

# ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА

## АНАЛИЗ И СИНТЕЗ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

по дополнительным разделам  
основной специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин  
и смежной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

### 1. ТЕОРИЯ

#### 1.1. Анализ движения и устойчивости

##### **1. Методы построения приближенных математических моделей динамических систем**

Фракционный анализ. Математические методы разделения движений. Регулярные и сингулярные возмущения по малому параметру. ([36], гл. I, § 2; [15], гл. 3, § 28) Теорема Пуанкаре об аналитической зависимости решения системы дифференциальных уравнений от малого параметра и ее приложения. ([36], гл. II, §§ 3, 4; [15], гл. 3, § 29) Теория Тихонова-Васильевой для систем с одним малым параметром и иерархической структурой малых параметров при производных. ([36], гл. IV, § 11, п.п. 11.1, 11.2, § 12, п. 12.3; [15], гл. 3, § 33; [13], гл. 1, п. 1.3, с. 31–33) Разделение движений в системах с разрывными правыми частями. ([15], гл. 3, § 36) Метод осреднения в системах с одной и несколькими быстрыми фазами. Осреднение в резонансном случае для систем с постоянными частотами. ([36], гл. III, §§ 6, 7, 9; [15], гл. 3, §§ 38, 40, 41)

##### **2. Метод функций Ляпунова**

Теорема об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ([28], гл. VI, § 70) Теорема Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости и теорема Красовского о неустойчивости для стационарных систем и систем с периодическими по времени правыми частями. Приложения к задачам о влиянии структуры сил на устойчивость движения механических систем. ([26], гл. III, §§ 14, 15; [15], гл. 2, § 18) Теоремы об экспоненциальной устойчивости. ([19], гл. IV, § 8)

##### **3. Периодические движения и их устойчивость**

Предельные циклы и автоколебания. ([7], гл. III, § 6). Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке и ее связь с теорией отображений Пуанкаре для периодического решения автономной системы. ([15], гл. 1, § 7, гл. 2, §§ 23–25; [19], гл. III, § 15) Теоремы об устойчивости и асимптотической орбитальной устойчивости периодического решения нелинейной системы (без доказательства). Признак Пуанкаре устойчивости предельного цикла на фазовой плоскости. ([15], гл. 2, § 26; [19], гл. IV, §§ 18–20)

##### **4\*. Линейные нестационарные системы дифференциальных уравнений**

Классы систем, интегрируемых в замкнутой форме. Применение к задачам механики. Приводимость линейных однородных нестационарных систем. Приводимость линейных систем, нестационарных по управлению и наблюдению, к системам того же порядка или к системам более высокого порядка. ([23], гл. I, §§ 2, 3; гл. III, § 9; гл. IV, § 12)

##### **5\*. Методы анализа абсолютной (робастной) устойчивости**

Абсолютная устойчивость систем с неопределенными параметрами. Круговой и вариационный критерии абсолютной устойчивости. ([4], гл. II, § 4, п. 4.3, гл. VII, § 1, п. 1.5; [17], гл. I, § 1.1)

##### **6\*. Хаос в динамических системах**

Детерминированный хаос. Странные аттракторы в диссипативных системах ([8], лекции 3, 4). Логистическое отображение как пример возникновения хаоса по сценарию бифуркаций удвоения периода. ([15], гл. 1, § 9) Возникновение хаоса по сценарию

расщепления сепаратрис при периодических по времени возмущениях. Хаотические переходы в бистабильных системах на плоскости. Критерий Пуанкаре-Мельникова. ([15], гл. 3, §§ 31, 32)

## **I.2. Оценивание и обработка сигналов**

### **1. Статические методы оценивания**

Анализ задачи наименьших квадратов. Невырожденный и вырожденный случаи. Решение задачи наименьших квадратов посредством сингулярного разложения матриц. Псевдообратные матрицы. ([18], гл. 12; [27], гл. 2, 4, 7, 18; [49], гл. II, III) Метод наименьших модулей. Постановка задачи, свойства решения. Сведение к линейному программированию. ([34], гл. 4; [48], с. 294, 514)

### **2. Случайные процессы**

Процессы с ортогональными приращениями. Винеровские процессы. Белый шум. Стационарные случайные процессы и их спектральное представление. Спектральный метод определения реакции линейной системы на случайное возмущение. Факторизация спектральной плотности. ([47], гл. I, II)

### **3\*. Идентификация случайных процессов**

Классические методы спектрального оценивания. Периодограммные оценки спектральной плотности. ([47], гл. II) Параметрические методы спектрального оценивания случайных процессов. Построение формирующего фильтра авторегрессии методом наименьших квадратов. ([30], гл. 6, 7)

### **4\*. Цифровые фильтры**

Цифровые фильтры как методы обработки сигналов в дискретном времени. Передаточные функции и частотные характеристики. Сглаживающие, полосовые, дифференцирующие фильтры. Дискретизация данных, теорема отсчетов (Котельникова). ([45])

### **5\*. Гарантирующее оценивание**

Постановка задачи оптимального гарантирующего оценивания. «Схема бортиков». Полиэдральные ограничения. Сведение к линейному программированию. ([46]; [31], гл. 2, 3)

## **I.3. Оптимальное управление движением**

### **1. Принцип максимума Понтрягина**

Формулировка принципа максимума Понтрягина в лагранжевой и гамильтоновой формах. ([21], гл. II, §§ 2.4, 2.5; [4], гл. IV, §§ 1, 2, 3)

### **2. Оптимальная стабилизация линейных стохастических систем**

Теорема разделения. ([41], § 34)

### **3\*. Регулярный синтез управления по Болтянскому ([4], гл. V)**

### **4\*. Нерегулярные участки оптимального управления**

Особые экстремали и обобщенное необходимое условие Келли. ([10], гл. VIII, §§ 8.1, 8.4, 8.5 или [16], гл. II, § 5)

### **5\*. Динамические игры: позиционные и дифференциальные**

Минимаксная стабилизация и максиминное тестирование качества робастной стабилизации. ([40], гл. IV, V; [1]; [2])

## **II. ПРИЛОЖЕНИЯ**

### **II.1. Математические модели управляемого полета**

Полет в экваториальной плоскости. Геостационарный спутник. Положения углового равновесия на орбите и их устойчивость. ([4], [29]) Приближенные модели для разных

классов продольного движения самолета. ([36], гл. VI, § 21, п. 21.1) Двухуровневое управление планированием летательного аппарата. ([6], лекция 18). \*Стабилизация стационарных движений спутников при помощи магнитных моментов. ([32], [33])

## **II.2. Приближенные модели гироскопических систем**

Обоснование прецессионных уравнений гироскопических систем. ([24]) Прецессионная модель гироскопа в кардановом подвесе. ([35]) Систематические уходы гироскопа в кардановом подвесе. ([36], гл. II, § 4, п. 4.3)

## **II.3. Принципы работы инерциальных навигационных систем**

Устройство платформенных и бесплатформенных ИНС. Инерциальная навигация при движении в плоскости экватора (модельные уравнения и уравнения ошибок). ([11], гл II)

## **II.4\*. Динамика колесного аппарата**

Модель взаимодействия колеса с дорогой. Динамика автомобиля при заносе. ([37]; [38]; [14] или [13], гл. 4, п. 4.1)

## **II.5\*. Инерциальное управление баллистической ракетой**

Экстремальная задача А.Ю. Ишлинского. ([22], гл. I)

## **II.6\*. Оптимальное управление автомобилем**

Особое управление и четтеринг-режим (в кинематической постановке). ([20], Введение, гл. 3)

## **II.7\*. Спутниковая навигация**

Определение координат по кодовым измерениям спутниковой навигационной системы. ([12])

## **II.8\*. Математическое моделирование движений человека**

Моделирование усилий мышц как элементов системы управления. Описание удержания человеком равновесия и его движения в сагиттальной плоскости. ([25]; [50], гл. 5–10)

## **II.9\*. Элементы бионавигации**

Инерциальные механорецепторы. ([3]; [43]) Математическая модель Ходжкина-Хаксли формирования нервных импульсов. ([42], гл. 23, §§ 3, 7, 8). Управляемые переходы в бистабильных системах на плоскости. ([5]) Гальваническая коррекция нейронного управления установкой взора. ([44])

## **II.10\*. Основные соотношения авиационной гравиметрии**

Понятия нормального и аномального поля силы тяжести. Состав аэрогравиметрической системы. Основные уравнения аэрогравиметрии. Его решение с помощью сглаживающего фильтра Калмана. ([9])

## **II.11\*. Инерциальная навигация в пространстве**

Модельные уравнения инерциальной навигационной системы и уравнения ошибок. ([11], гл. II, III; [39], гл. III)

## ЛИТЕРАТУРА

1. \*Александров В.В. и др. Минимаксная стабилизация и максиминное тестирование линейных управляемых систем. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1999. № 5.
2. \*Александров В.В. и др. Максиминное тестирование точности стабилизации и седловые точки в геометрических играх. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 1.
3. \*Александров В.В., Александрова Т.Б., Мигунов С.С. О математической модели гравитоинерциального механорецептора. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 6.
4. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005.
5. \*Александров В.В., Бугров Д.И., Тихонова К.В. Задачи о детерминированном и хаотическом переходах в бистабильных системах на плоскости. Часть 1. Детерминированный переход в бистабильной системе. Компьютерный практикум. М.: Изд-во МГУ, 2017.
6. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. М.: КУРС, 2018.
7. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
8. \*Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. Саратов: Колледж, 2000.
9. \*Болотин Ю.В., Голован А.А., Парусников Н.А. Уравнения авиагравиметрии. Алгоритмы и результаты испытаний. М.: Препринт МГУ, 2002.
10. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
11. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 2020.
12. \*Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А., Трубников С.А. Математические модели и алгоритмы обработки измерений спутниковой навигационной системы GPS. Стандартный режим. М.: Препринт МГУ, 2001.
13. Влахова А.В. Математические модели движения колесных аппаратов. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2014.
14. \*Влахова А.В., Новожилов И.В. О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. Вып. 7.
15. Влахова А.В., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В. Колебания и фракционный анализ. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
17. \*Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
18. Голуб Дж., Лоун Ван Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
19. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1998.
20. \*Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений. // Кн. «Итоги науки и техники». 2002. Т. 90. № 5.
21. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
22. \*Ишлинский А.Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М.: Наука, 1968.
23. \*Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010.
24. Кобрин А.И., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В. О прецессионных уравнениях гироскопических систем. // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 2.

25. \*Копылов И.А., Кручинин П.А., Новожилов И.В. О реализуемости движений по Н.А. Бернштейну. // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 5.
26. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
27. Лоусон Ч, Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
28. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
29. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука. 1999.
30. \*Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990.
31. \*Матасов А.И. Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
32. \*Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации. // Космические исследования. 2020. Т. 58. № 3.
33. \*Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов. // ПММ. 2021. Т. 85. № 4.
34. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений: Квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983.
35. Новожилов И.В. О переходе к прецессионным уравнениям гироскопии на бесконечном интервале времени. // Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5.
36. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995.
37. \*Новожилов И.В. Качение колеса. // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4.
38. \*Новожилов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х. Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью. // Сб. научно-методических статей. М.: Изд-во МГУ, 2000. Вып. 23.
39. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982.
40. \*Петросян Л.А. и др. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
41. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1992.
42. \*Рубин А.Б. Биофизика. Т. 2. М.: КД «Университет», 2000.
43. \*Садовничий В.А., Александров В.В. и др. Математическая модель канала-отолитовой реакции на поворот головы в гравитационном поле. Отчет института механики МГУ № 4746, 2004.
44. \*Садовничий В.А., Александров В.В. и др. Гальваническая коррекция нейронного управления установкой взора (I, II). // I. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 6. II. Там же. 2023. № 2.
45. \*Хемминг Р. Цифровые фильтры. М.: Недра, 1987.
46. \*Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько ее нужно? как ее обрабатывать? М.: Наука, 1983.
47. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
48. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.
49. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear Estimation. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000.
50. \*Latash M., Zatsiorsky V. Biomechanics and Motor Control. Defining Central Concepts. Elsevier, 2015.

Знаком \* отмечены темы или вопросы, которые включаются в программу экзамена по согласованию с научным руководителем, и соответствующая литература.

Помимо обязательных тем и вопросов для сдачи экзамена следует выбрать не менее четырех тем, отмеченных \*.

**Составители:** д.ф.-м.н., профессор В.В. Александров, д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Болотин, д.ф.-м.н., профессор А.В. Влахова.

Программа утверждена протоколом № 6 заседания Ученого Совета механико-математического ф-та МГУ 30.09.2022