Московский Государственный Университет
им. М.В.Ломоносова
механико – математический факультет

Механика управляемых систем

Краткое пособие по решению задач

Москва 2008

Глава 1

Стационарные решения динамических систем. Линеаризация

Управляемые динамические системы (УДС), как правило, описываются при помощи систем нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = f(y, u, t),$$

где y — вектор состояния размерности n, u — вектор управления размерности r, t — время, f — вектор-функция, принадлежащая определенному классу. В дальнейшем, если не оговорено иного, функцию f будем считать дифференцируемой функцией своих аргументов. Если правые части системы явным образом не зависят от времени, она называется автономной, в противном случае — НЕ автономной. В случае, когда управление выбрано, как функция времени и (или) фазовых координат, анализ движения УДС может производиться методами анализа систем дифференциальных уравнений.

Предположим, что исходя из некоторых соображений, например, простоты реализации или минимизации какой-то целевой функции, выбрано управление u^*, которое в дальнейшем будем называть желаемым, или программным управлением, а соответствующее ему движение УДС — желаемым, или программным, движением. В этом случае естественна постановка задачи анализа устойчивости желаемого движения. На первом этапе эта задача традиционно сводится к анализу устойчивости тривиального решения уравнения в отклонениях.

Рассмотрим разность между желаемым движением и реальным, сохранив индекс * для переменных, отвечающих желаемому движению: $x(t) = y(t) - y^*(t)$, где через $x(t)$ обозначено отклонение от желаемого движения. Отклонение управлений от желаемых обозначим через $w(t), w(t) = u(t) - u^*(t)$. Запишем дифференциальное уравнение в отклонениях:

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y^*}(t) = f(y^*, u^*, t).$$

Полагая отклонения управлений и фазовых траекторий малыми, разложим правую часть уравнения в ряд Тейлора, и, удерживая члена первого порядка малости, получим уравнение в отклонениях в виде

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. В большинстве задач данного сборника матрицы полагаются независимыми от времени.

В приложениях часто рассматривается задача линейного синтеза, или построения управления w в виде линейной обратной связи по отклонению x: $w = Kx$, где K — матрица, элементы которой подлежат выбору с целью обеспечения устойчивости тривиального решения уравнения в отклонениях.

Важным частным случаем программного движения является стационарное программное движение, при котором производные от фазовых координат, не являющихся циклическими, равны нулю, а от циклических — константам.

Напомним определения устойчивости.

Определение 1.1. *Тривиальное решение системы* $\dot{x} = f(x), f(0) = 0, x(t_0) \neq 0$ *называется устойчивым по Ляпунову, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из выполнения условия* $|x(t_0)| \leq \delta \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon\ \forall t > t_0$.

Определение 1.2. *Тривиальное решение называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и существует открытая окрестность нуля* X^0 *такая, что* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0 \forall x(t_0) \in X^0$.

Множество X^0 начальных условий, для которых выполнено условие асимптотической устойчивости, называют областью притяжения тривиального решения. Если это множество совпадает с пространством состояний, то решение $x(t) \equiv 0$ называют асимптотически устойчивым в целом, или глобально асимптотически устойчивым.

Для систем уравнений в отклонениях вида $\dot{x} = Ax$, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Тривиальное решение системы асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа* λ_i *матрицы* A *имеют отрицательные действительные части.*

Действительные части всех корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

с действительными коэффициентами будут отрицательны, если выполнен критерий Рауса-Гурвица.

Пример 1. *Система уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ m\dot{v} = -cv - mg\sin\theta, \\ mv\dot{\theta} = -mg\cos\theta \end{cases}$$

описывает движение материальной точки в вертикальной плоскости в идеальной жидкости под действием силы тяжести. Здесь x, y — горизонтальная и вертикальная координаты точки, v — модуль скорости точки, θ — угол наклона траектории, m — масса точки, g — ускорение свободного падения, c — коэффициент сопротивления. Найти стационарные решения системы и исследовать их устойчивость. Исследовать устойчивость в целом.

Решение:

Заметим, что координаты x и y являются циклическими, поэтому анализ устойчивости стационарных решений сводится к исследованию системы уравнений для переменных v и θ. Для удобства введем безразмерные скорость V и время τ по формулам $v = v^*V, t = t^*\tau$, где v^* и τ^* — масштабные коэффициенты. Выбирая масштабные коэффициенты так, чтобы было выполнено условие $\dfrac{gt^*}{v^*} = 1$, и вводя обозначение $k = \dfrac{ct^*}{m}$, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} \dot{V} = -kV - \sin\theta, \\ \dot{\theta} = -\dfrac{\cos\theta}{V}. \end{cases} \tag{1}$$

Стационарные решения системы определяются из условия равенства нулю правых частей. Получаем, что состояния равновесия системы имеют вид $(\frac{1}{k}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi l), l \in Z$. Всем этим состояниям отвечает движение вертикально вниз с постоянной скоростью. Характеристическое уравнение системы, линеаризованной в окрестности этого движения, запишется в виде $\lambda^2 + 2k\lambda + k^2 = 0$, откуда следует, что $\lambda_{1,2} = -k$, стационарное движение асимптотически устойчиво, и ему отвечает особая точка типа узла.

Для исследования глобальной устойчивости стационарного движения рассмотрим уравнение окружности $V = Const$ в полярных координатах (V, θ). Полная производная по времени от функции V в силу системы (1)

$$\frac{dV}{dt} = -V - \sin\theta$$

отрицательна при больших значениях V. Следовательно, при больших V, траектории системы (1) пересекают эту окружность снаружи внутрь, что доказывает неустойчивость бесконечно удаленной точки.

Для доказательства отсутствия у системы (1) предельных циклов воспользуемся критерием Дюлака [5]. Для этого необходимо подобрать функцию $B(V, \theta)$ такую, чтобы выражение

$$\frac{\partial(B(V,\theta)\dot{V})}{\partial V} + \frac{\partial(B(V,\theta)\dot{\theta})}{\partial\theta}$$

было знакопостоянным в некоторой области. Тогда в этой области предельные циклы отсутствуют. Легко проверить, что функция $B(V, \theta) = V$ удовлетворяет указанному условию. Следовательно, движение вертикально вниз с постоянной скоростью является асимптотически устойчивым в целом.

Пример 2. *На плоскости параметров (k_1, k_2) указать область устойчивости тривиального решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 + x_2, \\ \dot{x_2} = u_2 + x_2 \end{cases}$$

при использовании управления вида $u_1 = k_1x_1, u_2 = k_2x_1$.

Решение:

Запишем характеристическое уравнение для данной системы в виде $|A - \lambda E| = 0$, или

$$\left| \begin{pmatrix} k_1 - \lambda & 1 \\ k_1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - (k_1 + 1)\lambda + k_1 - k_2 = 0.$$

Условия отрицательности действительных частей корней этого уравнения задаются условиями $k_1 + 1 < 0, k_1 - k_2 > 0$. Область устойчивости представлена на рисунке 1.

Пример 3. *На плоскости параметров (k_1, k_2) указать область устойчивости тривиального решения системы*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_1 + x_2, \\ \dot{x_2} = u_2 + x_1 \end{cases}$$

с запасом 2 при использовании управления вида $u_1 = k_1x_1, u_2 = k_2x_2$.

Решение:

Характеристическое уравнение рассматриваемой системы имеет вид

$$\lambda^2 - (k_1 + k_2)\lambda + k_1k_2 - 1 - 0.$$

Для устойчивости тривиального решения исходной системы с запасом 2 требуется, чтобы действительные части корней этого уравнения были меньше (-2), что обеспечивается неравенствами $k_1 - k_2 > 0, k_1(2 + k_2) > -3 - 2k_2$.

Пример 4. *Найти значения параметра k, при которых выбором управления $u = kx$ удается достичь асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения*

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + u = 0.$$

Решение:
Характеристическое уравнение имеет вид $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, где $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = k$. Для отрицательности действительных частей этого уравнения необходимо и достаточно выполнения условий Рауса-Гурвица:

$$a_0 > 0, \quad D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \left| \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} \right| = 0, \quad D_3 = a_3 D_2 > 0.$$

В данном примере эти условия принимают вид

$$\begin{cases} 1 > 0, \\ 1 - k > 0, \\ k(1-k) > 0, \end{cases}$$

откуда получаем $k \in (0; 1)$.

Глава 2

Анализ наблюдаемости. Декомпозиция по наблюдению

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad z = Hx. \tag{2.1}$$

Здесь x – n-мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние системы, z – m-мерный вектор-столбец измерений (в подавляющем большинстве случаев $m < n$), A – постоянная матрица размерности $(n \times n)$, H – постоянная матрица размерности $(m \times n)$.

Определение 2.1. *Система (2.1) называется наблюдаемой в момент времени t, если существует конечный момент времени t_0 такой, что можно определить состояние системы $x(t)$ из наблюдения выходной функции $z(\tau)$ на отрезке $[t_0, t]$.*

Определение 2.2. *Матрица*

$$N = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \dots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix}$$

называется грамианом наблюдаемости.

Теорема 2.1. *Для наблюдаемости системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} N = n$.

Следствие. *При $m = 1$ условие наблюдаемости принимает вид* $\det N \neq 0$

Определение 2.3. *Канонической формой Фробениуса по наблюдению называется следующая система:*

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \alpha_n \xi_1 + \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \alpha_{n-1} \xi_1 + \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 = \alpha_{n-2} \xi_1 + \xi_4, \\ \dots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \alpha_2 \xi_1 + \xi_n, \\ \dot{\xi}_n = \alpha_1 \xi_1, \end{cases}$$
$$z = \xi_1$$

или в матричном виде:

$$\begin{array}{l} \dot{\xi} = A_\xi \xi \\ z = h^T \xi, \end{array} \quad \text{где} \quad A_\xi = \begin{pmatrix} \alpha_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Система (2.1) наблюдаема тогда и только тогда, когда ее можно записать в канонической форме Фробениуса по наблюдению.*

Теорема 2.3. *(О декомпозиции) Если система (2.1) не является полностью наблюдаемой, то она представима в виде двух подсистем, одна из которых полностью наблюдаема в своем подпространстве, а другая является ненаблюдаемой.*

Примечание. *Ранг грамиана наблюдаемости является мерой наблюдаемости и равен размерности наблюдаемого подпространства.*

Пример 1. *Система (2.1) наблюдаема. Привести ее к канонической форме Фробениуса по наблюдению.*

Решение:

Решение заключается в поиске базиса (замены переменных), в котором система примет канонический вид. В силу наблюдаемости базис $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$:

$$g_1 = h, g_2 = A^T g_1, \ldots, g_n = A^T g_{n-1}$$

является невырожденным. Введем новые координаты $\xi_i = x^T f_i, i = \overline{1, \ldots, n}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = x^T g_1 = x^T f_1,\\
&\xi_2 = \dot{\xi}_1 - \alpha_n \xi_1 = x^T (g_2 - \alpha_n g_1) = x^T f_2,\\
&\xi_3 = \dot{\xi}_2 - \alpha_{n-1} \xi_1 = x^T (g_3 - \alpha_n g_2 - \alpha_{n-1} g_1) = x^T f_3,\\
&\ldots\\
&\xi_{n-1} = \dot{\xi}_{n-2} - \alpha_3 \xi_1 = x^T (g_{n-1} - \alpha_n g_{n-2} - \alpha_{n-1} g_{n-3} - \ldots - \alpha_4 g_2 - \alpha_3 g_1) = x^T f_{n-1},\\
&\xi_n = \dot{\xi}_{n-1} - \alpha_2 \xi_1 = x^T (g_n - \alpha_n g_{n-1} - \alpha_{n-1} g_{n-2} - \ldots - \alpha_3 g_2 - \alpha_2 g_1) = x^T f_n,\\
&\dot{\xi}_n = x^T (g_{n+1} - \alpha_n g_n - \alpha_{n-1} g_{n-1} - \ldots - \alpha_3 g_3 - \alpha_2 g_2) = x^T \alpha_1 g_1 = \alpha_1 \xi_1.
\end{aligned}$$

Здесь α_i $(i = \overline{1, \ldots, n})$ – заранее вычисленные коэффициенты характеристического уравнения матрицы A.

Пример 2. *Исследовать на наблюдаемость.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3, \end{cases}$$
$$z = x_1$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\ h^T A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\\ h^T A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det N \neq 0$, таким образом, система наблюдаема.

Пример 3. *Исследовать на наблюдаемость. Если система не вполне наблюдаема, провести декомпозицию по наблюдению.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 = x_1 + x_3, \end{cases}$$
$$z = x_2$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} h^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\\ h^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\\ h^T A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rank} N = 2.$$

Так как rank $N = 2$, система не вполне наблюдаема. Проведем декомпозицию по наблюдению:

$$\begin{array}{lll} z = x_2, & y_1 = x_2, & x_1 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ \dot{z} = x_1 + x_2 + x_3, & y_2 = x_1 + x_3, & x_2 = y_1, \\ \ddot{z} = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, & y_3 = x_1 - x_3, & x_3 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \end{array}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_2, \\ \dot{y}_3 = y_1 - y_2, \end{cases}$$
$$z = y_1$$

Пример 4. *Исследовать на наблюдаемость. Измерение содержит постоянную погрешность.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases}$$
$$z = x_1 + C, \quad C = Const$$

Решение:
Введем новую переменную $x_3 = C$, $\dot{x}_3 = 0$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = 0, \end{cases}$$
$$z = x_1 + x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} h^T \\ h^T A \\ h^T A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } N = 3.$$

Таким образом система полностью наблюдаема.

Пример 5. *Исследовать на наблюдаемость. Измерение содержит нестационарную погрешность* ($\omega \neq 0$).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases}$$
$$z = x_1 + \sin \omega t.$$

Решение:
Введем новую переменную:

$$\begin{array}{lll} x_3 = \sin \omega t, & \dot{x}_3 = \omega \cos \omega t, & \dot{x}_3 = \omega x_4, \\ x_4 = \cos \omega t, & \dot{x}_4 = -\omega \sin \omega t, & \dot{x}_4 = -\omega x_3, \\ & & z = x_1 + x_3. \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} h^T \\ h^T A \\ h^T A^2 \\ h^T A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \omega \\ -1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\omega^3 \end{pmatrix},$$

$$detN = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ -1 & 0 & -\omega^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & \omega \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\omega^3 \end{vmatrix} = \omega(\omega^2 - 1)^2, \quad \omega \notin \{-1, 0, 1\}.$$

Глава 3

Анализ управляемости. Декомпозиция по управлению. Стабилизация

Анализ управляемости. Декомпозиция по управлению

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in KC | u(t) \in \mathbb{R}^s\}. \tag{3.1}$$

Здесь x – n-мерный вектор-столбец координат, описывающий состояние управляемого объекта, u – s-мерный вектор-столбец управляющих воздействий, A – постоянная матрица размерности $(n \times n)$, B – постоянная матрица размерности $(n \times s)$, KC – пространство векторных кусочно-непрерывных функций, $\mathbb{R}^s$ – s-мерное пространство позиционных управлений.

Определение 3.1. *Система* (3.1) *называется полностью управляемой, если ее можно перевести из любого начального состояния в любое конечное с помощью управления $u(\cdot) \in U$ за конечное время.*

Определение 3.2. *Матрица $W = (B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ называется грамианом управляемости.*

Теорема 3.1. *Для полной управляемости системы* (3.1) *необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank} W = n$.

Следствие. *При $s = 1$ критерий управляемости принимает вид:* $\det W \neq 0$.

Примечание. *Для того, чтобы система* (3.1) *при $s = 1$ была представима в виде одномерной управляемой системы, необходимо и достаточно, чтобы система была полностью управляемой.*

Теорема 3.2. *(О декомпозиции) Если система* (3.1) *не является полностью управляемой, то она представима в виде двух подсистем, одна из которых полностью управляема в своем подпространстве, а другая является неуправляемой.*

Примечание. *Ранг грамиана управляемости является мерой управляемости и равен размерности управляемого подпространства.*

Пример 1. *Провести анализ управляемости и декомпозицию системы по управлению*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_3 = -x_2 - x_3. \end{cases}$$

Решение:
Запишем систему в матричном виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и вычислим грамиан управляемости

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A^2b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rank} W = 2 \Rightarrow$ система не является полностью управляемой. Проведем декомпозицию по управлению. Приведем систему к базису $(g^1 = b, g^2 = Ag^1, f^1)$, где $f^1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}^T$ ортогонален g^1, g^2: $(f^1, g^1) = (f^1, g^2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0, \alpha_1 - \alpha_3 = 0$. То есть $f^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

$$Ag^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2g^1, \quad Af^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = g^2.$$

Сделаем замену переменных $x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \eta f^1$:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_2 + \eta, \\ x_2 = \xi_1 + \xi_2, \\ x_3 = -\xi_2 + \eta. \end{cases}$$

Для записи системы в новых переменных, подставим замену переменных в правую и левую части выражения $\dot{x} = Ax + bu$ и приведем подобные члены при соответствующих базисных векторах g^1, g^2, f^1:

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\eta} f^1 = Ax + bu = \xi_1 g^2 + \xi_2 2g^1 + \eta g^2 + g^1 u.$$

В новом базисе

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ \xi_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ \eta = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 2\xi_2 + u, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \eta, \\ \dot{\eta} = 0. \end{cases}$$

Подсистема (ξ_1, ξ_2) является полностью управляемой, переменная η является неуправляемой.

Пример 2. *Проанализировать управляемость. Декомпозировать систему по компонентам вектора управления. Разобрать два варианта: последовательную и параллельную (челночную) декомпозиции.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 = 2x_3 + x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 = 2x_4 + u_1. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 12 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad rkW = 4$$

$$g^1 = b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^2 = Ag^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g^3 = Ag^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$g^4 = Ag^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = 4g^1 - 8g^2 + 5g^3,$$

$$f^1 = b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f^2 = Af^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f^3 = Af^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1. Последовательная декомпозиция: базис $\{g^1, g^2, g^3, f^1\}$.

$$g^4 = 4g^1 - 8g^2 + 5g^3,\ f^2 = 6g^1 - 7g^2 + 2g^3 + f^1,\ x = \xi_1 g^1 + \xi_2 g^2 + \xi_3 g^3 + \eta_1 f^1,$$

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 g^1 + \dot{\xi}_2 g^2 + \dot{\xi}_3 g^3 + \dot{\eta}_1 f^1,$$

$$Ax + Bu = \xi_1 g^2 + \xi_2 g^3 + \xi_3(4g^1 - 8g^2 + 5g^3) + \eta_1(6g^1 - 7g^2 + 2g^3 + f^1),$$

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \\ x_2 = \eta_1, \\ x_3 = \xi_2 + 4\xi_3 + \eta_1, \\ x_4 = \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\xi}_1 = 4\xi_3 + 6\eta_1 + u_1, \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 - 8\xi_3 - 7\eta_1, \\ \dot{\xi}_3 = \xi_2 + 5\xi_3 + 2\eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = \eta_1 + u_2. \end{cases}$$

2. Параллельная (челночная) декомпозиция: базис $\{g^1, f^1, g^2, f^2\}$.

$$g^3 = -3g^1 + \frac{7}{2}g^2 - \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^2,\ f^3 = \frac{2}{3}g^1 - \frac{1}{3}g^2 - \frac{2}{3}f^1 + \frac{5}{3}f^2,$$

$$x = \xi_1 p^1 + \xi_2 p^2 + \eta_1 v^1 + \eta_2 v^2,$$

$$\begin{array}{l} p^1 = g^2 - \frac{7}{2}g^1 \\ p^2 = g^1 \\ v^1 = f^2 - \frac{5}{3}f^1 \\ v^2 = f^1 \end{array}, \quad x = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ -3/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = -3\xi_1 + \frac{7}{2}\xi_2 + \frac{2}{3}\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 + u_1, \\ \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\frac{2}{3}\eta_1 + \frac{5}{3}\eta_2 - \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2 + u_2. \end{cases}$$

Стабилизация положения равновесия

Определение 3.3. *Будем говорить, что линейная система* (3.1) *стабилизируема, если существует такая матрица K, что при $u = Kx$ тривиальное решение системы* (3.1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.3. *Если система* (3.1) *полностью управляема, то она стабилизируема.*

Примечание. *Обратное утверждение неверно. Если система стабилизируема, то либо она полностью управляема, либо не полностью управляема и тривиальное решение неуправляемой подсистемы асимптотически устойчиво.*

Пример 3. *Стабилизировать положение равновесия, если известен вектор состояния.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rankW = 2 \Rightarrow$ система вполне управляема. Рассмотрим $u = k_1 x_1 + k_2 x_2$

$$A_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 + 1 & k_2 \end{pmatrix}, \quad |A_u - \lambda E| = (k_2 - \lambda)(-\lambda) - (k_1 + 1) = \lambda^2 - k_2\lambda - (k_1 + 1).$$

Система стабилизируема при $k_1 < -1, k_2 < 0$.

Пример 4. *Стабилизировать положение равновесия, если известен вектор состояния.*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rankW = 1 \Rightarrow$ система не управляема. Отметим, что переменная x_1 является управляемой, а переменная x_2 – нет. При этом тривиальное решение $x_2 = 0$ асимптотически устойчиво. Рассмотрим $u = k_1 x_1$

$$A_u = \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |A_u - \lambda E| = (k_1 - \lambda)(-1 - \lambda) = (\lambda - k_1)(\lambda + 1).$$

Видно, что характеристическое уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = k_1$. Таким образом, система стабилизируема при $k_1 < 0$.

Синтез. Стабилизация положения равновесия по измерению вектора состояния

Рассмотрим задачу стабилизации системы (3.1) по измерению $z = Hx$, где H – постоянная матрица размерности $(m \times n)$. Будем предполагать, что пара (A, B) – управляема, а пара (A, H) – наблюдаема.

В качестве управления рассмотрим управление u по оценке вектора состояния:

$$u = k_{u1}\tilde{x}_1 + k_{u2}\tilde{x}_2 = k_u^T\tilde{x}.$$

Здесь $\tilde{x}$ – линейная оценка вектора состояния, удовлетворяющая уравнению [1]:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + bu + K_z(z - H\tilde{x}).$$

Уравнение ошибки $\Delta x = x - \tilde{x}$ оценки имеет вид

$$\Delta\dot{x} = (A - K_zH)\Delta x.$$

Замкнутая система уравнений для сводного вектора

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \Delta x \end{pmatrix}.$$

имеет вид

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} A + bk_u & -bk_u \\ 0 & A - K_zh^T \end{pmatrix} X = A^*X.$$

Отсюда немедленно следует, что соответствующий определитель (как определитель с нулевым углом) представляется в виде

$$|\lambda E - A^*| = |\lambda E_I - (A + bk_u)||\lambda E_I - (A - k_zh^T)|.$$

В силу управляемости пары (A, B) и наблюдаемости пары (A, H) можно подобрать k_u и k_z так, что каждый из сомножителей будет иметь нужные корни. Таким образом, можно построить синтез процессов управления и оценивания, который в состоянии стабилизировать положение равновесия.

Пример 5. *При помощи управления с обратной связью по оценке вектора состояния стабилизировать систему:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u, \end{cases}$$
$$z = x_1.$$

Решение:

Запишем систему в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

И исследуем систему на наблюдаемость и управляемость:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad rkW = rkN = 2,$$

то есть система является управляемой и наблюдаемой. Следовательно, можно решить задачу синтеза - стабилизации положения равновесия с помощью обратной связи по оценке вектора состояния:

$$|A - K_zh^T - \lambda E| = \begin{vmatrix} -k_{z_1} - \lambda & 1 \\ -k_{z_2} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k_{z_1} + 1)\lambda + (k_{z_1} + k_{z_2}),$$

$$k_{z_1} > -1, k_{z_1} + k_{z_2} > 0.$$

$$|A + bK_u - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k_{u_1} & k_{u_2} - 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + (1 - k_{u_2})\lambda - k_{u_1},$$

$$k_{u_1} < 0, k_{u_2} < 1.$$

Глава 4

Оптимальное управление движением

Принцип максимума

Рассмотрим класс динамических систем, описываемых с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = f(y, u), \tag{4.1}$$

где y — вектор состояния размерности n, u — скалярное управление, f — гладкая вектор-функция. Важным частным случаем, достаточно часто встречающимся в приложениях теории оптимального управления, является линейность функции $f(y, u)$ по управлению.Для системы (4.1) считаются заданными начальные и, возможно, некоторые конечные условия.

Условием окончания процесса служит первое попадание на гладкое многообразие $M \subset R^n$, заданное с помощью m равенств ($1 \le m \le n$):

$$M = \left\{ y \in R^n \middle| \varphi_i(y) = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \mathrm{rang}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} = m \right\}.$$

В качестве критерия качества управления системой (4.1) рассмотрим финитный гладкий функционал $\varphi_0(y(t_k))$, где момент t_k — первый момент попадания на многообразие M. Например, если ввести дополнительную координату $x_{n+1} = t$ и определить многообразие M в пространстве R^{n+1} как гиперплоскость $\{x_{n+1} - t_k = 0\}$, то будем иметь задачу с фиксированным временем t_k.

Пусть система (4.1) управляема, то есть существует хотя бы одно управление и конечный момент времени t_k такие, что $y(t_k) \in M$. При этом предполагается, что ресурсы управления ограничены, то есть управление u как функция времени принадлежит функциональному множеству

$$U = \left\{ u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty[t_0, t_k] \middle| \quad u_- \le u(t) \le u_+ \right\}. \tag{4.2}$$

Вообще говоря, ограничения на управления могут отсутствовать. Например, в ряде прикладных задач в качестве управления рассматривается направление вектора тяги, на которое не наложено никаких ограничений.

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\varphi_0(y(t_k)) \longrightarrow \inf_{u(\cdot) \in U}. \tag{4.3}$$

Задача оптимального управления заключается в отыскании управления, которое переводит систему (4.1) из начального состояния на конечное многообразие, удовлетворяет ограничению (4.2) и при этом функционал (4.3) достигает своего минимума на траекториях системы (4.1).

Для рассматриваемой постановки задачи из теоремы А.Ф. Филиппова о существовании оптимального управления следует, что существует оптимальное управление $u_0(\cdot) \in U$ и момент времени $t_k^0 \in [t_0;\, t_k]$ такие, что на соответствующей оптимальной траектории $y^0(t)$ выполняется равенство

$$\varphi_0(y^0(t_k^0)) = \min_{u(\cdot)\in U} \varphi_0(y(t_k)).$$

Пара $\{y^0(\cdot),\ u_0(\cdot),\ [t_0;\, t_1^0]\}$, называется оптимальным процессом.

Введем понятие системы линейных дифференциальных уравнений, сопряженных исходной:

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f(y^0(t),\, u_0(t))}{\partial y}\right)^{\top} \psi \tag{4.4}$$

и функцию Понтрягина

$$H(\psi,\, y,\, u) = \psi^{\top} f.$$

Теорема 4.1. *Если $\{y^0(\cdot),\ u_0(\cdot),\ [t_0;\, t_k^0]\}$ — оптимальный процесс, то существует ненулевая пара $\{\lambda_0 \geq 0,\, \psi(\cdot)\}$ такая, что выполняются следующие условия:*

1) функция Понтрягина достигает максимума на оптимальном управлении почти при всех $t \in [t_0;\, t_k^0]$

$$\max_{u_- \leq u \leq u_+} H(\psi(t),\, y^0(t),\, u) = H(\psi(t),\, y^0(t),\, u_0(t)); \tag{4.5}$$

2) условие трансверсальности: вектор $\left[\psi(t_k^0) + \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi_0(y^0(t_k^0))}{\partial y}\right]$ ортогонален к многообразию M в точке $y^0(t_k^0)$;

3) условие стационарности (почти всюду на $[t_0;\, t_k^0]$)

$$\mathcal{H}(t) = H(\psi(t),\, y^0(t),\, u_0(t)) \equiv 0. \tag{4.6}$$

Неособые и особые оптимальные управления и варианты их сопряжения

Рассмотрим частный случай системы (4.1) вида:

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, u, v) = f^0(y) + f^1(y)u \\ u \in U. \end{cases} \tag{4.7}$$

Оптимальное управление в задаче (4.3), (4.7) в общем случае может складываться из участков регулярного (неособого) и сингулярного (особого) управлений, сопряжение которых осуществляется кусочно–непрерывно или посредством режима с учащающимися переключениями. [1]

[1] В случае, когда минимизирующая последовательность управлений не имеет предела в классе измеримых по Лебегу функций, рассматриваются скользящие режимы управления.

Неособое управление

Управление $u_0(t)$ однозначно определяется из условия максимума функции H по u (уравнение (4.5)). В этом случае оптимальное управление называется регулярным, а соответствующая ему дуга оптимальной траектории задачи (4.3), (4.7) — регулярной дугой. В случае задачи оптимального быстродействия для системы (4.7) вида

$$\dot{y} = Ay + Bu,$$

где A и B — постоянные матрицы размерностей $(n \times n)$ и $(n \times 1)$ соответственно, оптимальное управление является регулярным, если пара $(A,\, B)$ управляема $(\det(B,\, AB,\, ...A^{n-1}) \neq 0)$. В ряде других частных случаев системы (4.7) также можно доказать, что оптимальные управления являются регулярными.

В результате применения принципа максимума к задаче оптимального управления (4.3), (4.7) получаем следующее регулярное управление:

$$u_0(t) = \begin{cases} u_+, & \text{если } \psi^\top f^1(y) > 0, \\ u_-, & \text{если } \psi^\top f^1(y) < 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

т.е. регулярное управление принимает предельные допустимые значения для управляющей функции.

Особое управление

Управление $u_0(t)$ не может быть однозначно определено из условия максимума функции H по u. Пусть существует отрезок времени τ, $\tau \subset [t_0,\, t_k^0]$ такой, что для любого $t \in \tau$ выполнено соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

что для задачи (4.3), (4.7) приводит к равенству

$$\psi^\top f^1(y) \equiv 0, \quad t \in \tau \subset [t_0;\, t_1].$$

Управление, для которого выполнены указанные условия, называется особым или сингулярным управлением, а соответствующая ему дуга траектории системы (4.7) — сингулярной дугой.

Большинство задач оптимального управления механическими системами, в которых может иметь место особое управление, представляются в виде задачи (4.3), (4.7). Задачи, в которых оптимальное управление содержит режим особого управления, иногда называют вырожденными задачами.

Вычисление особого управления

Пусть на отрезке τ имеет место соотношение

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \psi^\top f^1(y) \equiv 0, \quad t \in \tau \subset [t_0;\, t_1].$$

Предположим, что функция $\partial H/\partial u$ дифференцируема по t в силу систем (4.4) и (4.7) до тех пор, пока управление u не войдет явным образом (с ненулевым множителем) в очередную производную. Последовательное дифференцирование выражения $\partial H/\partial u$ по времени приводит к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{d^s}{dt^s}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right)\right) \equiv 0, \quad s = 1, ..., 2q-1, \\ \dfrac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\dfrac{\partial H}{\partial u}\right) = a(\psi,\, y) + u \cdot b(\psi,\, y), \quad b(\psi(t),\, y(t)) \neq 0. \end{cases}$$

причем управление u явным образом может войти только в четную производную. Число q называют порядком особого управления, или порядком вырожденности (сингулярности) оптимального управления.

Если $b(\psi(t),\, y(t)) \neq 0$ при всех $t \in \tau \subset [t_0;\, t_1]$, то особое управление вычисляется по формуле

$$u(t) = -\frac{a(\psi(t),\, y(t))}{b(\psi(t),\, y(t))}, \quad t \in \tau.$$

Необходимое условие оптимальности особого управления (Дж. Келли [6])

Теорема 4.2. *Для минимума функционала качества на особом управлении в задаче (4.3), (4.7) должно выполняться следующее необходимое условие*

$$(-1)^q b(\psi,\, y) = (-1)^q \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right) \leq 0.$$

Это условие является аналогом условия Лежандра-Клебша для особых экстремалей в вариационном исчислении [6].

Учащающиеся переключения

Вопрос о сопряжении регулярного и особого участков оптимальной траектории остается недостаточно изученным. Большинство результатов относится к случаю кусочно-непрерывных или даже кусочно-аналитических управлений в окрестности точки сопряжения. Первый пример задачи, в которой сопряжение регулярного и особого участков происходит с бесконечным числом переключений на конечном отрезке времени принадлежит А.Т.Фуллеру. При этом точки переключения накапливаются к точке сопряжения регулярного участка с особым.

При $q = 1$ сопряжение участков особого и неособого управления осуществляется с помощью конечного числа переключений неособого оптимального управления.

При четном q оптимальное управление на неособом участке не может быть кусочно–непрерывным. Разрывы управления (точки переключения) сгущаются к точке сопряжения с особым участком и оптимальное управление оказывается измеримой по Лебегу функцией со счетным множеством точек разрыва. Известны примеры сопряжения с бесконечным числом переключений и для особого участка нечетного порядка, большего единицы [4].

Задачи **??** - **??** являются примерами задач оптимального управления, в которых сопряжение регулярных и особых участков может происходить с помощью четеринг-режимов [4], хотя исследование таких режимов выходит за рамки этого сборника.

Глава 5

Оптимальное оценивание при случайных измерениях

Дискретная скалярная случайная величина X задается множеством ее возможных значений $\Omega = \{x_i\}$ и множеством вероятностей соответствующих событий $P = \{p_i\}$ с условием нормировки $\sum p_i = 1$.

Для непрерывной скалярной случайной величины X задается множество ее возможных значений $\Omega = \{x(t)\}$ и функция распределения вероятностей

$$F(x) = P(X < x),$$

представляющая собой вероятность того, что X не превосходит x.

Определение 5.1. *Функцией плотности вероятности называется функция*

$$p(x) = \frac{dF}{dx}$$

Следствие. *Функцию распределения вероятностей можно получить интегрированием функции плотности вероятности:*

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(s)ds$$

Некоторые свойства плотностей вероятности и функций распределения:

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1, \quad F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1 \leq x_2,$$

$$p(x) \geq 0 \quad \forall x, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

Основные детерминированные характеристики случайных величин - математическое ожидание и ковариация.

Определение 5.2. *Математическим ожиданием функции $g(X)$ случайного аргумента X называется следующая величина*

$$M[g(X)] = \int\limits_{\Omega} g(x)p(x)dx$$

где Σ – область изменения случайной величины.

Следствие. *Математическим ожиданием случайной величины X называется число*

$$\mu_x = \int xp(x)dx, \qquad (\mu_x = \sum x_i p_i)$$

Примечание. *Математическое ожидание также называют* центром масс

Определение 5.3. *Центрированная случайная величина:*

$$\overset{\circ}{X} = X - \mu_x$$

Определение 5.4. *Дисперсией случайной величины называется число*

$$D_x = \int (x-\mu_x)^2 p(x)dx = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^2\right], \qquad (D_x = \sum (x_i - \mu_x)^2 p_i).$$

Примечание. *Дисперсия также называется* центральным моментом инерции

Следствие. *Дисперсию можно вычислить следующим образом*

$$D_x = M[x^2] - \mu_x^2$$

Определение 5.5. *Среднеквадратичным отклонением (СКО) случайной величины от среднего значения называется*

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

Если рассматриваются две случайные величины X, Y, то они задаются плотностью вероятности $p(x,y)$, зависящей от двух аргументов. При этом

Соответствующие формулы по определению первых двух моментов таковы

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy, \quad F(x) = F(x,\infty)$$

$$\mu_x = \int\int xp(x,y)dxdy, \quad D_x = \int\int (x-\mu_x)^2 p(x,y)dxdy$$

Если $f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$, то случайные величины X, Y – независимы.

Определение 5.6. *Моментом корреляции называется следующая величина*

$$K_{xy} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = \int\limits_{\Omega_x}\int\limits_{\Omega_y} (x-\mu_x)(y-\mu_y)p(x,y)dxdy.$$

Определение 5.7. *Коэффициентом корреляции называется число*

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad \textit{где} \quad \sigma_x^2 = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\right)^2\right], \quad \sigma_y^2 = M\left[\left(\overset{\circ}{Y}\right)^2\right]$$

Примечание. *Коэффициент корреляции является безразмерным.*

Следствие. *Легко видеть, что K_{xy} (соответственно, ρ_{xy}) $= 0$, если X и Y – независимые случайные величины. Обратное, вообще говоря, неверно. Коэффициент корреляции служит мерой линейной связи, поэтому некоррелированности X и Y следует только то, что между ними отсутствует линейная связь.*

Метод наименьших квадратов

Рассмотрим переопределенную систему линейных уравнений

$$z = Hx,$$

где x – $n-$мерный вектор, подлежащий определению; z – известный $m-$мерный вектор (вектор измерения); матрица H имеет размерность $(m \times n)$ и предполагается имеющей максимальный ранг (на практике имеет место чаще всего $m \gg n$ и, соответственно, система линейных уравнений несовместна).

Поскольку каждому вектору $x \in \mathbf{R}^n$ соответствует вектор невязки $r \in \mathbf{R}^m$:

$$r = z - Hx$$

то в качестве решения задачи естественно выбрать такой вектор $\tilde{x}$, который доставляет минимум длины (нормы) вектора невязки r.

Тем самым приходим к классической постановке метода наименьших квадратов:

$$\tilde{x} = \operatorname{argmin} J(x), \quad J(x) = (z - Hx)^T (z - Hx) = r^T r = \|r\|^2$$

Минимизация функционала J приводит к уравнению

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -2z^T H + 2x^T H^T H = 0$$

из которого следует

$$\tilde{x} = (H^T H)^{-1} H^T z = H^+ z$$

Матрица $H^+ = (H^T H)^{-1} H^T$ называется псевдообратной. (Матрица $H^T H$ невырождена, поскольку матрица H – максимального ранга).

Примечание. *Использование модифицированного функционала*

$$J = (z - Hx)^T C (z - Hx)$$

где C – симметрическая неотрицательно определенная матрица, является обобщением выше рассмотренного метода наименьших квадратов. При этом матрица C играет роль метрического тензора в пространстве невязок r.

Дискретный фильтр Калмана

Рассмотрим линейную динамическую систему, которая в дискретном времени подчиняется уравнению:

$$x_{j+1} = \Phi_j x_j + q_j,$$

где x_j – вектор состояния в момент времени t_j; q_j – дискретный белый шум с известной интенсивностью – ковариационной матрицией Q_j; Φ_j – известная переходная матрица. Заданы $\tilde{x}_0 = M[x_0]$, $P_0 = M[(x_0 - \tilde{x}_0)(x_0 - \tilde{x}_0)^T]$. В момент времени $j = 0, 1, 2, \ldots$ поступает информация $z_0, z_1, z_2, \ldots$:

$$z_j = H_j x_j + r_j.$$

Погрешность информации r_j – не коррелированный во времени вектор с нулевым средним и известной интенсивностью $R_j : M[r_i r_j^T] = R_j \delta_{ij}$. Кроме того, полагаем $M[x_i r_j^T] = 0$. Требуется в каждый момент времени j получить оценку $\tilde{x}_j$, удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности, оптимальности (условию минимума дисперсии ошибки оценивания). Введем обозначения:

$\tilde{x}_j^- = M[x/z_0, z_1, \ldots, z_{j-1}]$ – априорная оценка вектора x в момент времени j, использует

измерения $z_0, \dots, z_{j-1}$;
$\tilde{x}_j^+ = M[x/z_0, z_1, \dots, z_j]$ – апостериорная оценка вектора x в момент времени j, использует измерения $z_0, \dots, z_j$;
P_j^- – априорная оценка ковариационной матрицы вектора x в момент времени j;
P_j^+ – апостериорная оценка ковариационной матрицы вектора x в момент времени j.

Определение 5.8. *Дискретным фильтром Калмана называется алгоритм оценивания, описываемый следующими соотношениями:*
1) этап инициализации

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0^- &= \tilde{x}_j \\ P_0^- &= P_0 \end{aligned}$$

2) этап коррекции

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j^+ &= \tilde{x}_j^- + K_j(z_j - H_j\tilde{x}_j^-) \\ K_j &= P_j^- H_j^T (H_j P_j^- H_j^T + R_j)^{-1} \\ P_j^+ &= (E - K_j H_j) P_j^- \end{aligned}$$

3) этап прогноза

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j+1}^- &= \Phi_j \tilde{x}_j^+ \\ P_{j+1}^- &= \Phi_j P_j + \Phi_j^T + Q_j \end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Рассмотрим стационарный случай: $\Phi_j = \Phi = Const$, $Q_j = Q = Const$, $R_j = R = Const$. Обозначим B матрицу, являющуюся квадратным корнем матрицы Q: $Q = BB^T$. Пусть пара (Φ, H) – наблюдаема, пара (Φ, B) – управляема. Тогда при бесконечном времени наблюдения:*
1) существуют $P_\infty^-, P_\infty^+, K_\infty$, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} P_\infty^- &= \Phi P_\infty^+ \Phi + Q \\ P_\infty^+ &= (E - K_\infty H) P_\infty^- \\ K_\infty &= P_\infty^- H^T (H P_\infty^- H)^{-1} \end{aligned}$$

2) уравнения ошибок относительно величин $\Delta x_j^- = x_j - x_j^-$, $\Delta x_j^+ = x_j - x_j^+$

$$\begin{aligned} \Delta x_{j+1}^- &= \Phi \Delta x_j^+ + q_j \\ \Delta x_j^+ &= (E - K_\infty H)\Delta x_j^- - K_\infty r_j \end{aligned}$$

таковы, что при $q_j = 0, r_j = 0$ выполнено $\Delta x_j^-, \Delta x_j^+ \to 0 (j \to \infty)$.

Непрерывный фильтр Калмана

Рассмотрим непрерывную линейную динамическую систему, поведение которой описывается вектором состояния:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + q(t),$$

где $q(t)$ – нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[q(t)] = 0, \quad M[q(t)q^T(s)] = Q(t)\delta(t-s), \quad Q(t) \geq 0.$$

Также известны

$$\tilde{x}(t_0) = M[x_0(t)], \quad P(t_0) = M[(x(t_0) - \tilde{x}(t_0))(x(t_0) - \tilde{x}(t_0))^T] \geq 0.$$

На интервале $[t_0, t]$ непрерывно поступает информация:

$$z(t) = H(t)x(t) + r(t),$$

где погрешность измерений $r(t)$ – нормальный случайный процесс типа белого шума:

$$M[r(t)] = 0, \quad M[r(t)r^T(s)] = R(t)\delta(t-s), \quad R(t) > 0.$$

Кроме того $\forall t \geq t_0$

$$M[x(t_0)q^T(t)] = 0, \quad M[x(t_0)r^T(t)] = 0$$

и $\forall t, s$

$$M[r(t)q^T(s)] = 0$$

Требуется в любой момент времени $t \geq t_0$ определить оценку $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющую условиям линейности, несмещенности и ортогональности.

Определение 5.9. *Непрерывным фильтром Калмана называется алгоритм оценивания, описываемый соотношениями:*

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + K(z - Hx), \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \\
&K = P_x H^T R^{-1}, \\
&\dot{P}_x = AP_x + P_x A^T + Q - P_x H^T R^{-1} H P_x, \quad P_x(t_0) = P_0
\end{aligned}$$

Примечание. *Дифференциальное уравнение для ковариационной матрицу ошибок оценки называется уравнением Риккати.*

Теорема 5.2. *Пусть $P(t)$ – положительно-определенная и ограниченная для всех $t > t_0$ матрица ($\sigma_1^2 E < P(t) < \sigma_2^2 E$, $\sigma_{1,2} = const$), являющаяся решением уравнения Риккати:*

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP.$$

Тогда однородное уравнение ошибок

$$\Delta\dot{x} = (A - KH)\Delta x$$

устойчиво. Если пара (A, H) – наблюдаема, тогда это уравнение асимптотически устойчиво.

Теорема 5.3. *Пусть P_1, P_2 – два решения уравнения Риккати*

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q - PH^T R^{-1} HP,$$

соответствующие двум возможным начальным значениям $P_1(t_0)$ и $P_2(t_0)$. Решения однородных уравнений

$$\Delta\dot{x} = (A - P_1 H^T R^{-1} H), \quad \Delta\dot{x} = (A - P_2 H^T R^{-1} H)$$

устойчивы (соответственно асимптотически устойчивы). Тогда раность $|P_1 - P_2|$ ограничена (соответственно $|P_1 - P_2| \to 0$ при $t \to \infty$).

Теорема 5.4. *Рассмотрим стационарный случай: $A, H, Q, R - const$. Пусть пара (A, H) – наблюдаема, пара (A, B) – управляема (здесь $BB^T = Q$), тогда*
1) существует единственное установившееся решение P_∞ уравнения $\dot{P} = AP + PA^T - Q + PH^T R^{-1} HP$, $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_\infty$, удовлетворяющее уравнению

$$AP_\infty + P_\infty A^T - Q + P_\infty H^T R^{-1} H P_\infty = 0$$

2) однородное уравнение

$$\Delta\dot{x} = (A - P_\infty H^T R^{-1} H)\Delta x$$

асимптотически устойчиво.

Пример 1. *Методом калмановской фильтрации построить оценку $\tilde{x}$ величины x и найти ошибку $\sigma_{\Delta x}$ оценки в момент времени $t = 1$:*

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = -x + q, \quad M[q] = 0, \quad M[q(t)q(s)] = \delta(t-s)\\
&z = x + r, \quad M[r] = 0, \quad M[r(t)r(s)] = \delta(t-s)\\
&\mu_x(0) = 1, \quad \sigma_x(0) = 1, \quad z(0) = 2
\end{aligned}$$

Решение:

Оценка $\tilde{x}(1)$ находится в два этапа. Первый этап - этап коррекции априорной информации, доступной в момент времени $t = 0$, по данным измерения $z(0) = 2$ в тот же момент времени. Учитывая, что $\tilde{x}^-(0) = \mu_x(0)$, $P^-(0) = \sigma_x^2(0)$, $H = 1$, $Q = 1$, $R = 1$, воспользуемся формулами этапа коррекции дискретного фильтра Калмана:

$$\begin{aligned}
&K = P^-(0)H^T(HP^-(0)H^T + R)^{-1} = 1/2,\\
&P^+(0) = (1 - KH)P^-(0) = 1/2,\\
&\tilde{x}^+(0) = \tilde{x}^-(0) + K(z(0) - H\tilde{x}^-(0)) = 3/2.
\end{aligned}$$

Второй этап – этап прогноза на момент времени $t = 1$. Для этого необходимо решить уравнение

$$\dot{\mu}_x = -\mu_x$$

с начальными условиями $\mu_x(0) = \tilde{x}^+(0)$ и получить значение $\mu_x(t)$ при $t = 1$. Решение данного дифференциального уравнения с начальными условиями имеет вид

$$\mu_x(t) = \tilde{x}^+(0)e^t = \frac{3}{2}e^t$$

В момент времени $t = 1$ получаем $\tilde{x} = \mu_x(1) = \frac{3}{2}e$. Ковариация ошибки оценки удовлетворяет дисперсионному уравнению:

$$\dot{P} = AP + PA^T + Q.$$

Решив данное уравнение с начальными условиями $P^+(0)$, получим

$$P(t) = e^{-2t} + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, в момент времени $t = 1$ получаем $P(1) = e^{-2} + \frac{1}{2}$. Отсюда

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{e^{-2} + \frac{1}{2}}.$$

Литература

[1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. Москва: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2005. 376 с.

[2] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Изд-во "Мир", 1972.

[3] Летов А.М. Динамика полета и управление. Москва: Изд-во "Наука", 1969.

[4] Зеликин М.И., Борисов В.Ф. Синтез оптимальных управлений с накоплением переключений. Итоги науки и техники. Т. 90. ВИНИТИ, 2002. С. 5-186.

[5] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. Наука, М., 1967.

[6] Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. Москва: Изд-во "Наука", 1973.

[7] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. Москва: Изд-во "Высшая школа", 2003. 614 с.

[8] Белецкий В.В. Очерки о движении небесных тел. Москва: Изд-во "Наука", 1965.

[9] Сейдж Э. П., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи с управлением. Пер. с англ. Серия "Статистическая теория связи", выпуск 6. Москва: Изд-во "Связь", 1976. 496 с.

[10] Сейдж Э. П., Уайт Ч. С., III. Оптимальное управление системами. Пер. с англ. Москва: Изд-во "Радио и связь", 1982. 392 с.

[11] Хьюбер П. Робастность в статистике. Пер. с англ. Москва: Изд-во "Мир", 1984. 304 с.

[12] Лоуссон Ч., Хенсен Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. Пер. с англ. Москва: Изд - во "Наука", 1986. 232 с.

[13] Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. Пер. с англ. Москва: Изд - во "Мир", 1993. 349 с.

[14] Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. /Пер. с англ. под ред. А.М. Трахтмана. Москва: Изд - во "Советское радио", 1980. 224 с.

[15] Maybeck P.S. Stochastic models, Estimation and Control. New York: Academic Press, 1979.

[16] Карлсон Н.А. Быстрая треугольная форма реализации фильтра Калмана методом, использующим квадратные корни из матриц. Пер. с англ. Зарубежная радиоэлектроника 6, 1973. сс. 37-53.

[17] Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. Москва: Изд-во "Мир", 1988. 168 с.

[18] Balakrishnan A.V. Kalman Filtering Theory. New York: Optimization Software, Inc., Publications Division, 1984.

[19] Иванов Ю.П. Комплексная фильтрация и классификация сигналов. Ленинград: Изд-во Ленинградского Университета, 1988. 212 с.

[20] Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. Детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация. Москва: Изд-во "Наука", 1982. 200 с.

[21] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. Москва: Изд-во "Наука", 1978. 352 с.

[22] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Изд-во "Наука", 1978. 832 с.

[23] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Изд-во "Факториал", 1997. 304 с.

[24] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычесления. Москва: Изд - во "Наука", 1984. 320 с.

[25] Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов. Москва: Изд-во "Наука", 1986. 192 с.