3 Стабилизация

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in KC \mid u(t) \in \mathbb{R}^s\}, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор-столбец координат, описывающих состояние управляемого объекта, u — s-мерный вектор-столбец управляющих воздействий, A — постоянная матрица размерности $n \times n$, B — постоянная матрица размерности $n \times s$, KC — пространство векторных кусочно-непрерывных функций.

Определение 3.1. Будем говорить, что линейная система (1) *стабилизируема*, если существует такая матрица C, что при $u = Cx$ тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание. Управление вида $u = Cx$ называют *управлением в форме обратной связи* по известному вектору состояния.

Теорема 3.1. *Если система* (1) *управляема, то она стабилизируема. При этом выбором матрицы C можно обеспечить любую скорость стабилизации, то есть сделать вещественные части корней характеристического уравнения $|A + BC - \lambda E|$ отрицательными и сколь угодно большими по модулю.*

Замечание. Обратное утверждение неверно. Если система стабилизируема, то, либо она управляема, либо не управляема и тривиальное решение неуправляемой подсистемы асимптотически устойчиво.

Пример 3.1. *Стабилизируйте положение равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$ системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \end{cases}$$

если известен вектор состояния.

Решение примера. Выпишем матрицу A системы, вектор b при скалярном управлении и матрицу управляемости W

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} W = 2$, система управляема. Рассмотрим управление в форме обратной связи по известному вектору состояния $u = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Тогда матрица системы примет вид

$$A_u = A + BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_1 + 1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad |A_u - \lambda E| = (c_2 - \lambda)(-\lambda) - (c_1 + 1) = \lambda^2 - c_2\lambda - (c_1 + 1).$$

Для того, чтобы характеристический полином $|A_u - \lambda E|$ обладал корнями с отрицательной действительной частью достаточно, чтобы свободный член и коэффициент при λ были положительными. Значит, система стабилизируема при $c_1 < -1, c_2 < 0$. ⊡

Литература

Монографии

[1] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем, М.: МАКС Пресс, 2012, — 240 с., ISBN 978-5-317-03976-9.

[2] *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, — 376 с., ISBN 978-5-9221-0401-2.

[3] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление (издание 3-е исправленное и дополненное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — 408 с., ISBN 978-5-9221-0598-7.

[4] *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление (под редакцией Н. П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М.: Издательство МЦНМО, 2008, — 320 с., ISBN 978-5-94057-367-8.

[5] *Егоров А. И.* Основы теории управления, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — с. 504, ISBN 978-5-9221-0543-9.

[6] *Афанасьев В. Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими ситемами, М.: КРАСАНД, 2020, — с. 480, ISBN 978-5-396-01013-0.

Сборники задач

[7] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие (издание 3-е исправленное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, — 256 с., ISBN 978-5-9221-0992-5.

[8] *Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю., Тихомиров В. М., Черкасов О. Ю.* Механика управляемых систем. Сбоник задач, (под редакцией В. В. Александрова, Ю. В. Болотина), М.: МАКС Пресс, 2013, — 140 с., ISBN 978-5-317-04452-7.

Справочники

[9] *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов, М.: «Наука», 1986, — 192 с.