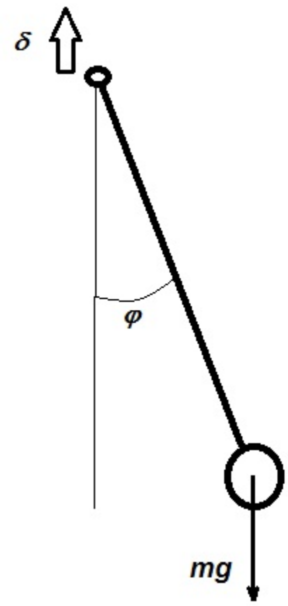
Параметрическая раскачка математического маятника на подвижном основании

Задача 1 (О параметрической раскачке маятника). Рассматривается математический маятник с массой m и длиной l помещенный в кабину поднимающегося лифта, движущегося относительно поверхности Земли либо равномерно, либо равноускоренно с ускорением δ. В оси маятника действует момент сил сухого трения M. Как надо управлять ускорением лифта, чтобы раскачать маятник максимально быстро?



Рассмотрим задачу в подвижной системе координат, связанной с лифтом. Введем силу инерции, которая при равномерном движении лифта равна 0, а при равноускоренном - равна $m\delta$ и направлена вниз параллельно силе тяжести. Тогда задача может рассматриваться так же, как и задача с переменной удельной силой тяжести, которая может принимать два значения: $g=g_o$ и $g=g_o+\delta$.

Рассмотрим случай, когда маятник не делает солнышко, т.е. угол отклонения маятника от вертикали $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Для раскачки маятника необходимо, чтобы приращение энергии за «период» колебаний маятника было максимальным. Для управления надо последовательно «включить» и «выключить» добавку гравитационного поля таким образом, чтобы приращение энергии за цикл было максимальным. Будем строить обратную связь по положению маятника, т.е. искать управление, при котором удельную силу тяжести необходимо изменять при достижении углом φ значений φ_1 и φ_2 соответственно.

Энергия маятника равна

$$E = mgH + \frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\varphi) + \frac{mv^2}{2}$$

Изменение энергии при переходе от равномерного к ускоренному движению лифта равно $\Delta E_1 = -ml\delta(1-\cos\varphi_1)$, а при обратном переходе $\Delta E_2 = ml\delta(1-\cos\varphi_2)$. Общее изменение энергии за цикл управления

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = ml\delta(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1) . \qquad (1)$$

ΔE максимальна при минимальном значении $\cos\varphi_1$ и максимальном значении $\cos\varphi_2$.

Максимальное значение $\cos\varphi_2=1$ достигается при значении $\varphi_2 = 0$, значит переходить к равномерному движению лифта надо каждый раз при прохождении маятником нижнего положения.

Минимальное значение $\cos\varphi_1$ достигается при минимальном и максимальном значениях φ , значит включать гравитационную добавку надо каждый раз при прохождении верхнего положения маятника, т.е. при $\varphi = \pm\varphi_a$, т.е. $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Итого: цикл системы управления составляет «полупериод» колебаний маятника, приращение энергии за это время $\Delta E = ml\delta(1-\cos\varphi_a)$.

Задачи для самостоятельного анализа

1. Как надо управлять ускорением лифта, чтобы погасить колебания маятника максимально быстро?
2. Рассмотрите маятник переменной длины с неподвижной точкой подвеса в поле силы тяжести. Длина маятника может принимать два значения l_o и $l_o + a$. Будет ли управление при котором маятник в нижнем положении укорачивается, а при нулевой скорости удлиняется раскачивать маятник? *Докажите оптимальность подобного управления.*

Дополнительные задачи

Задача 2 (О нахождении предельного цикла). Найти амплитуду периодического решения для малых колебаний маятника?

Введем последовательность модулей максимальных значений угла φ: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots$

Работа момента сил трения на перемещении между экстремумами с номерами k и $k+1$ равна $A_k = M(\varphi_k + \varphi_{k+1})$. Увеличение энергии маятника будет при $\Delta E_k > A_k$, т.е. при $ml\delta(1 - \cos\varphi_k) > M(\varphi_k + \varphi_{k+1})$.

При условии $\Delta E_k = A_k$ очевидно имеет место периодическое решение.

Рассмотрим случай $\varphi << 1$. Тогда $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, и из условия энергетического баланса следует соотношение

$$E_{k+1} = E_k + \Delta E - A$$

где E_k – потенциальная энергия в максимуме φ_k.

Тогда

$$mgl(1 - \cos\varphi_{k+1}) = mgl(1 - \cos\varphi_k) + m\delta l(1 - \cos\varphi_k) - M(\varphi_k + \varphi_{k+1})$$

для малых φ

$$mgl\frac{\varphi_{k+1}^2}{2} = mgl\frac{\varphi_k^2}{2} + m\delta l\frac{\varphi_k^2}{2} - M(\varphi_k + \varphi_{k+1}),$$

и тогда

$$\varphi_{k+1}^2 + \frac{2M}{mgl}\varphi_{k+1} = \left(1 + \frac{\delta}{g}\right)\varphi_k^2 - \frac{2M}{mgl}\varphi_k$$

Найдем амплитуду φ_p периодических колебаний, при котором $\varphi_k = \varphi_{k+1} = \varphi_p$, решив уравнение

$$\varphi_p^2 + \frac{2M}{mgl}\varphi_p = \left(1 + \frac{\delta}{g}\right)\varphi_p^2 - \frac{2M}{mgl}\varphi_p$$

и выбрав его нетривиальное решение

$$\varphi_{\text{p}} = \frac{4M}{ml\delta}$$

Определим период этих колебаний. При $g = g_o$ период колебаний математического маятника равен $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$, а при $g = g_o + \delta$ - $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0+\delta}}$. Тогда период колебаний управляемой системы равен $T = \dfrac{T_1+T_2}{2} = \pi\left(\sqrt{\dfrac{l}{g_0}} + \sqrt{\dfrac{l}{g_0+\delta}}\right)$. Таким образом:

$T = T(\delta) = T\left(\dfrac{4M}{ml\varphi_a}\right) = \widehat{T}(\varphi_a)$. Период и амплитуда колебаний зависят от δ и связаны между собой, то есть в отличие от колебаний математического маятника колебаний зависит от амплитуды.

Задача 3 (Неустойчивость предельного цикла). Что будет если управление задачи 1 при $\delta = \dfrac{4M}{ml\varphi_\text{р}}$ применить при начальных условиях $\varphi = \varphi_o$ и нулевой начальной скорости?

Рассмотрим случай $\varphi_o < \varphi_p$. Тогда $\Delta E < A$ и амплитуда убывает.

Если $\varphi_o > \varphi_p$. Тогда $\Delta E > A$ и амплитуда растет.

Дополнительные задачи для самостоятельного анализа

3. Опишите поведение маятника при «раскачивающем» управлении для различных начальных значений $\varphi = \varphi_o$ и нулевой начальной скорости? (Не забудьте про зону застоя для сил сухого трения)