2 Управляемость

Рассмотрим систему n-го порядка

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

где A и B — известные матричные функции времени размерности $n \times n$ и $n \times s$ соответственно, u — управление, подлежащее выбору. Как правило, $s < n$.

Определение 2.1. Система (1) называется *вполне управляемой* в момент времени t_0, если $\forall (x^\star, x^{\star\star})\ \exists t > t_0$ и ограниченное управление $u(\tau)$, где $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, которое переводит систему из состояния $x(t_0) = x^\star$ в состояние $x(t) = x^{\star\star}$.

Напомним, что решение уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t, t_0)$ — известная переходная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \qquad \Phi(t_0, t_0) = E. \tag{2}$$

Введем вектор $\eta = x^{\star\star} - \Phi\,(t, t_0)\,\xi$, тогда перевод системы из состоянии $x^\star$ в состояние $x^{\star\star}$ эквивалентен существованию конечного управления $u(\tau)$, удовлетворяющего соотношению

$$\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau = \eta.$$

Отсюда можно дать следующее эквивалентное определение управляемости.

Определение 2.2. Система (1) называется *вполне управляемой* в момент времени t_0, если $\forall \eta\ \exists t > t_0$ и ограниченное управление $u(\tau)$, где $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, которое переводит систему из состояния $x(t_0) = 0$ в состояние $x(t) = \eta$.

Замечание. В определении управляемости присутствует слово «вполне». Оно введено для того, чтобы отличить качество системы от того факта, что в системе присутствует управление, то есть система управляема. При общении специалистов такие тонкости не учитываются, и слово «вполне» опускается, что никогда не приводит к недоразумению.

Поскольку свойство управляемости целиком определяется свойством пары (A, B), то вместо того, чтобы сказать, что система (1) вполне управляема, говорят, что управляема пара (A, B).

2.1 Критерий управляемости в общем случае

Определение 2.3. Матрица

$$\mathcal{W}(t,t_0)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)B(\tau)B^{\top}(\tau)\Phi^{\top}(t,\tau)d\tau$$

называется грамианом управляемости.

Очевидно, матрица $\mathcal{W}(t,t_0)$ является симметрической матрицей и задает неотрицательно определенную квадратичную форму, то есть $\forall\lambda\ \lambda^{\top}\mathcal{W}\lambda\geqslant 0$.

Теорема 2.1 (Р. Калман, 1962)**.** *Для управляемости пары (A,B) в момент времени t_0 необходимо и достаточно, чтобы нашелся момент времени $t>t_0$ такой, что* $\det\mathcal{W}(t,t_0)\neq 0$*, то есть* $\mathcal{W}(t,t_0)>0$.

Определение 2.4. *Матрицей управляемости* называется матрица

$$W=\begin{pmatrix}B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B\end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2 (Критерий управляемости в стационарном случае)**.** *Для того, чтобы стационарная пара (A,B) была управляема, необходимо и достаточно, чтобы матрица управляемости имела максимальный ранг, то есть* $\operatorname{rank}W=n$*. Здесь n — размерность системы.*

Замечание. В случае, когда управление скалярно, матрица управляемости является квадратной — ее размерность $n\times n$. Условие полноты ранга равносильно тому, что определитель матрицы управляемости отличен от нуля.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. *Исследуйте на управляемость систему*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_1+x_2+u.\end{cases}$$

Решение примера. Выпишем матрицу системы A, вектор-столбец b при скалярном управлении и матрицу управляемости $W=\begin{pmatrix}b & Ab\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ W=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank}W=2$, система управляема. ⊡

Пример 2.2. *Исследуйте на управляемость систему*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+x_3,\\ \dot{x}_2=x_1+x_2+u,\\ \dot{x}_3=-x_2-x_3.\end{cases}$$

Решение примера. Выпишем матрицу системы A, вектор-столбец b при скалярном управлении и матрицу управляемости $W = \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} W = 2$, система не управляема. ⊡

2.2 Структура стационарных динамических систем с позиций управляемости

Рассмотрим стационарную систему n-го порядка со скалярным управлением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu, \tag{3}$$

где A — постоянная матрицы размерности $n \times n$, b — вектор-столбец размерности $n \times 1$. Пусть система (3) является управляемой. Тогда n столбцов матрицы управляемости W являются линейно независимыми, и их можно рассматривать в качестве базиса. Рассмотрим вид системы в этом базисе. Введем обозначения

$$g^1 = b, \quad g^2 = Ab = Ag^1, \quad g^3 = A^2b = Ag^2, \quad \ldots, \quad g^n = A^{n-1}b = Ag^{n-1}.$$

Таким образом матрица управляемости имеет вид $W = \begin{pmatrix} g^1 & g^2 & \ldots & g^n \end{pmatrix}$.

Пусть характеристический полином матрицы A имеет вид

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

По теореме Гамильтона–Кэли любая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Значит

$$A^n = -a_1A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}A - a_nE.$$

Тогда

$$Ag^n = A^ng^1 = -a_1g^n - \cdots - a_{n-1}g^2 - a_ng^1.$$

Сделаем замену переменных $x = W\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i g^i$, где $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{pmatrix}^\top$. Для записи системы в новых переменных подставим замену переменных в правую и левую части (3) и приведем подобные члены при соответствующих базисных векторах $g^1, g^2, \ldots, g^n$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\xi}_1g^1 + \dot{\xi}_2g^2 + \dot{\xi}_3g^3 + \cdots + \dot{\xi}_{n-1}g^{n-1} + \dot{\xi}_ng^n = Ax + bu = \\ &= A(\xi_1g^1 + \xi_2g^2 + \cdots + \xi_{n-1}g^{n-1} + \xi_ng^n) + bu = \\ &= \xi_1Ag^1 + \xi_2Ag^2 + \cdots + \xi_{n-1}Ag^{n-1} + \xi_nAg^n + bu = \\ &= \xi_1g^2 + \xi_2g^3 + \cdots + \xi_{n-1}g^n + \xi_n(-a_1g^n - \cdots - a_{n-1}g^2 - a_ng^1) + g^1u. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= -a_n\xi_n + u,\\
\dot{\xi}_2 &= \xi_1 - a_{n-1}\xi_n,\\
\dot{\xi}_3 &= \xi_2 - a_{n-2}\xi_n,\\
&\dots\\
\dot{\xi}_{n-1} &= \xi_{n-2} - a_2\xi_n,\\
\dot{\xi}_n &= \xi_{n-1} - a_1\xi_n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, в базисе $\{g^1, g^2, \dots, g^n\}$ матрица A_g системы (4) имеет вид

$$A_g = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n\\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1}\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_2\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1
\end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. *Убедитесь в управляемости системы*

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = 2x_1 + u,\\
\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2,\\
\dot{x}_3 = x_3 + x_4,\\
\dot{x}_4 = x_3 + u.
\end{cases}$$

Сделайте замену переменных и запишите систему в базисе, составленному из столбцов матрицы управляемости.

Решение примера. Выпишем матрицу системы A, вектор-столбец b при скалярном управлении и матрицу управляемости $W = \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b & A^3b \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},\ W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8\\ 0 & 1 & 4 & 12\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы управляемости, например, раскрыв по первому столбцу. Получим $\det W = -1 \neq 0$. Значит, система управляема.

Сделаем замену переменных $x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \xi_3 g^3 + \xi_4 g^4$, где

$$g^1 = b = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix},\quad g^2 = Ab = \begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 1\\ 0 \end{pmatrix},\quad g^3 = A^2b = \begin{pmatrix} 4\\ 4\\ 1\\ 1 \end{pmatrix},\quad g^4 = A^3b = \begin{pmatrix} 8\\ 12\\ 2\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим разложение вектора $g^5 = Ag^4 = A^4b = \begin{pmatrix}16 & 32 & 3 & 2\end{pmatrix}^\top$ по базису $\{g^1, g^2, g^3, g^4\}$. Получим $g^5 = 4g^1 - 7g^3 + 5g^4$. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\xi}_3 g^3 + \dot{\xi}_4 g^4 = Ax + bu = \\ &= \xi_1 Ag^1 + \xi_2 Ag^2 + \xi_3 Ag^3 + \xi_4 Ag^4 + bu = \\ &= \xi_1 g^2 + \xi_2 g^3 + \xi_3 g^4 + \xi_4(4g^1 - 7g^3 + 5g^4) + g^1 u.\end{aligned}$$

Приводя подобные члены при соответствующих базисных векторах, получим исходную систему в новом базисе

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= 4\xi_4 + u,\\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1,\\ \dot{\xi}_3 &= \xi_2 - 7\xi_4,\\ \dot{\xi}_4 &= \xi_3 + 5\xi_4,\end{aligned} \qquad A_g = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{pmatrix}, \quad b_g = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Проверим, что коэффициенты при ξ_4 в правой части системы являются коэффициентами характеристического полинома $|A - \lambda E|$.

$$\begin{aligned}|A - \lambda E| &= \begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)^2(\lambda^2 - \lambda - 1) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 7\lambda^2 - 4.\end{aligned}$$

⊡

Покажем теперь, что существует базис $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ и замена переменных $x = F\eta$, где $F = \begin{pmatrix}f^1 & f^2 & \ldots & f^n\end{pmatrix}$ и $\eta = \begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_n\end{pmatrix}^\top$, при которой система (3) имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2,\\ \dot{\eta}_2 &= \eta_3,\\ \dot{\eta}_3 &= \eta_4,\\ &\ldots\\ \dot{\eta}_{n-1} &= \eta_n,\\ \dot{\eta}_n &= -a_n\eta_1 - a_{n-1}\eta_2 - \ldots - a_1\eta_n + u,\end{aligned} \tag{5}$$

а матрица системы A_f будет иметь вид

$$A_f = A_g^\top = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1\end{pmatrix}.$$

Проделаем процедуру, аналогичную проведенной ранее для базиса $\{g^1, g^2, \ldots, g^n\}$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\eta}_1 f^1 + \dot{\eta}_2 f^2 + \dot{\eta}_3 f^3 + \cdots + \dot{\eta}_{n-1} f^{n-1} + \dot{\eta}_n f^n = \\ &= \eta_2 f^1 + \eta_3 f^2 + \eta_4 f^3 + \cdots + \eta_n f^{n-1} + (-a_n\eta_1 - a_{n-1}\eta_2 - \ldots - a_1\eta_n + u) f^n = Ax + bu = \\ &= \eta_1 A f^1 + \eta_2 A f^2 + \cdots + \eta_{n-1} A f^{n-1} + \eta_n A f^n + bu.\end{aligned}$$

Приравнивая векторные коэффициенты при $u, \eta_n, \eta_{n-1}, \ldots, \eta_1$, получим

$$\begin{aligned} f^n &= b = g^1, \\ f^{n-1} - a_1 f^n &= A f^n \qquad \Rightarrow f^{n-1} = A f^n + a_1 f^n = A g^1 + a_1 g^1 = g^2 + a_1 g^1, \\ f^{n-2} - a_2 f^n &= A f^{n-1} \qquad \Rightarrow f^{n-2} = A f^{n-1} + a_2 f^n = g^3 + a_1 g^2 + a_2 g^1, \\ &\cdots \\ f^1 - a_{n-1} f^n &= A f^2 \qquad \Rightarrow f^1 = A f^2 + a_{n-1} f^n = g^n + a_1 g^{n-1} + \ldots + a_{n-1} g^1, \\ -a_n f^n &= A f^1 \qquad \Rightarrow 0 = A f^1 + a_n f^n = g^n + a_1 g^{n-1} + \ldots + a_{n-1} g^2 + a_n g^1. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что последнее соотношение выполняется в силу теоремы Гамильтона–Кэли.

Замену переменных $x = F\eta$ можно представить в форме $x = WP\eta$, где W — матрица управляемости системы (3) в исходном базисе и

$$P = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_1 & 1 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det F = \det W \cdot \det P = \det W \neq 0$, набор $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ состоит из линейно независимых векторов и может рассматриваться в качестве базиса.

Теорема 2.3. *Базис, в котором система* (3) *приводима к виду* (5)*, существует тогда и только тогда, когда пара A, b управляема.*

Замечание. Система уравнений (5) представима в виде скалярного уравнения n-го порядка

$$\eta_1^{(n)} + a_1 \eta_1^{(n-1)} + a_2 \eta_1^{(n-2)} + \cdots a_n \eta_1 = u.$$

Литература

Монографии

[1] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем, М.: МАКС Пресс, 2012, — 240 с., ISBN 978-5-317-03976-9.

[2] *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, — 376 с., ISBN 978-5-9221-0401-2.

[3] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление (издание 3-е исправленное и дополненное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — 408 с., ISBN 978-5-9221-0598-7.

[4] *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление (под редакцией Н. П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М.: Издательство МЦНМО, 2008, — 320 с., ISBN 978-5-94057-367-8.

[5] *Егоров А. И.* Основы теории управления, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — с. 504, ISBN 978-5-9221-0543-9.

[6] *Афанасьев В. Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими ситемами, М.: КРАСАНД, 2020, — с. 480, ISBN 978-5-396-01013-0.

Сборники задач

[7] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие (издание 3-е исправленное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, — 256 с., ISBN 978-5-9221-0992-5.

[8] *Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю., Тихомиров В. М., Черкасов О. Ю.* Механика управляемых систем. Сбоник задач, (под редакцией В. В. Александрова, Ю. В. Болотина), М.: МАКС Пресс, 2013, — 140 с., ISBN 978-5-317-04452-7.

Справочники

[9] *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов, М.: «Наука», 1986, — 192 с.