4 Декомпозиция по управлению

Рассмотрим стационарную систему n-го порядка со скалярным управлением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu, \tag{1}$$

где A — постоянная матрицы размерности $n \times n$, b — вектор-столбец размерности $n \times 1$.

Пусть система не управляема и $\operatorname{rank} W = m < n$. Это означает, что первые m столбцов матрицы W линейно независимые, и их можно рассматривать в качестве первых базисных векторов $\{g^1, g^2, \ldots, g^m\}$.

Замечание. Подпространство $\mathbb{R}^m_g$, натянутое на базисные вектора $\{g^1, g^2, \ldots, g^m\}$, называется *инвариантным управляемым подпространством*. Это подпространство инвариантно к преобразованию A и e^{At}.

Теорема 4.1 (О декомпозиции по управлению)**.** *Если система* (1) *не управляема, то существует базис, в котором она представима в виде двух подсистем, одна из которых управляема в своем подпространстве, а другая является не управляемой:*

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_{\xi\xi}\xi + A_{\xi\eta}\eta + B_\xi u, \\ \dot{\eta} &= A_{\eta\eta}\eta, \end{aligned} \tag{2}$$

где ξ — m-мерный вектор состояния управляемой подсистемы, причем пара $(A_{\xi\xi}, B_\xi)$ управляема, η — $(n-m)$-мерный вектор состояния неуправляемой подсистемы.

Пример 4.1. *Проведите анализ управляемости системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3. \end{cases}$$

В случае отсутствия управляемости, проведите декомпозицию системы по управлению.

Решение примера. Выпишем матрицу системы A и вектор-столбец b при скалярном управлении и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И вычислим матрицу управляемости $W = \begin{pmatrix} g^1 & g^2 & g^3 \end{pmatrix}$

$$g^1 = b, \quad g^2 = Ab = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g^3 = A^2 b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} W = 2$, система не является управляемой.

Проведем декомпозицию по управлению. Приведем систему к базису $\{g^1, g^2, f\}$), где $f = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}^\top$ ортогонален g^1, g^2. Записав соответствующие скалярные произведения $(f, g^1) = (f, g^2) = 0$, получим $\alpha_2 = 0, \alpha_1 - \alpha_3 = 0$. То есть $f = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top$.

Заметим, что $g^3 = 2g^1$, а

$$Af = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = g^2.$$

Сделаем замену переменных $x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \eta f$:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_2 + \eta, \\ x_2 = \xi_1 + \xi_2, \\ x_3 = -\xi_2 + \eta. \end{cases}$$

Для записи системы в новых переменных, подставим замену переменных в правую и левую части выражения $\dot{x} = Ax + bu$ и приведем подобные члены при соответствующих базисных векторах g^1, g^2, f

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\eta} f = Ax + bu = \xi_1 g^2 + \xi_2 2g^1 + \eta g^2 + g^1 u.$$

В новом базисе система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\xi_2 + u, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \eta, \\ \dot{\eta} = 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{cases} \xi_1 = -\dfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2}x_3, \\ \xi_2 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_3, \\ \eta = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

Подсистема (ξ_1, ξ_2) является управляемой, переменная η является неуправляемой. ⊡

Пример 4.2. *Исследуйте на управляемость систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 + x_3. \end{cases}$$

В случае отсутствия управляемости проведите декомпозицию по управлению.

Решение примера.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 1 & 3\\0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Так как $\operatorname{rank} W = 2$, система не является управляемой. Проведем декомпозицию по управлению, перейдя в базис $\{g^1, g^2, f\}$.

$$g^1 = b = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad g^2 = Ab = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad Ag^2 = A^2b = \begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix} = g^1 + 2g^2.$$

Сделаем замену переменных $x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \eta f$ и запишем систему в новых переменных (ξ_1, ξ_2 — управляемые, η — неуправляемая). 1) Случай $f = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^\top$.

$$Af = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = 3g^1 + g^2 + 2f.$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\eta} f^1 = Ax + bu = \xi_1 g^2 + \xi_2(g^1 + 2g^2) + \eta(3g^1 + g^2 + 2f^1) + g^1 u.$$

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \xi_2 + 3\eta + u,\\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + 2\xi_2 + \eta,\\ \dot{\eta} = 2\eta,\end{cases} \quad \begin{cases}x_1 = \xi_2 + \eta,\\ x_2 = \xi_1 + \eta,\\ x_3 = -\xi_2 + \eta,\end{cases} \quad \begin{cases}\xi_1 = -\dfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \dfrac{1}{2}x_3,\\ \xi_2 = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_3,\\ \eta = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_3.\end{cases}$$

2) Случай $f = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^\top$.

$$Af = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = 3g^1 + 2f.$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\eta} f^1 = Ax + bu = \xi_1 g^2 + \xi_2(g^1 + 2g^2) + \eta(3g^1 + 2f^1) + g^1 u.$$

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1 = \xi_2 + 3\eta + u,\\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + 2\xi_2,\\ \dot{\eta} = 2\eta,\end{cases} \quad \begin{cases}x_1 = \xi_2 + \eta,\\ x_2 = \xi_1,\\ x_3 = -\xi_2,\end{cases} \quad \begin{cases}\xi_1 = x_2 + x_3,\\ \xi_2 = -x_3,\\ \eta = x_1 + x_3.\end{cases}$$

$\boxdot$

4.1 Стабилизация неуправляемой системы

Теорема 4.2. *Если в системе* (2) *матрица* $A_{\eta\eta}$ *асимптотически устойчива, то система* (2) *и, соответственно, система* (1) *стабилизируема при помощи обратной связи по известному вектору состояния.*

Замечание. Скорость стабилизации ограничена корнями характеристического полинома $|A_{\eta\eta} - \lambda E|$.

Пример 4.3. *Стабилизируйте положение равновесия* $x_1 = 0, x_2 = 0$ *системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

если известен вектор состояния.

Решение примера. Выпишем матрицу системы A, вектор-столбец b и матрицу управляемости W

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} W = 1$, система не управляема. Отметим, что переменная x_1 является управляемой, а переменная x_2 — нет. То есть система уже декомпозирована по управлению. При этом тривиальное решение $x_2 = 0$ уравнения, описывающего неуправляемое подпространство, асимптотически устойчиво. Рассмотрим $u = Cx = c_1 x_1$, где $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_u = A + bC = \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A_u - \lambda E| = (c_1 - \lambda)(-1 - \lambda) = (\lambda - c_1)(\lambda + 1).$$

Видно, что характеристическое уравнение имеет два корня; $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = c_1$. Таким образом, система стабилизируема при $c_1 < 0$. ⊡

Литература

Монографии

[1] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем, М.: МАКС Пресс, 2012, — 240 с., ISBN 978-5-317-03976-9.

[2] *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, — 376 с., ISBN 978-5-9221-0401-2.

[3] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление (издание 3-е исправленное и дополненное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — 408 с., ISBN 978-5-9221-0598-7.

[4] *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление (под редакцией Н. П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М.: Издательство МЦНМО, 2008, — 320 с., ISBN 978-5-94057-367-8.

[5] *Егоров А. И.* Основы теории управления, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — с. 504, ISBN 978-5-9221-0543-9.

[6] *Афанасьев В. Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими ситемами, М.: КРАСАНД, 2020, — с. 480, ISBN 978-5-396-01013-0.

Сборники задач

[7] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие (издание 3-е исправленное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, — 256 с., ISBN 978-5-9221-0992-5.

[8] *Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю., Тихомиров В. М., Черкасов О. Ю.* Механика управляемых систем. Сбоник задач, (под редакцией В. В. Александрова, Ю. В. Болотина), М.: МАКС Пресс, 2013, — 140 с., ISBN 978-5-317-04452-7.

Справочники

[9] *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов, М.: «Наука», 1986, — 192 с.