11 Фильтр Калмана

11.1 Непрерывный фильтр Калмана

Рассмотрим непрерывную линейную динамическую систему, поведение которой описывается вектором состояния:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + q(t),$$

где $q(t)$ — нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^\top(s)] = Q(t)\delta(t-s), \quad Q(t) \geq 0.$$

Также известны

$$\tilde{x}(t_0) = M[x_0(t)], \quad P(t_0) = M[(x(t_0) - \tilde{x}(t_0))(x(t_0) - \tilde{x}(t_0))^\top] \geq 0.$$

На интервале $[t_0, t]$ непрерывно поступает информация:

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t),$$

где погрешность измерений $r(t)$ — нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[r(t)] = 0, \quad M[r(t)r^\top(s)] = R(t)\delta(t-s), \quad R(t) > 0.$$

Кроме того $\forall t \geq t_0$

$$M[x(t_0)q^\top(t)] = 0, \quad M[x(t_0)r^\top(t)] = 0$$

и $\forall t, s$

$$M[r(t)q^T(s)] = 0$$

Требуется в любой момент времени $t \geq t_0$ определить оценку $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности и ортогональности.

Определение 11.1 (Непрерывный фильтр Калмана)**.** Непрерывным фильтром Калмана называется алгоритм оценивания, описываемый соотношениями:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + K(z - Hx), \quad \tilde{x}\,(t_0) = \tilde{x}_0,$$
$$K = P_x H^T R^{-1}$$
$$\dot{P}_x = AP_x + P_x A^T + Q - P_x H^T R^{-1} H P_x, \quad P_x\,(t_0) = P_0$$

Замечание. Дифференциальное уравнение для ковариационной матрицу ошибок оценки называется уравнением Риккати.

Теорема 11.1. *Пусть $P(t)$ — положительно-определенная и ограниченная для всех $t > t_0$ матрица ($\sigma_1^2 E < P(t) < \sigma_2^2 E$, $\sigma_{1,2} = \text{const}$), являющаяся решением уравнения Риккати:*

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP.$$

Тогда однородное уравнение ошибок

$$\Delta\dot{x} = (A - KH)\Delta x$$

устойчиво. Если пара (A, H) — наблюдаема, тогда это уравнение асимптотически устойчиво.

Теорема 11.2. *Пусть P_1, P_2 — два решения уравнения Риккати*

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP,$$

соответствующие двум возможным начальным значениям $P_1(t_0)$ и $P_2(t_0)$. Решения однородных уравнений

$$\Delta\dot{x} = \left(A - P_1 H^T R^{-1} H\right), \quad \Delta\dot{x} = \left(A - P_2 H^T R^{-1} H\right)$$

устойчивы (соответственно асимптотически устойчивы). Тогда разность $|P_1 - P_2|$ ограничена (соответственно $|P_1 - P_2| \to 0$ при $t \to \infty$).

Теорема 11.3. *Рассмотрим стационарный случай: A, H, Q, R — const . Пусть пара (A, H) — наблюдаема, пара (A, B) — управляема (здесь $BB^\top = Q$), тогда*

1) существует единственное установившееся решение P_∞ уравнения $\dot{P} = AP + PA^T - Q + PH^T R^{-1} HP, \lim_{t\to\infty} P(t) = P_\infty$ удовлетворяющее уравнению

$$AP_\infty + P_\infty A^T - Q + P_\infty H^T R^{-1} HP_\infty = 0$$

2) однородное уравнение

$$\Delta\dot{x} = \left(A - P_\infty H^T R^{-1} H\right)\Delta x$$

асимптотически устойчиво.

11.2 Дискретный фильтр Калмана

Рассмотрим линейную динамическую систему, которая в дискретном времени подчиняется уравнению:

$$x_{j+1} = \Phi_j x_j + q_j,$$

где x_j — вектор состояния в момент времени t_j, q_j — дискретный белый шум с известной интенсивностью — ковариационной матрицей Q_j, Φ_j — известная переходная матрица. Заданы $\tilde{x}_0 = M[x_0]$, $P_0 = M[(x_0 - \tilde{x}_0)(x_0 - \tilde{x}_0)^\top]$. В момент времени $j = 0, 1, 2, \ldots$ поступает информация $z_0, z_1, z_2, \ldots$

$$z_j = H_j x_j + r_j.$$

Погрешность информации r_j — некоррелированный во времени вектор с нулевым средним и известной интенсивностью $R_j : M[r_i r_j^\top] = R_j \delta_{ij}$. Кроме того, полагаем $M[x_i r_j^\top] = 0$. Требуется в каждый момент времени j получить оценку $\tilde{x}_j$, удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности, оптимальности (условию минимума дисперсии ошибки оценивания).

Введем обозначения:

$\tilde{x}_j^- = M[x/z_0, z_1, \ldots, z_{j-1}]$ — априорная оценка вектора x в момент времени j, использует измерения $z_0, \ldots, z_{j-1}$

$\tilde{x}_j^+ = M[x/z_0, z_1, \ldots, z_j]$ — апостериорная оценка вектора x в момент времени j, использует измерения $z_0, \ldots, z_j$;

P_j^- — априорная оценка ковариационной матрицы вектора x в момент времени j;

P_j^+ — апостериорная оценка ковариационной матрицы вектора x в момент времени j.

Теорема 11.4 (Дискретный фильтр Калмана)**.** *Оптимальная оценка x_j дается дискретным фильтром Калмана, описываемым следующими соотношениями:*

1) этап инициализации

$$\tilde{x}_0^- = \tilde{x}_0$$
$$P_0^- = P_0$$

2) этап коррекции

$$\tilde{x}_j^+ = \tilde{x}_j^- + K_j \left(z_j - H_j \tilde{x}_j^-\right)$$
$$K_j = P_j^- H_j^T \left(H_j P_j^- H_j^T + R_j\right)^{-1}$$
$$P_j^+ = \left(E - K_j H_j\right) P_j^-$$

3) этап прогноза

$$\tilde{x}_{j+1}^- = \Phi_j \tilde{x}_j^+$$
$$P_{j+1}^- = \Phi_j P_j \Phi_j^T + Q_j$$

Теорема 11.5 (Стационарный дискретный фильтр Калмана)**.** *Пусть $\Phi_j = \Phi = \text{const}$, $H_j = H = \text{const}$, $Q_j = Q = \text{const}$, $R_j = R = \text{const}$. Так как Q является положительно определенной матрицей, существует матрица B такая, что $BB^\top = Q$. Матрица B называется квадратным корнем из Q. Отметим, что представление $BB^\top = Q$ неоднозначное. Пусть пара (Φ, H) — наблюдаема, пара (Φ, B) — управляема. Тогда при бесконечном времени наблюдения*

1) существуют пределы матриц P_j^-, P_j^+, K_j, определяемые соотношениями

$$P_\infty^- = \Phi P_\infty^+ \Phi^\top + Q > 0,$$
$$P_\infty^+ = (E - K_\infty H) P_\infty^- > 0,$$
$$K_\infty = P_\infty^- H^\top (H P_\infty^- H^\top + R)^{-1}.$$

3) Уравнения ошибок

$$\Delta x_{j+1}^- = \Phi \Delta x_j^+ + q_j$$
$$\Delta x_j^+ = (E - K_\infty H)\Delta x_j^- - K_\infty r_j$$

таковы, что при $q_j = 0$, $r_j = 0$ *выполнено*

$$\Delta x_j^-, \Delta x_j^+ \to 0, \text{ при } j \to \infty.$$

Пример 11.1. *Методом калмановской фильтрации построить оценку* $\tilde{x}$ *величины* x *и найти ошибку* $\sigma_{\Delta x}$ *оценки в момент времени* $t = 1$ *:*

$$\dot{x} = -x + q, \quad M[q] = 0, \quad M[q(t)q(s)] = \delta(t-s)$$
$$z = x + r, \quad M[r] = 0, \quad M[r(t)r(s)] = \delta(t-s)$$
$$\mu_x(0) = 1, \quad \sigma_x(0) = 1, \quad z(0) = 2$$

Решение примера. Оценка $\tilde{x}(1)$ находится в два этапа. Первый этап — этап коррекции априорной информации, доступной в момент времени $t = 0$, по данным измерения $z(0) = 2$ в тот же момент времени. Учитывая, что $\tilde{x}^-(0) = \mu_x(0), P^-(0) = \sigma_x^2(0), H = 1, Q = 1, R = 1$, воспользуемся формулами этапа коррекции дискретного фильтра Калмана:

$$K = P^-(0)H^T \left(HP^-(0)H^T + R\right)^{-1} = 1/2,$$
$$P^+(0) = (1 - KH)P^-(0) = 1/2,$$
$$\tilde{x}^+(0) = \tilde{x}^-(0) + K\left(z(0) - H\tilde{x}^-(0)\right) = 3/2.$$

Второй этап — этап прогноза на момент времени $t = 1$. Для этого необходимо решить уравнение

$$\dot{\mu}_x = -\mu_x$$

с начальными условиями $\mu_x(0) = \tilde{x}^+(0)$ и получить значение $\mu_x(t)$ при $t = 1$. Решение данного дифференциального уравнения с начальными условиями имеет вид

$$\mu_x(t) = \tilde{x}^+(0)e^{-t} = \frac{3}{2}e^{-t}$$

В момент времени $t = 1$ получаем $\tilde{x} = \mu_x(1) = \frac{3}{2}e^{-1}$. Ковариация ошибки оценки удовлетворяет дисперсионному уравнению:

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q \text{ или } \dot{P} = -2P + \frac{1}{2}.$$

Решив данное уравнение с начальными условиями $P^+(0)$, получим

$$P(t) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в момент времени $t = 1$ получаем $P(1) = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$\sigma_{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\boxdot$

Литература

Монографии

[1] *Александров В. В., Лемак С. С., Парусников Н. А.* Лекции по механике управляемых систем, М.: МАКС Пресс, 2012, — 240 с., ISBN 978-5-317-03976-9.

[2] *Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.* Оптимальное управление движением, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, — 376 с., ISBN 978-5-9221-0401-2.

[3] *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление (издание 3-е исправленное и дополненное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — 408 с., ISBN 978-5-9221-0598-7.

[4] *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление (под редакцией Н. П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М.: Издательство МЦНМО, 2008, — 320 с., ISBN 978-5-94057-367-8.

[5] *Егоров А. И.* Основы теории управления, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007, — с. 504, ISBN 978-5-9221-0543-9.

[6] *Афанасьев В. Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими ситемами, М.: КРАСАНД, 2020, — с. 480, ISBN 978-5-396-01013-0.

Сборники задач

[7] *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие (издание 3-е исправленное), М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008, — 256 с., ISBN 978-5-9221-0992-5.

[8] *Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю., Тихомиров В. М., Черкасов О. Ю.* Механика управляемых систем. Сбоник задач, (под редакцией В. В. Александрова, Ю. В. Болотина), М.: МАКС Пресс, 2013, — 140 с., ISBN 978-5-317-04452-7.

Справочники

[9] *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов, М.: «Наука», 1986, — 192 с.