -2$. Найдем условия устойчивости с запасом $\alpha = 1$.

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 2 + k_2 \\ -3 + k_1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$|A_y - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 + k_2 \\ -3 + k_1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) + (k_2 + 2)(3 - k_1) - 2 = \lambda^2 - \lambda + (k_2 + 2)(3 - k_1) - 2.$$

Так как у приведенного характеристического полинома второй коэффициент отрицательный, асимптотической устойчивости с запасом $\alpha = 1$ обеспечить нельзя. ⊡

Пример 1.6. *В плоскости параметров (k_1, k_2) укажите область асимптотической устойчивости тривиального решения системы уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -k_2 x_1. \end{cases}$$

Решение примера.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -k_1 & -\lambda & 1 \\ -k_2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda+1) - k_2 - \lambda k_1 = -(\lambda^3 + \lambda^2 + k_1\lambda + k_2)$$

Критерий Гурвица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & k_2 & 0 \\ 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad k_1 - k_2 > 0, k_2 > 0.$$

⊡

Пример 1.7. *Исследуйте, при каких значениях параметров a и b нулевое решение системы асимптотически устойчиво:*

$$x^{IV} + \dddot{x} + a\ddot{x} + \dot{x} + bx = 0.$$

Решение примера. Матрица Гурвица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}, \text{ откуда } \Delta_1 = 1, \Delta_2 = a - 1, \Delta_3 = a - b - 1, \Delta_4 = b\Delta_3.$$

Таким образом $1 < a, 0 < b < a - 1$. ⊡

Литература

Монографии

[1] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем, М.: МАКС Пресс, 2012, — 240 с., ISBN 978-5-317-03976-9.

[2] *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, — 376 с., ISBN 978-5-9221-0401-2.

[3] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление (издание 3-е исправленное и дополненное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — 408 с., ISBN 978-5-9221-0598-7.

[4] *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление (под редакцией Н. П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М.: Издательство МЦНМО, 2008, — 320 с., ISBN 978-5-94057-367-8.

[5] *Егоров А. И.* Основы теории управления, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — с. 504, ISBN 978-5-9221-0543-9.

[6] *Афанасьев В. Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими ситемами, М.: КРАСАНД, 2020, — с. 480, ISBN 978-5-396-01013-0.

Сборники задач

[7] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие (издание 3-е исправленное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, — 256 с., ISBN 978-5-9221-0992-5.

[8] *Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю., Тихомиров В. М., Черкасов О. Ю.* Механика управляемых систем. Сбоник задач, (под редакцией В. В. Александрова, Ю. В. Болотина), М.: МАКС Пресс, 2013, — 140 с., ISBN 978-5-317-04452-7.

Справочники

[9] *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов, М.: «Наука», 1986, — 192 с.